

УДК 519.642.5

Построение областей устойчивости неявного метода для численного решения интегро-алгебраического уравнения типа Абеля*

О.С. Будникова^{1,2}, М.Н. Ботороева^{1,2}, Г.К. Соколова^{1,2}

¹Иркутский государственный университет, ул. Карла Маркса, 1, Иркутск, 664003

²Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033

E-mails: osbud@mail.ru; osbud@pi.isu.ru (Будникова О.С.), masha88888@mail.ru (Ботороева М.Н.), 98gal@mail.ru (Соколова Г.К.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 16, 2023.

Будникова О.С., Ботороева М.Н., Соколова Г.К. Построение областей устойчивости неявного метода для численного решения интегро-алгебраического уравнения типа Абеля // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 1–16.

Представляемая работа посвящена построению областей устойчивости неявного метода первого порядка точности для интегро-алгебраического уравнения типа Абеля, содержащего жёсткие компоненты в решении. Проведены численные расчёты, подтверждающие полученные результаты. Для исследования устойчивости рассматриваемых математических объектов в статье предлагается согласованный с классическими результатами дробный аналог “жёсткой” задачи.

DOI: 10.15372/SJNM20230101

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения типа Абеля, интегральные уравнения Вольтерра, k -шаговые методы, жёсткая задача, области устойчивости.

Budnikova O.S., Botoroeva M.N., Sokolova G.K. Stability domains of an implicit method for the numerical solution of Abel type integral algebraic equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 1–16.

This article is devoted to a study of the properties of an implicit method for Abel type integral algebraic equations. An Abel type integral equation with stiff components is used for examining the properties of these methods and the stability domains are constructed. Numerical calculations confirming the results obtained are performed. In this article, a fractional “stiff” problem is proposed to study the stability of the mathematical objects considered.

Keywords: Abel type integral-algebraic equations, Volterra integral equations, k -step methods, stiff problem, stability domains.

1. Введение

В представляемой статье рассматривается система взаимосвязанных обобщённых интегральных уравнений Абеля первого и второго рода. Такие системы можно представить

*Работа, в части численных расчетов, выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00173)

в виде интегрального уравнения с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, которое будем называть *интегро-алгебраическим уравнением (ИАУ) типа Абеля* или *интегро-алгебраическим уравнением со слабой диагональной особенностью в ядре*.

Отметим, что исследованию обобщённых интегральных уравнений Абеля посвящено немало журнальных публикаций, например [1–3], и отдельных монографий, например [4, 5]. Эти математические объекты с момента их первого упоминания норвежским математиком Нильсом Хенриком Абелем в 1823 году не утратили актуальности как объекты исследования. Прежде всего это связано с их прикладной значимостью. В это же самое время интерес к ним вызван самой математической наукой, а именно развивающимся её направлением — дробным интегро-дифференцированием.

Близкими объектами к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода со слабой диагональной особенностью являются невырожденные дифференциальные уравнения дробного порядка. На данный момент активно ведутся исследования по построению эффективных численных алгоритмов их приближённого решения. Отметим работы, посвящённые исследованию устойчивости многошаговых методов для невырожденных дифференциальных уравнений дробного порядка с производной Капуто [6, 7].

В современной математической литературе интегро-алгебраическим уравнениям типа Абеля уделяется гораздо меньшее внимание. По всей видимости, впервые ИАУ со слабой диагональной особенностью ядра рассмотрены в работе Х. Брунера и М.В. Булатова [8], в которой были сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения указанного класса задач. Предложенный там метод аналитического исследования дальнейшее своё развитие получил в работе [9], где изучены не только ИАУ, но и вырожденные системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) с диагональной особенностью в ядре. Примерно в это же время в работе [10] коллективом иранских математиков получены результаты численного решения ИАУ типа Абеля методами коллокационного типа, а в статье [11] представлено обоснование сходимости ранее разработанных алгоритмов. Также в работе [12] для ИАУ со слабой диагональной особенностью были разработаны алгоритмы их численного решения k -шаговыми методами, основанными на явных методах типа Адамса и специальной экстраполяции. Следует также отметить статью [13], где была изучена однозначная разрешимость интегральных уравнений типа Абеля с вырождением в банаховых пространствах, доказанные там теоремы были применены к изучению начально-краевых задач для слабосингулярных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в механике сплошных сред.

Указанные выше результаты посвящены построению эффективных численных методов, а работ, направленных на исследование устойчивости разработанных алгоритмов для приближённого решения ИАУ типа Абеля, содержащих жёсткие компоненты, по-видимому, нет. Основная цель настоящей работы — восполнение этого пробела.

2. Постановка задачи

Рассмотрим интегро-алгебраическое уравнение типа Абеля

$$A(t)x(t) - \int_0^t (t-s)^{-a} K(t,s)x(s) ds = f(t), \quad a \in (0,1), \quad t \in [0,1], \quad (1)$$

здесь $A : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $K : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — заданные матрицы-функции, $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — искомая и заданная вектор-функции соответственно, символ $\mathbb{R}^{n \times n}$

обозначает вещественное линейное пространство матриц порядка n , $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — компакт точек $(t, s) \in [0, 1] \times [0, t]$. Для всех $t \in [0, 1]$ выполняются условия $A(t) \neq \mathbb{O}_n$, $\det A(t) = 0$, где $\mathbb{O}_n$ — нулевая матрица порядка n . Все входные данные рассматриваемой задачи предполагаются достаточно гладкими. Ядро $H(t, s) = (t - s)^{-a}K(t, s)$ интегрального уравнения (1) содержит интегрируемую особенность на линии $s = t$. Удачную терминологию для названия этой особенности ввели учёные М. Kolk и А. Pedas [14], назвав её *диагональной*. Под *классическим решением* ИАУ (1) будем понимать любую непрерывную на отрезке $[0, 1]$ вектор-функцию $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая обращает это уравнение в тождество.

Перед формулировкой теоремы о разрешимости ИАУ типа Абеля введём необходимое определение (см., например, работу [15]).

