ПМТФ, № 3, 1972

УДК 532.516

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ПОТОКОМ ВЕЩЕСТВА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

М. В. Башкатов, С. И. Шабанов

(Новосибирск)

Проводится аналитическое решение задачи об обтекании сферы с поперечным потоком вещества при числах Рейнольдса, меньших единицы, и скорости вдува, меньшей скорости набегающего потока. При решении использован метод асимптотических разложений Пирсона и Праудмена. Получены выражения для распределения функции тока и составляющих скоростей, а также для коэффициента аэродинамического сопротивления сферы. Показано, что вдув уменьшает сопротивление сферы, причем его влияние увеличивается по мере возрастания числа Рейнольдса.

Для расчета таких процессов в дисперсных потоках, как сушка, возгонка, термическое разложение, горение топлив, гетерогенное реагирование со стефановским потоком и т. д., определенный интерес представляет решение задач об обтекании и тепломассообмене сферической частицы со вдувом на поверхности при малых числах Рейнольдса.

Среди имеющихся в этом направлении работ [1-8] первыми систематическими исследованиями следует считать [6, 7], в которых были получены приближенные аналитические решения как гидродинамической, так и тепловой задач и проведена экспериментальная проверка. Однако в работе [6] было найдено лишь первое, стоксовское приближение для поля скоростей, которое не позволяет оценить влияние вдува на сопротивление сферы. В той же работе для тепловой задачи по существу классическим методом разложения по малому параметру отыскивалось решение, однородно справедливое для всей области течения.

Между тем Озеен [9], Праудмен и Пирсон [10] для гидродинамической задачи, а Акривос и Тейлор [11] для тепловой, но без вдува, показали, что вдали от сферы инерционные или конвективные члены становятся одного порядка с членами молекулярного переноса и поэтому обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, так как уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить единое точное решение во всей области от $r = 1$ до $r = \infty$.

Целью данной работы является более корректное определение для рассматриваемого случая поля скоростей и коэффициента аэродинамического сопротивления сферы. Предпринята попытка решить хотя бы во втором приближении задачу по обтеканию сферы с равномерным вдувом при $R < 1$ ($R = aU_\infty \nu^{-1}$, a — радиус сферы, U_∞— скорость потока, ν—коэффициент кинематической вязкости) с помощью аналитического метода, разработанного в [10], который, по-видимому, является наиболее строгим из существующих. В дальнейшем имеется в виду использовать результаты данной работы и для более точного решения соответствующей тепловой задачи при помощи аналогичного метода, предложенного в [11].

В обозначениях [10] основное уравнение для функции тока имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\psi, D^2\psi)}{\partial(r,\mu)} + \frac{2}{r^2}D^2\psi\left(\frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) = \frac{1}{R}D^4\psi \tag{1}$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}$$

где D^2 — оператор Стокса, $\mu \equiv \cos\theta$, $\theta = 0$ — направление набегающего потока.

Решение его согласно [10] ищется в виде двух разных приближенных разложений для одной и той же функции тока, являющейся строгим, но неизвестным решением во всей области течения. Одно из них ψ должно точно удовлетворять граничным условиям на поверхности и справедливо только для внутренней или стоксовской области течения вблизи сферы. Оно представляется в виде

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(R)\,\psi_n(r,\mu) \tag{2}$$

при условии, что $f_{n+1} / f_n \to 0$, если $R \to 0$, и может быть найдено непосредственно из уравнения (1).

Второе должно удовлетворять граничным условиям на бесконечности и справедливо лишь во внешней или озееновской области на большом удалении от сферы. Для него заменой переменных

$$\rho = Rr, \quad \Psi = R^2\psi \tag{3}$$

уравнение (1) преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\Psi, D_\rho^2\Psi)}{\partial(\rho,\mu)} + \frac{2}{\rho^2}D_\rho^2\Psi\left(\frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right) = D_\rho^4\Psi \tag{4}$$

а решение ищется тоже в виде ряда

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(R)\,\Psi_n(\rho,\mu) \tag{5}$$

где $F_{n+1} / F_n \to 0$ при $R \to 0$.