Определение 2.1. Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию ранг-степень на отрезке $[0; 1]$ (имеет индекс один и простую структуру), если выполняются следующие условия:

- 1) $\max_{t \in [0; 1]} \text{rank } A(t) = m$;
- 2) $\det (\lambda A(t) + B(t)) = a_0(t)\lambda^m + a_1(t)\lambda^{m-1} + \dots + a_m(t)$, где $a_0(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Справедлива следующая теорема (см. статью [8]).

Теорема. Пусть для задачи (1) выполнены требования:

- 1) $A(t) \neq \mathbb{O}_n$, $\det A(t) = 0$ при всех $t \in [0, 1]$;
- 2) $A(t) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^{n \times n})$; $K(t, s), \partial_t K(t, s) \in C(\Delta; \mathbb{R}^{n \times n})$;
- 3) $f(t) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$;
- 4) $\text{rank}(A(0)|f(0)) = \text{rank } A(0) = m < n$;
- 5) пучок $\lambda A(t) + K(t, t)$ удовлетворяет критерию ранг-степень,

тогда исходная система имеет единственное классическое решение.

Опишем условия теоремы. Условия 2 и 3 гарантируют необходимую гладкость входных данных. Условие 4 можно интерпретировать как теорему Кронекера–Капелли, обеспечивающую разрешимость системы в начальной точке $t = 0$. А условие 5 гарантирует отсутствие на $[0, 1]$ сингулярных точек, т. е. точек, через которые проходит не единственное решение или в которых решение может не существовать. Если $n = 1$, то уравнение (1) примет вид интегрального уравнения Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $x(t)$, тогда условия 1 и 5 теоремы будут означать, что $K(t, t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$, а условие 4 примет вид $f(0) = 0$. Последнее является условием разрешимости интегрального уравнения Вольтерра первого рода с диагональной особенностью в ядре [1, 16].

Ранее в работе [12] для численного решения ИАУ вида (1) были предложены многошаговые алгоритмы на основе явных квадратурных формул типа Адамса и метода интегрирования произведений. Представим краткое описание простейшего нольшагового метода для удобства читателей.

Для построения схемы численного решения выделим весовую функцию $p(t, s) = (t - s)^{-a}$ и применим метод интегрирования произведений [17]. Для нахождения $x_i \approx x(t_i)$ зададим на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad Nh = 1,$$

и введём обозначения $A_i = A(t_i)$, $K_{i,\ell} = K(t_i, t_\ell)$, $f_i = f(t_i)$. Рассмотрим в точке t_{i+1} интегральное слагаемое уравнения (1):

$$\int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{-a} K(t_{i+1}, s) x(s) ds.$$

Положим, что на каждом отрезке $[t_\ell, t_{\ell+1}]$ разбиения функцию $K(t_{i+1}, s)x(s)$ будем приближать кусочно-постоянной $K(t_{i+1}, s)x(s) \approx K_{i+1,\ell} x_\ell$, и в силу свойства аддитивности интеграла получим квадратурную формулу

$$\int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{-a} K(t_{i+1}, s) x(s) ds \approx \sum_{\ell=0}^i K_{i+1,\ell} x_\ell \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_{i+1} - s)^{-a} ds.$$

Далее вычислим интеграл от весовой функции точно и получим алгоритм

$$A_{i+1}x_{i+1} + \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} K_{i+1,\ell} x_\ell = f_{i+1}, \quad (2)$$

здесь $\omega_{i+1,\ell}$ — веса квадратурной формулы:

$$\omega_{i+1,\ell} = \frac{((i+1-\ell)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{((i-\ell)h)^{1-a}}{1-a}. \quad (3)$$

Рассмотрим первое слагаемое $A_{i+1}x_{i+1}$. Так как матрица $A(t)$ главной части уравнения (1) вырожденная, прямое применение схемы (2) в общем случае приведёт к проблеме решения вырожденной системы линейных алгебраических уравнений. Поэтому экстраполируем функцию $x = x(t)$ в точке $t = t_i$. Таким образом, простейший нольшаговый метод численного решения ИАУ со слабой диагональной особенностью имеет следующий вид:

$$A_{i+1}x_i + \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} K_{i+1,\ell} x_\ell = f_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4)$$

где $\omega_{i+1,\ell}$ определены по формуле (3).

В силу того, что каждый тип содержательной задачи предъявляет свои требования к приближённым алгоритмам, исследование свойств разрабатываемых алгоритмов является не менее значимой задачей, чем обоснование их сходимости. Далее проведём исследование численной схемы (4) на A - и $A(\alpha)$ -устойчивость.

3. Дробный аналог “жёсткой” задачи

Перед описанием основных результатов приведём вспомогательные сведения из теории устойчивости. Для исследования свойств численных методов решения “жёстких” обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) традиционно применяется тестовая задача — уравнение Далквиста [18]:

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

здесь $\lambda \ll 0$. Её единственным решением является быстро убывающая на $\mathbb{R}$ функция

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0. \quad (6)$$

Классические k -шаговые алгоритмы, применяемые к уравнению (5), имеют вид

$$\sum_{j=0}^k a_j x_{i+1-j} = z \sum_{j=0}^k b_j x_{i+1-j}, \quad z = \lambda h. \quad (7)$$

Важную роль при исследовании таких схем играет характеристический полином

$$\sum_{j=0}^k (a_j - z b_j) q^{k-j} = 0. \quad (8)$$

Говорят [19], что разностная схема (7) устойчива, если корни полинома (8) лежат в единичном круге и на границе нет кратных корней. Совокупность значений z , при которых корни характеристического полинома (8) лежат внутри единичного круга, называют *областью устойчивости* алгоритма (7).

Введём необходимые определения (см., например, [20]).

Определение 3.1. Численный метод называется A -устойчивым, если его область устойчивости включает всю полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, $z = \lambda h$.

Определение 3.2. Численный метод называется $A(\alpha)$ -устойчивым, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, если его область устойчивости включает бесконечный клин $|\arg(-\lambda)| < \alpha$.