Когда имеется вдув, а константы вдуваемого вещества и набегающего потока одинаковы, эти уравнения остаются в силе, но граничные условия, к которым относится и $\operatorname{rot} V = (r\sin\theta)^{-1}D^2\psi$, изменяются. Если учесть (3) и обозначить радиальную скорость вдува через поверхность V^*, то они имеют вид

$$V_r = k = \frac{V^*}{U_\infty}, \quad V_\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = 1$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -k, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

$$V_r = \mu, \quad V_\theta = -(1-\mu^2)^{1/2}, \quad \operatorname{rot} V = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{6}$$

или

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu} = \mu, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = 1-\mu^2, \quad \frac{D_\rho^2\Psi}{\rho} = 0 \tag{7}$$

Поскольку ищется не одно, а два разложения, граничных условий (6) и (7) недостаточно для решения. Однако, как говорилось, оба разложения являются лишь разными представлениями одной и той же функции тока, однородно справедливой во всей области течения. Поэтому недостающие граничные условия вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого разложения в некоторую промежуточную область. То же самое относится и к rot V.

Для функции тока этим условием согласования является

$$\underset{r\to\infty}{\psi} = \underset{\rho\to 0}{R^{-2}\Psi} \tag{8}$$

а для rot V

$$\underset{r\to\infty}{\frac{1}{r} D_r^2\psi} = \underset{\rho\to 0}{\frac{R}{\rho} D_\rho^2\Psi} \tag{9}$$

Для рассматриваемого случая $k < 1$ скорость нигде не должна превышать порядок скорости набегающего потока. Поэтому главный член во внутреннем разложении (2) не должен зависеть от R, и можно положить $f_0(R) = 1$. Тогда уравнение (1) для главного члена приобретает вид

$$D_r^4\psi_0 = 0 \tag{10}$$

а его решением, остающимся конечным при $\mu = \pm 1$, является

$$D_r^2\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_n}{r^n} + B_n r^{n+1}\right) Q_n(\mu) \tag{11}$$

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{\mu} P_n(\mu)\, d\mu$$

где $P_n(\mu)$ — полином Лежандра первого рода.

В озееновской области влияние вдува исчезающе мало, и поэтому главный член разложения (5), как и в [10], может быть найден из условий невозмущенного потока на бесконечности

$$\Psi_0 = {}^1/_2\rho^2(1-\mu^2) \tag{12}$$

причем $F_0(R) = 1$, что следует из выбора озееновских координат (3). С другой стороны, в невозмущенном потоке $D_\rho^2\Psi_0 = 0$, и условие согласования (9), если представить (11) в координатах (3) и предположить, что $F_1(R) = R$, дает

$$\underset{r\to\infty}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_n R^{n+1}}{\rho^{n+1}} + \frac{B_n\rho^n}{R^n}\right) Q_n(\mu)} = O(R^2) \tag{13}$$

Условие (13) выполняется только тогда, когда $A_0 = 0$ и $B_n = 0$, т. е. из (11) следует:

$$D_r^2\psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{r^n} Q_n(\mu) \tag{14}$$

Общее решение (14)

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{C_n}{r^n} + D_n r^{n+1} - \frac{A_n}{2(2n-1)r^{n-2}}\right] Q_n(\mu), \qquad A_0 = 0 \tag{15}$$

а решение, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности (6)

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2n-1}{2r^n} + r^{n+1} - \frac{2n+1}{2r^{n-2}}\right] D_n Q_n(\mu) - k(1+\mu) \tag{16}$$

Чтобы согласовать в соответствии с условием (8) решения (12) и (16), в последнем оставляются лишь старшие члены по $r \to \infty$ и оно по-прежнему представляется в координатах (3)

$$\underset{r\to\infty}{\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\rho^{n+1}}{R^{n-1}} Q_n(\mu) - k(1+\mu)R^2 + \ldots} = \underset{\rho\to 0}{\frac{\rho^2}{2}(1-\mu^2)} \tag{17}$$