Свойство устойчивости алгоритма (4) в данной статье предлагается исследовать на тестовой задаче Коши

$${}^{GC}D_{0+}^{1-a} x(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda < 0, \quad (9)$$

где $a \in (0, 1)$ и введено обозначение

$${}^{GC}D_{0+}^{1-a} x(t) = I_{0+}^a x'(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-s)^{a-1} x'(s) ds$$

производной Гerasимова–Капуто [21] порядка $1-a$. Здесь и всюду далее $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера. Поскольку стандартно предполагается, что $I_{0+}^0 x(t) = x(t)$, то в случае $a = 0$ из определения производной Гerasимова–Капуто имеет место равенство

$${}^{GC}D_{0+}^1 x(t) = x'(t).$$

Следовательно, при значении $a = 0$ задача (9) принимает вид (5) и имеет единственное решение (6). В случае $a \in (0, 1)$ задача Коши (9) имеет единственное решение вида

$$x(t) = E_{1-a,1}(\lambda t^{1-a}) x_0, \quad (10)$$

для выражения которого используется двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера, задаваемая абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте из $\mathbb{C}$ функциональным рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$

(см., например, монографию [1, стр. 33]).

Поскольку при всяком $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\Gamma(n) = (n-1)!$, тогда

$$E_{1,1}(\lambda t) = e^{\lambda t},$$

т. е. формула (10) согласуется со случаем $a = 0$.

Как известно из работы [22] (см. теорему 1 на стр. 408), функция вида (10) при всех $a \in (0, 1)$ и $\lambda < 0$ не имеет нулей на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому если $x_0 > 0$, то при всех $t \in (0, +\infty)$ справедливо $x(t) > 0$. Заметим, что при любых $a \in (0, 1)$ и $\lambda < 0$ функция

$$x'(t) = \lambda t^{-a} E_{1-a, 1-a}(\lambda t^{1-a}) x_0$$

также не имеет нулей на интервале $(0, +\infty)$ (см. [22]). Более того, очевидна асимптотическая формула

$$x'(t) \sim \frac{\lambda x_0}{\Gamma(1-a)} t^{-a}, \quad t \rightarrow +0,$$

из которой для $x_0 > 0$ справедливо, что $x'(t) \rightarrow -\infty$ при всяком $t \rightarrow +0$. Поэтому если $x_0 > 0$, то $x'(t) < 0$ при любом $t \in (0, +\infty)$, говоря иначе, функция (6) убывает на интервале $(0, +\infty)$. Из статьи [23, с. 12, теорема 1.2.1] можно извлечь асимптотическую формулу

$$x(t) \sim -\frac{x_0}{\lambda \Gamma(a)} t^{a-1}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

описывающую характер этого убывания. Отмеченные выше свойства решения (10) задачи Коши (9) устанавливают его принадлежность классу $C_{[0, +\infty)} \cap C_{(0, +\infty)}^\infty$, а также наличие у n -й производной решения особенности типа полюса дробного порядка $n + a - 1$ в точке $t = 0$, где $n \in \mathbb{N}$. Графики решения (10) изучаемой задачи Коши (9) при $\lambda = -15$, $x_0 = 1$ и значениях параметров $a = 0.75$, $a = 0.5$, $a = 0.25$, $a = 0$ приведены на рисунке 1.

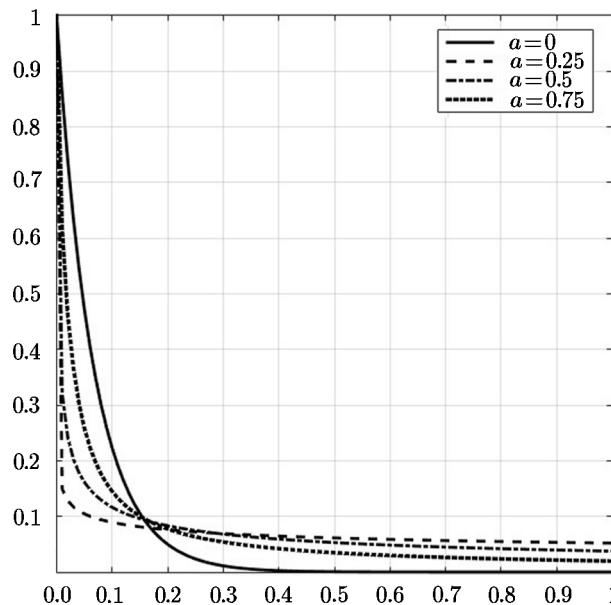


Рис. 1. Графики решения $x = x(t)$ задачи (9) при $x_0 = 1$ и $\lambda = -15$

4. Построение характеристических полиномов

Так как рассматриваемое ИАУ со слабой диагональной особенностью в ядре (1) содержит обобщённые интегральные уравнения Абеля как первого, так и второго рода, то исследовать свойства алгоритма (4) будем на модельных уравнениях вида

$$x(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} x(s) ds = 1, \quad a \in (0, 1), \quad (11)$$

$$\int_0^t \left(1 - \frac{\lambda(t-s)^{1-a}}{\Gamma(2-a)}\right) x(s) ds = t, \quad a \in (0, 1). \quad (12)$$

Покажем, что данные уравнения являются интегральными аналогами дифференциального уравнения (9). Подействуем на уравнение (9) линейным оператором Римана–Лиувилля I_{0+}^{1-a} дробного интегрирования порядка $1-a$, т. е.

$$I_{0+}^{1-a} I_{0+}^a x'(t) = \lambda I_{0+}^{1-a} x(t).$$

Далее воспользуемся полугрупповым свойством $I_{0+}^b I_{0+}^c x(t) = I_{0+}^{b+c} x(t)$, справедливым для всех $b, c > 0$, и получим уравнение

$$\int_0^t x'(s) ds = \frac{\lambda}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} x(s) ds,$$

откуда сразу следует уравнение (11) при $x(0) = 1$.

Алгоритм (4), применительно к уравнениям (11) и (12) соответственно, имеет вид

$$x_i - \frac{\lambda}{\Gamma(1-a)} \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} x_\ell = 1, \quad (13)$$

$$\sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} \left((t_{i+1} - t_\ell)^a - \frac{\lambda}{\Gamma(2-a)} (t_{i+1} - t_\ell) \right) x_\ell = t_{i+1}. \quad (14)$$

Для построения характеристических полиномов алгоритмов (13) и (14) воспользуемся разностными аналогами дифференцирования первого и второго порядков соответственно. Иными словами, для алгоритма (13) найдём разность $(i+1)$ -го и i -го уравнений, а для алгоритма (14) вычтем из $(i+1)$ -го уравнения удвоенное i -е уравнение, затем прибавим $(i-1)$ -е. Введем замену $j = i - \ell$ и обозначение

$$z = \frac{\lambda h^{1-a}}{1-a},$$

для краткости записи. Тогда для алгоритма (13) характеристический полином будет иметь следующую запись:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z}{\Gamma(1-a)}\right) q^{i+1} - \left(1 - 2\frac{z}{\Gamma(1-a)} + 2^{1-a}\frac{z}{\Gamma(1-a)}\right) q^i - \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{z}{\Gamma(1-a)} \left((j+2)^{1-a} - 2(j+1)^{1-a} + j^{1-a} \right) q^j = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

а характеристический полином для алгоритма (14) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{z}{\Gamma(1-a)}\right) q^{i+1} + \left(-2^a + \frac{z}{\Gamma(1-a)}(2^{2-a} - 4)\right) q^i + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left((j+2)^{1-a} - (j+1)^{1-a}\right) \left((j+2)^a - \frac{z}{\Gamma(1-a)}(j+2)\right) - \right. \\ & \quad \left. 2 \left((j+1)^{1-a} - j^{1-a}\right) \left((j+1)^a - \frac{z}{\Gamma(1-a)}(j+1)\right) + \right. \\ & \quad \left. \left(j^{1-a} - (j-1)^{1-a}\right) \left(j^a - \frac{z}{\Gamma(1-a)}j\right) \right] q^j = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что степень характеристических полиномов алгоритмов (13) и (14) численного решения простейшего интегрального уравнения со слабой диагональной особенностью зависит от шага интегрирования: при уменьшении шага h старшая степень полинома возрастает. Данный факт является отличительной особенностью полученных результатов от классических результатов для интегральных уравнений с гладким ядром [24]. Для локализации границ областей устойчивости стандартным образом положим $q = e^{i\phi}$, т. к. $|e^{i\phi}| = 1$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Области устойчивости для разностной схемы (13) при шагах $h = 0.05$, $h = 0.1$, $h = 0.2$ и различных значениях параметра a приведены на рис. 2–4 соответственно. Аналогично, области устойчивости для разностной схемы (14) приведены на рис. 5 и 6. Серым цветом обозначена область устойчивости.

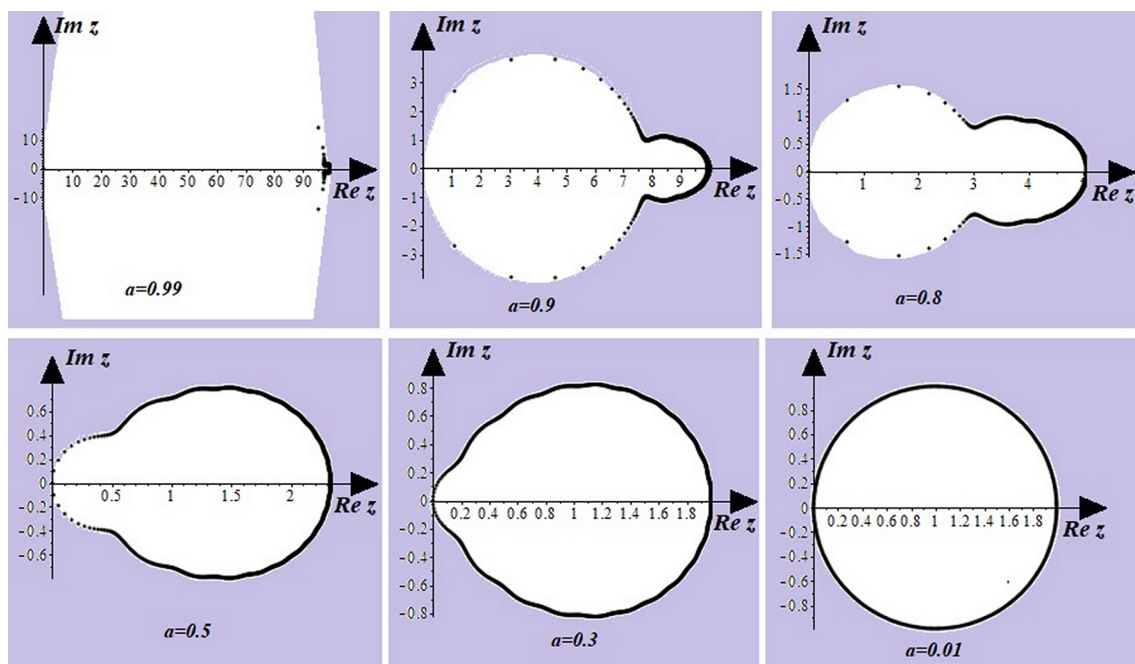
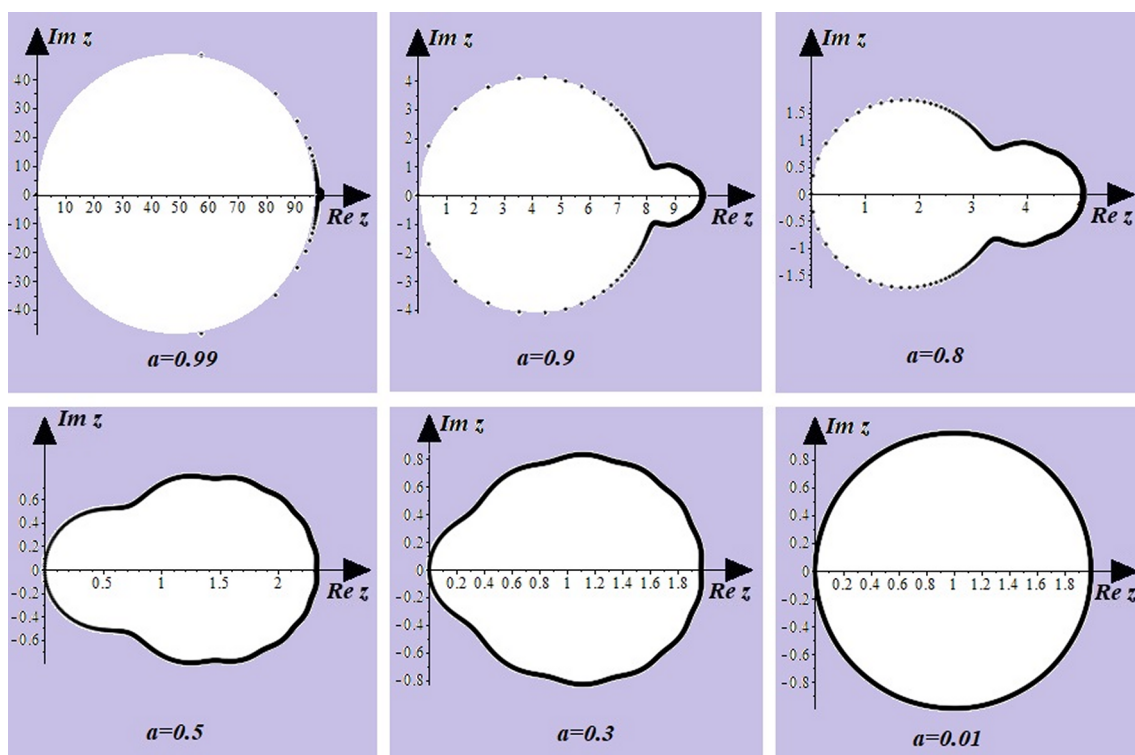
Отметим, что в случае $a = 0$ будет получен классический результат, т. к. соотношения будут давать следующий характеристический полином:

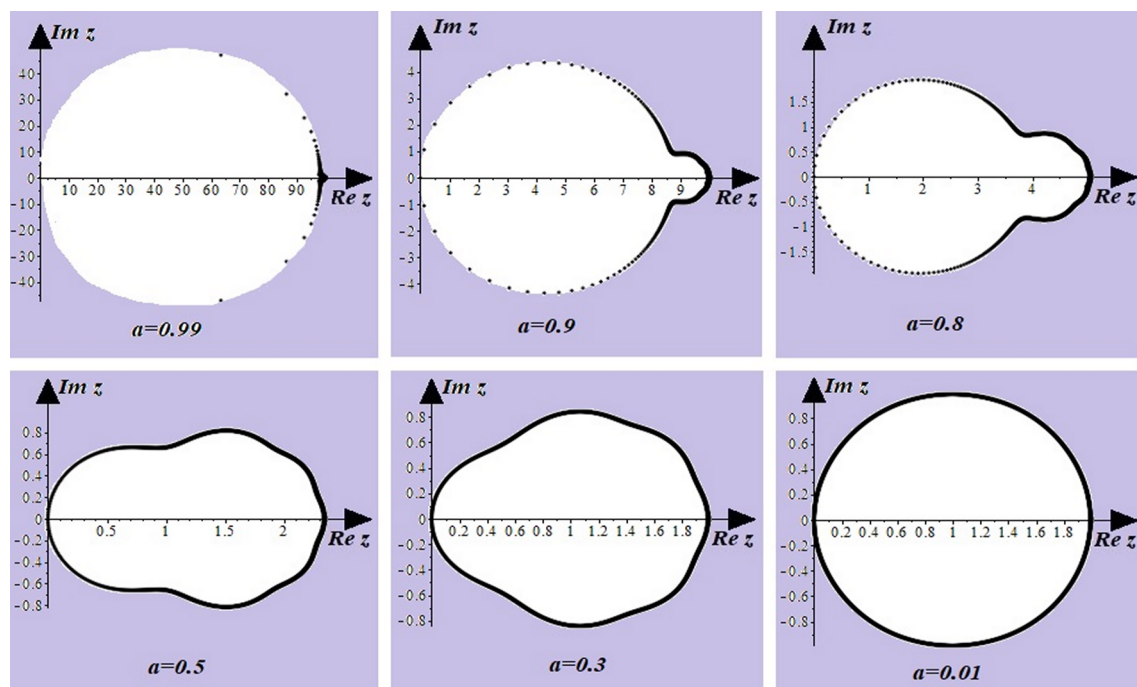
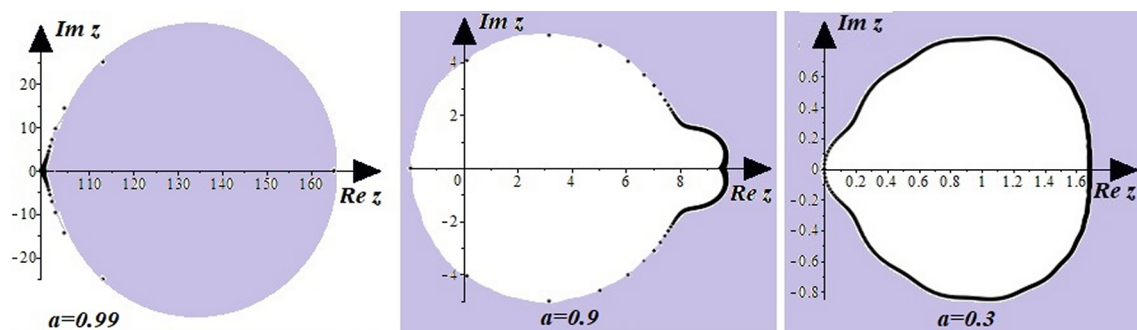
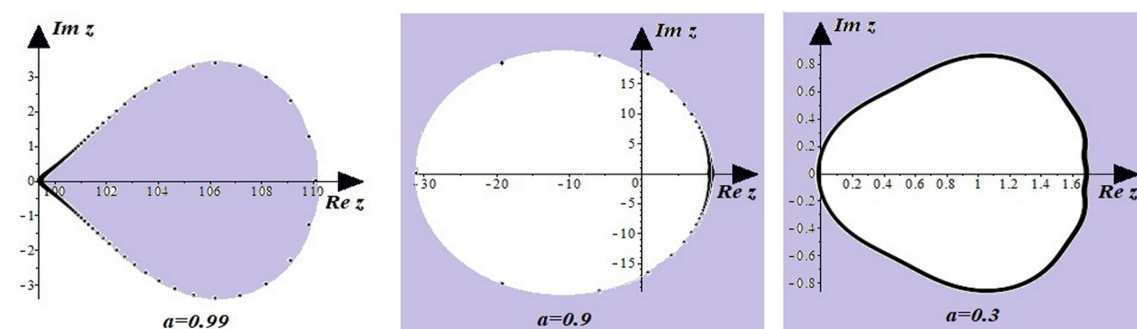
$$(1 - z)q - 1 = 0, \quad z = \lambda h.$$

Иначе говоря, областью устойчивости алгоритмов (13) и (14) будет являться часть плоскости, лежащая вне окружности с радиусом, равным единице, и центром в точке $O(1, 0)$.