Отсюда непосредственно следует, что $D_n = 0$ при $n \neq 1$, а $D_1 = -1$, так как $Q_1(\mu) = -(1-\mu^2)/2$. Таким образом, первое приближение для внутренней области имеет вид

$$\psi_0 = {}^1/_4 (2r^2 - 3r + {}^1/r)(1-\mu^2) - k(1+\mu) \tag{18}$$

$$D_r^2\psi_0 = \frac{3}{2r}(1-\mu^2) \tag{19}$$

Как и в работе [6], оно является простым наложением радиального поля скоростей, когда имеется только вдув, на стоксовское распределение без вдува.

Для всех последующих приближений граничные условия в обеих областях

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial\mu} = 0, \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\Psi_n}{\partial\mu} = 0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi_n}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{D_\rho^2\Psi_n}{\rho} = 0 \tag{20}$$

и построение приближений ведется следующим образом.

Разложение уравнения (4) по малому параметру R для второго члена разложения с учетом вида Ψ_0 дает уравнение, аналогичное известному уравнению Озеена

$$\frac{1}{\rho}(1-\mu^2)\frac{\partial D_\rho^2\Psi_1}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial D_\rho^2\Psi_1}{\partial\rho} = D_\rho^4\Psi_1 \tag{21}$$

Его решение относительно $D_\rho^2\Psi_1$, удовлетворяющее граничным условиям (20), приведено в [10] и может быть представлено в форме

$$D_\rho^2\Psi_1 = e^{-\rho(1-\mu)/2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{s=0}^{n} \frac{(n+s)!}{s!\,(n-s)!\,\rho^s} Q_n(\mu) \tag{22}$$

Как видно из (13), старшие члены решения (22) при $\rho \to 0$ должны согласовываться с выражением для $D_r^2\psi_0$ при $r \to \infty$ по условию (9)

$$\underset{r\to\infty}{-\frac{3R^2}{\rho^2}Q_1(\mu)} = \underset{\rho\to 0}{F_1(R)\,R\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{2n!}{\rho^{n+1}} Q_n(\mu)} \tag{23}$$

Это соотношение выполняется, если $B_1 = -{}^3/_2$, $B_n = 0$ для $n \neq 1$ и $F_1(R) = R$. Следовательно

$$D_\rho^2\Psi_1 = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)(1-\mu^2)\,e^{-\rho(1-\mu)/2} \tag{24}$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности для второго приближения, равно

$$\Psi_1 = C_0\rho(1+\mu) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{\rho^n}Q_n(\mu) + \frac{3}{2}(1+\mu)e^{-\rho(1-\mu)/2} \tag{25}$$

Из условий согласования видно, что все члены стоксовского разложения при $r\to\infty$ должны соответственно входить в озееновское разложение при $\rho\to 0$ и наоборот. Поэтому старшие члены выражения (25) при $\rho\to 0$ должны согласовываться со вторым членом в выражении для ψ_0, так как первый член уже согласован

$$\underset{r\to\infty}{-\frac{3}{4}\frac{\rho}{R}(1-\mu^2)+\ldots} = \underset{\rho\to 0}{\frac{1}{R}\Big[C_0\rho(1+\mu)+D_0(1+\mu)+}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{\rho^n}Q_n(\mu)+\frac{3}{2}(1+\mu)-\frac{3}{4}\rho(1-\mu^2)\Big]+\ldots \tag{26}$$

Сравнение членов показывает, что

$$C_0=0,\ D_0=-{}^3/_2,\ D_n=0 \text{ для } n\neq 0$$

Таким образом, выражение для второго члена озееновского разложения

$$\Psi_1 = -{}^3/_2(1+\mu)\left[1-e^{-\rho(1-\mu)/2}\right] \tag{27}$$

Как можно видеть из построения, влияние вдува при сделанных ограничениях $k<1$ на решение в озееновской области скажется только в третьем члене разложения.