Анализ областей устойчивости позволяет сделать вывод: численный алгоритм (4), применённый к обобщённому интегральному уравнению типа Абеля второго рода, при достаточно крупных шагах разбиения h , таких как 0.2 и 0.1, и для любого значения параметра $a \in (0, 1)$ является A -устойчивым (см. рис. 3, 4). А для обобщённого интегрального уравнения типа Абеля первого рода при значениях параметра a , достаточно близких к единице, области устойчивости алгоритма (4) становятся ограниченными (см. рис. 5, 6).

Отметим, что для уравнения (12) области устойчивости не содержат точку $O(0, 0)$. Этот эффект возникает в силу того, что для применения численного метода (4) к интегральному уравнению (12), не содержащему особенности в ядре, данное уравнение преобразуется в обобщённое интегральное уравнение Абеля первого рода со слабой диагональной особенностью и ядром $K(t, s) = (t - s)^a - \frac{\lambda}{\Gamma(2-a)}(t - s)$, которое на диагонали обращается в ноль. Точка $O(0, 0)$ соответствует случаю $\lambda = 0$, следовательно, преобразованное ядро из невырожденного редуцируется в “плохое”, т. е. вырожденное на диагонали, более того, в этом случае получим вырожденный матричный пучок. Вследствие всего выше сказанного к уравнению (12) выгоднее применять алгоритмы, разработанные в работе [24]. Отметим, что в таком случае характеристический полином этих алгоритмов примет вид (15), а значит, алгоритм будет являться A -устойчивым для малых и даже близких к единице значений параметров h и a .

Рис. 2. Области устойчивости алгоритма (13) при $h = 0.05$ Рис. 3. Области устойчивости алгоритма (13) при $h = 0.1$

Рис. 4. Области устойчивости алгоритма (13) при $h = 0.2$ Рис. 5. Области устойчивости алгоритма (14) при $h = 0.05$ Рис. 6. Области устойчивости алгоритма (14) при $h = 0.2$

5. Численные эксперименты

Приведём численные расчёты нескольких тестовых интегральных уравнений типа Абеля. Введём обозначения: err — погрешность вычислений по евклидовой норме, p — порядок точности метода, которые определяются формулами:

$$\text{err}_h = \max_{0 \leq \ell \leq N} \|x_\ell - x(t_\ell)\|, \quad p = \log_2 \frac{\text{err}_h}{\text{err}_{\frac{h}{2}}}.$$

Пример 5.1. Рассмотрим систему обобщённых интегральных уравнений Абеля второго рода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \frac{10000}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} e^{t+s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^{-t} - \frac{10000 t^{1-a}}{\Gamma(2-a)} e^t \\ t - \frac{10000 t^{2-a}}{\Gamma(3-a)} \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет точное решение $x(t) = (e^{-t}, t)^\top$. Результаты численных расчётов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты численных расчётов примера 5.1

h	$a = 0.01$		$a = 0.3$		$a = 0.8$		$a = 0.99$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
0.2	0.1005	1.001	0.1176	1	0.1667	1	0.198	1
0.1	0.0502	1.006	0.0588	1	0.0833	1.001	0.099	1
0.05	0.025	1	0.0294	1	0.0416	1	0.0495	1.003

Пример 5.2. Рассмотрим систему обобщённых интегральных уравнений Абеля первого рода, имеющую точное решение $x(t) = (t^2 + 1, e^{-t})^\top$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \frac{10^{10}}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -\frac{10^{10}}{\Gamma(1-a)} \left(\frac{t^{1-a}}{1-a} + \frac{2t^{3-a}}{(1-a)(2-a)(3-a)} \right) \\ -\frac{10^{10} t^{1-a}}{\Gamma(2-a)} \end{pmatrix}.$$

Результаты численных расчётов приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты численных расчётов примера 5.2

h	$a = 0.01$		$a = 0.3$		$a = 0.8$		$a = 0.99$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
0.2	0.2136	1.05	0.2304	1.08	0.3356	1.11	0.4333	1.07
0.1	0.1034	1.03	0.1089	1.05	0.1554	1.084	0.2063	1.037
0.05	0.0508	1.01	0.0526	1.03	0.0733	1.07	0.1005	1.022

Пример 5.3. Рассмотрим ИАУ

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \frac{100}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{s+t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t e^{-t} - \frac{100}{\Gamma(2-a)} t^{1-a} \\ -\frac{100}{\Gamma(2-a)} t^{1-a} e^t \end{pmatrix}$$

с точным решением $x(t) = (e^{-t}, e^{-t})^\top$. Результаты численных расчётов приведены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты численных расчётов примера 5.3

h	$a = 0.01$		$a = 0.3$		$a = 0.8$		$a = 0.99$	
	err	p	err	p	err	p	err	p
0.2	0.00179	0.94	0.00102	1.128	0.000562	1.176	0.000492	1.187
0.1	0.00093	0.98	0.000467	1.042	0.000248	1.084	0.000216	1.107
0.05	0.00047	0.99	0.000227	0.994	0.000117	1.04	0.0001002	1.053

Анализ численных результатов для примеров 5.1, 5.2 и 5.3 показал, что исследуемые нольшаговые методы (4) численного решения ИАУ типа Абеля имеют первый порядок точности в области своей устойчивости.

Пример 5.4. Рассмотрим случай, когда при заданных параметрах a и λ схема (4) является неустойчивой. Расчёты приведём на тестовом ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ e^{s+t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^{-t} - \frac{t^{1-a}}{\Gamma(2-a)} \frac{t^{1-a}}{1-a} \\ -\frac{e^t + 1}{\Gamma(2-a)} t^{1-a} \end{pmatrix}.$$

Точное решение данной системы имеет вид $x(t) = (e^{-t}, 1)^\top$. Результаты численных расчётов приведены в табл. 4.

Таблица 4. Результаты численных расчётов примера 5.4

h	$a = 0.01$		$a = 0.3$		$a = 0.99$	
	err(x_1)	err(x_2)	err(x_1)	err(x_2)	err(x_1)	err(x_2)
0.2	1.8802	19.2512	94.3352	856.4195	17.5137	21.3913
0.1	0.5243	5.2444	2.4695	21.6836	5.5371	6.1195
0.05	0.2107	2.0827	0.7202	6.2297	2.0342	2.1385
$h^* = 0.01$	0.0362	0.3541	0.1024	0.8773	68.6476	75.1127

Как показывают результаты численных экспериментов, при уменьшении шага h погрешность метода err_h стремительно уменьшается, несмотря на то, что алгоритм (4) является неустойчивым для ИАУ из примера 5.4. Из последнего можно сделать вывод о том, что при более мелком шаге разбиения h численный метод (4) будет являться устойчивым. В данном случае, начиная с $h^* = 0.01$, алгоритм (4) является устойчивым для значений $a = 0.01$ и $a = 0.3$. А при $a = 0.99$ в начальных точках выявлено наличие пограничного слоя ошибок. Подробнее о данном явлении можно прочитать в [25, стр. 94].

6. Заключение

В работе исследуются свойства неявного численного алгоритма для решения интегро-алгебраических уравнений типа Абеля, содержащих “жёсткие” компоненты в решении. Традиционно при исследовании свойств численных методов, применяемых для решения “жёстких” задач, используется модельное тестовое уравнение Далквиста. Для “жёстких” слабо сингулярных уравнений общепринятых модельных уравнений нет, поэтому вопрос их построения является актуальным.

Авторами предложено свойство A -устойчивости исследовать на аналоге уравнения Далквиста с дробной производной Герасимова–Капуто порядка $1 - a$, где $a \in (0, 1)$. На основе интегральных аналогов уравнения Далквиста с дробной производной Герасимова–Капуто порядка $1 - a$ проведено исследование свойств неявного численного алгоритма для решения ИАУ типа Абеля, содержащего “жёсткие” компоненты в решении, с использованием классического подхода при построении характеристических полиномов. Получено, что исследуемый в работе численный метод, применённый к обобщённому интегральному уравнению типа Абеля второго рода, при достаточно крупных шагах разбиения h и для любого значения параметра $a \in (0, 1)$ является A -устойчивым. А применительно к обобщённому интегральному уравнению типа Абеля первого рода метод не является ни A -, ни $A(\alpha)$ -устойчивым, и при значениях a , близких к единице, область устойчивости становится ограниченной.

Дальнейшее направление работы авторов связано с разработкой альтернативного подхода к исследованию A -устойчивости численных алгоритмов для ИАУ типа Абеля на основе конечных разностей дробного порядка Грюнвальда–Летникова, а также с исследованием свойств ранее предложенных многошаговых методов для задач, содержащих осцилляцию.

Литература

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
2. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of Integral Equations. — Boca Raton: CRC Press, 1998.
3. **Tenreiro Machado J.A., Galhano A.M., Trujillo J.J.** Science metrics on fractional calculus development since 1966 // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 16, № 2. — P. 479–500.
4. **Gorenflo R., Vessella S.** Abel Integral Equations: Analysis and Application. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
5. **Brunner H.** Volterra Integral Equations: an Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
6. **Lubich Ch.** A stability analysis of convolution quadratures for Abel–Volterra integral equations // IMA J. of Numerical Analysis. — 1986. — Vol. 6. — P. 87–101.
7. **Garrappa R.** On linear stability of predictor–corrector algorithms for fractional differential equations // Inter. J. of Computer Mathematics. — 2010. — Vol. 87, iss. 10. — P. 2281–2290.
8. **Brunner H., Bulatov M.V.** On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Proc. of the 11-th Baikal Intern. School Seminar “Optimization Methods and their Applications”. — Irkutsk: ESI SB RAS, 1998. — P. 64–67.

9. **Bulatov M.V., Lima P.M., Weinmüller E.B.** Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations // *Central European J. of Mathematics*. — 2014. — Vol. 12, № 2. — P. 308–321.
10. **Pishbin S., Ghoreishi F., Hadizadeh M.** The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: the numerical treatments // *J. Comput. Appl. Math.* — 2013. — Vol. 245, № 1. — P. 121–132.
11. **Sajjadi S.A., Pishdin S.** Convergence analysis of the product integration method for solving the fourth kind integral equations with weakly singular kernels // *Numerical Algorithms*. — 2021. — Vol. 86. — P. 25–54.
12. **Булатов М.В., Будникова О.С.** Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k -шаговыми методами // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. — 2015. — Т. 13. — С. 3–15.
13. **Orlov S., Grunwald L., Shemetova V.** Initial boundary value problems for Sobolev type equations of hereditary continuum mechanics // *J. of Physics: Conference Series*. — 2019. — DOI: 10.1088/1742-6596/1145/1/012054.
14. **Kolk M., Pedas A.** Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernels which may have a boundary singularity // *Mathematical Modelling and Analysis*. — 2009. — Vol. 14, № 1. — P. 79–89.
15. **Чистяков В.Ф.** О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // *Функции Ляпунова и их применения*. — Новосибирск: Наука, 1987.
16. **Brunner H.** Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
17. **Weiss R.A., Anderssen R.S.** Product integration methods for a class of singular first kind Volterra equations // *Numer. Math.* — 1972. — Vol. 18, № 5. — P. 442–456.
18. **Новиков Е.А.** Явные методы для жёстких систем. — Новосибирск: Наука, 1997.
19. **Хайрер Э., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. Перевод: Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff Differential-Algebraic Problems*. 2nd Edition. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.
20. **Холл Дж., Уатт Дж.** Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979. Перевод: Hall G., Watt J.M. *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Oxford University. — Oxford: Press, 1976.
21. **Учайкин В.В.** Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2019. — Т. 27, № 1. — С. 5–40.
22. **Седлецкий А.М.** Неасимптотические свойства корней функции типа Миттаг–Леффлера // *Математические заметки*. — 2004. — Т. 75, № 3. — С. 405–420. Перевод: Sedletskii A.M. *Nonasymptotic properties of roots of a Mittag-Leffler type function* // *Mathematical Notes*. — 2004. — Vol. 75. — P. 372–386. — <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000023316.90489.fe>.
23. **Попов А.Ю., Седлецкий А.М.** Распределение корней функций Миттаг–Леффлера // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2011. — Т. 40. — С. 3–171. Перевод: Popov A.Y., Sedletskii A.M. *Distribution of roots of Mittag-Leffler functions* // *J. Math. Sci.* — 2013. — Vol. 190. — P. 209–409. — <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3>.
24. **Булатов М.В., Будникова О.С.** Исследование многошаговых методов для решения интегроалгебраических уравнений: построение областей устойчивости // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*. — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1448–1459. Перевод: Bulatov M.V., Budnikova O.S. *An analysis of multistep methods for solving integral-algebraic equations: Construction of stability domains* // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2013. — Vol. 53. — P. 1260–1271. — <https://doi.org/10.1134/S0965542513070075>.