Аналогично строится второй член внутреннего разложения. В предположении, что $f_1(R)=R$, и после подстановки выражения для ψ_0 в (1) уравнение для ψ_1 приобретает следующий вид:

$$\frac{9}{2r^3}\left(2r-3+\frac{1}{r^2}\right)Q_2(\mu)+\frac{9k}{r^4}Q_1(\mu)=D_r^{\,4}\psi_1 \tag{28}$$

а его решение относительно $D_r^{\,2}\psi_1$

$$D_r^{\,2}\psi_1=\frac{9k}{4r^2}Q_1(\mu)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{9}{4r}-\frac{1}{2r^3}\right)Q_2(\mu)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A_n}{r^n}+B_nr^{n+1}\right)Q_n(\mu) \tag{29}$$

Это решение по условию (9) при $r\to\infty$ согласуется с выражением для $D_\rho^{\,2}\Psi_1$ при $\rho\to 0$ и при этом учитывается, что старший член в последнем уже согласован

$$\underset{r\to\infty}{\frac{R^2}{\rho}\Big[-\frac{3}{2}Q_2(\mu)+A_0Q_0(\mu)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_nR^n}{\rho^n}Q_n(\mu)+}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{\rho^{n+1}}{R^{n+1}}Q_n(\mu)\Big] = \underset{\rho\to 0}{\left[\frac{3}{4}\mu+\ldots\right](1-\mu^2)\frac{R^2}{\rho}} \tag{30}$$

Это выполняется, если $A_0 = 0$ и $B_n = 0$, т. е.

$$D_r^2\psi_1 = \frac{9k}{4r^2} Q_1(\mu) - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{9}{4r} - \frac{1}{2r^3}\right) Q_2(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r^n} Q_n(\mu) \qquad (31)$$

Решение данного уравнения можно представить в виде

$$\psi_1 = -\frac{9k}{8} Q_1(\mu) + \frac{3}{16}\left(2r^2 - 3r - \frac{1}{r}\right) Q_2(\mu) -$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2(2n-1)\, r^{n-2}} Q_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{C_n}{r^n} + D_n r^{n+1}\right] Q_n(\mu) \qquad (32)$$

или после удовлетворения граничным условиям на поверхности для ψ_1

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n-1}{2r^n} + r^{n+1} - \frac{2n+1}{2r^{n-2}}\right] D_n Q_n(\mu) +$$
$$+ \frac{9k}{16}\left(r - 2 + \frac{1}{r}\right) Q_1(\mu) + \frac{3}{16}\left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) Q_2(\mu) \qquad (33)$$

Теперь согласование проводится по условию (8) с выражением для Ψ_1, из которого исключены ранее согласованные члены

$$\underset{r\to\infty}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \rho^{n+1}}{R^{n-1}} Q_n(\mu) + \frac{3}{8}\rho^2 Q_2(\mu) + \ldots} = \underset{\rho\to 0}{-\frac{3}{8}\rho^2 Q_1(\mu) + \frac{3}{8}\rho^2 Q_2(\mu) + \ldots} \qquad (34)$$

Условие (34) выполняется, если $D_1 = -{}^3/_8$, $D_n = 0$ при $n \neq 1$. Одновременно с этим подтверждается предположение, что $f_1(R) = R$.

Окончательно имеем

$$\psi_1 = -\frac{3}{8}\left(r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2r}\right) Q_1(\mu) + \qquad (35)$$
$$+ \frac{3}{16}\left(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) Q_2(\mu) + \frac{9k}{16}\left(r - 2 + \frac{1}{r}\right) Q_1(\mu)$$

$$D_r^2\psi_1 = -\frac{9}{8}\left(\frac{1+k}{r} - \frac{2k}{r^2}\right) Q_1(\mu) - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{9}{4r} + \frac{3}{4r^2} - \frac{1}{2r^3}\right) Q_2(\mu) \qquad (36)$$

Как и следовало ожидать, первые два члена в (35) аналогичны полученным в [10], а последний член учитывает взаимодействие вдува с набегающим потоком.