25. **Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.** Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. — Новосибирск: Наука, 2006.

Поступила в редакцию 5 апреля 2022 г.

После исправления 1 июля 2022 г.

Принята к печати 23 ноября 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya. — Minsk: Nauka i tekhnika, 1987.
2. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of Integral Equations. — Boca Raton: CRC Press, 1998.
3. **Tenreiro Machado J.A., Galhano A.M., Trujillo J.J.** Science metrics on fractional calculus development since 1966 // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 16, № 2. — P. 479–500.
4. **Gorenflo R., Vessella S.** Abel Integral Equations: Analysis and Application. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
5. **Brunner H.** Volterra Integral Equations: an Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
6. **Lubich Ch.** A stability analysis of convolution quadratures for Abel–Volterra integral equations // IMA J. of Numerical Analysis. — 1986. — Vol. 6. — P. 87–101.
7. **Garrappa R.** On linear stability of predictor–corrector algorithms for fractional differential equations // Inter. J. of Computer Mathematics. — 2010. — Vol. 87, iss. 10. — P. 2281–2290.
8. **Brunner H., Bulatov M.V.** On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Proc. of the 11-th Baikal Intern. School Seminar “Optimization Methods and their Applications”. — Irkutsk: ESI SB RAS, 1998. — P. 64–67.
9. **Bulatov M.V., Lima P.M., Weinmüller E.B.** Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations // Central European J. of Mathematics. — 2014. — Vol. 12, № 2. — P. 308–321.
10. **Pishbin S., Ghoreishi F., Hadizadeh M.** The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: the numerical treatments // J. Comput. Appl. Math. — 2013. — Vol. 245, № 1. — P. 121–132.
11. **Sajjadi S.A., Pishdin S.** Convergence analysis of the product integration method for solving the fourth kind integral equations with weakly singular kernels // Numerical Algorithms. — 2021. — Vol. 86. — P. 25–54.
12. **Bulatov M.V., Budnikova O.S.** Chislennoe reshenie integro-algebraicheskikh uravnenii so slaboi osobennost’yu v yadre k -shagovymi metodami // Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. — 2015. — T. 13. — S. 3–15.
13. **Orlov S., Grunwald L., Shemetova V.** Initial boundary value problems for Sobolev type equations of hereditary continuum mechanics // J. of Physics: Conference Series. — 2019. — DOI: 10.1088/1742-6596/1145/1/012054.
14. **Kolk M., Pedas A.** Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernels which may have a boundary singularity // Mathematical Modelling and Analysis. — 2009. — Vol. 14, № 1. — P. 79–89.
15. **Chistyakov V.F.** O singulyarnykh sistemakh obyknovennykh differentsial’nykh uravnenii i ikh integral’nykh analogakh // Funkcii Lyapunova i ikh primeneniya. — Novosibirsk: Nauka, 1987.

16. **Brunner H.** Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
17. **Weiss R.A., Anderssen R.S.** Product integration methods for a class of singular first kind Volterra equations // Numer. Math. — 1972. — Vol. 18, № 5. — P. 442–456.
18. **Novikov E.A.** Yavnye metody dlya zhestkikh sistem. — Novosibirsk: Nauka, 1997.
19. **Khairer E., Vanner G.** Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi. — M.: Mir, 1999. Perevod: Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff Differential-Algebraic Problems. 2nd Edition. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.
20. **Kholl Dzh., Uatt Dzh.** Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. — M.: Mir, 1979. Perevod: Hall G., Watt J.M. Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Oxford University. — Oxford: Press, 1976.
21. **Uchaikin V.V.** Drobno-differentsial'nye modeli v gidromekhanike // Izv. vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika. — 2019. — T. 27, № 1. — S. 5–40.
22. **Sedleckii A.M.** Neasimptoticheskie svoystva kornei funktsii tipa Mittag-Lefflera // Matematicheskie zametki. — 2004. — T. 75, № 3. — S. 405–420. Perevod: Sedletskii A.M. Nonasymptotic properties of roots of a Mittag-Leffler type function // Mathematical Notes. — 2004. — Vol. 75. — P. 372–386. — <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000023316.90489.fe>.
23. **Popov A.Yu., Sedleckii A.M.** Raspredelenie kornei funktsii Mittag-Lefflera // Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya. — 2011. — T. 40. — S. 3–171. Perevod: Popov A.Y., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 190. — P. 209–409. — <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3>.
24. **Bulatov M.V., Budnikova O.S.** Issledovanie mnogoshagovykh metodov dlya resheniya integral-algebraicheskikh uravnenii: postroyeniye oblastey ustoychivosti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2013. — T. 53, № 9. — S. 1448–1459. Perevod: Bulatov M.V., Budnikova O.S. An analysis of multistep methods for solving integral-algebraic equations: Construction of stability domains // Comput. Math. and Math. Phys. — 2013. — Vol. 53. — P. 1260–1271. — <https://doi.org/10.1134/S0965542513070075>.
25. **Boyarincev Yu.E., Orlova I.V.** Puchki matric i algebro-differentsial'nye sistemy. — Novosibirsk: Nauka, 2006.