Если по найденным двум членам разложений (5) и (2) определить профили скоростей, то с помощью уравнения Навье — Стокса для r-й составляющей импульса можно получить выражение для распределения давления P.

В озееновской области ($\rho = Rr$) это распределение, удовлетворяющее условию на бесконечности

$$P_{\rho\to\infty} = P_0 / \rho_0 U_\infty^2$$

имеет вид

$$P^* = \frac{P_0}{\rho_0 U_\infty^2} - \frac{3}{2}\frac{R}{\rho^2}\cos\theta \qquad (37)$$

где ρ_0 — плотность среды, а согласованное с ним распределение давления во внутренней области

$$P_* = \frac{P_0}{\rho_0 U_\infty{}^2} - \frac{3\cos\theta}{2Rr^2} - \frac{9\cos\theta}{16r^2} - \frac{k^2}{2r^4} +$$
$$+\left(-\frac{25}{16r^2} + \frac{9}{4r^3} - \frac{1}{2r^5}\right)k\cos\theta + \left(\frac{9}{16r^2} - \frac{7}{8r^3} + \frac{15}{16r^4} - \frac{1}{8r^6}\right)\cos^2\theta +$$
$$+\left(-\frac{9}{16r^2} + \frac{7}{16r^3} - \frac{3}{16r^4} - \frac{1}{32r^6}\right)\sin^2\theta \qquad (38)$$

Из (38) давление на поверхности сферы равно

$$P_{r=1} = \frac{P_0}{\rho_0 U_\infty{}^2} - \frac{3\cos\theta}{2R} - \frac{9\cos\theta}{16} + \frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{11\sin^2\theta}{32} - \frac{k^2}{2} + \frac{3k\cos\theta}{16} \qquad (39)$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления сферы в обычном представлении $C_f = 2F/\rho_0 U_\infty^2$ (F — сила сопротивления), соответствующий профилям давлений (39) и касательных напряжений на поверхности, которые определяются из разложения (2), имеет вид

$$C_f = \frac{24}{R^*}\left(1 + \frac{3}{16}R^* - \frac{7k}{48}R^*\right), \qquad R^* = 2R \qquad (40)$$

Первые два члена представляют собой известное выражение Стокса с поправкой Озеена, а последний член характеризует влияние вдува и показывает, что это влияние растет с увеличением числа Рейнольдса в сторону уменьшения сопротивления сферы.

Поступила 7 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов А. И. Медленное стационарное обтекание сферы вязкой жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
2. Овчинников О. Н. Медленное течение несжимаемой вязкой жидкости около проницаемой эллиптической оболочки. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1964, № 230.
3. Аптер Д. М., Чуханов З. Ф. Движение газовыделяющих частиц. Инж.-физ. ж., 1961, № 5.
4. Аптер Д. М. Влияние газовыделения на гидродинамику твердых реагирующих частиц. Тр. Вост.-Сиб. филиала СО АН СССР, Сер. хим., 1961, вып. 33.
5. Годсейв Г. Исследование горения капель распыленного топлива. Вопросы горения и детонационных волн. М., Оборонгиз, 1958.
6. Петин Ю. М. Теплообмен сферической частицы, имеющей поперечный поток с поверхности. Сб. «Горение твердого топлива», т. 1, Новосибирск, «Наука», 1969.
7. Петин Ю. М., Шабанов С. И., Маланов М. Д. Влияние поперечного потока вещества на тепло-массообмен обтекаемых сферических частиц. Сб. «Горение твердого топлива», т. 2, Новосибирск, «Наука», 1969.
8. Hamielec A. E., Hoffman T. W., Ross L. L. Numerical solution of the Navier — Stokes equation for flow past spheres, pt 1. A. I. Ch. E. Journal, 1967, vol. 13, No. 2.
9. Oseen C. W. Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandtl Aufgabe in der Hydrodynamik. Ark. Math. Astron. Fys., 1910, Bd 6, Nr 29.
10. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 3, pp. 237—262.
11. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single spheres in stokes flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 4.