

УДК 517.988.68

Численное решение трехмерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения с интегральными данными в цилиндрической области*

А.Б. Бакушинский¹, А.С. Леонов²

¹Институт системного анализа. Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Вавилова, 44, корп. 2, Москва, 119333

²Национальный исследовательский ядерный университет. Московский инженерно-физический институт, Каширское шоссе, 31, Москва, 115409

E-mails: bakush@isa.ru (Бакушинский А.Б.), asleonov@mephi.ru (Леонов А.С.)

Бакушинский А.Б., Леонов А.С. Численное решение трехмерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения с интегральными данными в цилиндрической области // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 4. — С. 381–397.

Рассматривается трехмерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения (с потерями) в цилиндрической области. Данными для ее решения являются интегралы по времени (типа моментов) от измеряемого в цилиндрическом слое волнового поля. Предлагается экономичный алгоритм решения такой трехмерной задачи, основанный на быстром преобразовании Фурье. Алгоритм позволяет получать решение на сетках размера $512 \times 512 \times 512$ за время порядка 1.4 часа на персональном компьютере средней производительности без распараллеливания вычислений. Приведены результаты численных экспериментов решения соответствующих модельных обратных задач.

DOI: 10.15372/SJNM20190401

Ключевые слова: *трехмерное волновое уравнение, обратная коэффициентная задача, регуляризирующий алгоритм, быстрое преобразование Фурье.*

Bakushinsky A.B., Leonov A.S. Numerical solution to a three-dimensional coefficient inverse problem for the wave equation with integral data in a cylindrical domain // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 4. — P. 381–397.

A three-dimensional coefficient inverse problem for the wave equation (with losses) in a cylindrical domain is under consideration. The data for its solution are special time integrals of the wave field measured in a cylindrical layer. We present and substantiate an efficient algorithm for solving such a three-dimensional problem based on the fast Fourier transform. The algorithm proposed makes possible to obtain a solution on grids of $512 \times 512 \times 512$ size in a time of about 1.4 hours on a typical PC without parallelizing the calculations. The results of the numerical experiments for solving the corresponding model inverse problems are presented.

Keywords: *three-dimensional wave equation, wave field, inverse coefficient problem, regularizing algorithm, fast Fourier transform.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00039) и Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (проект № 02.а03.21.0005 от 27.08.2013).

1. Введение

В этой работе предлагается эффективный численный метод решения обратной коэффициентной задачи для скалярного волнового уравнения с учетом поглощения (потерь) по специальным интегральным данным в области $G \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂G .

Прямая задача задается соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2(x)}u_{tt} + \sigma(x)u_t = \Delta u - \phi(t)g(x), & x = (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad l[u] |_{\partial G} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} + k(x)u \right)_{\partial G} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $u(x, t)$ есть неизвестное волновое поле. Остальные функции: $c(x) > 0$ — локальная скорость распространения колебаний, $\sigma(x) > 0$ — коэффициент, определяющий затухание колебаний, функции источника колебаний $g(x)$, $\phi(t)$ и коэффициент в граничном условии $k(x) > 0$ считаются известными. Задача (1.1) хотя и является достаточно идеализированной, но адекватно описывает некоторые процессы распространения акустических волн в неоднородных средах.

Обратная коэффициентная задача, рассматриваемая ниже, в общей форме формулируется так: зная функции $g(x)$, $\phi(t)$, $\sigma(x)$, $k(x)$ для $x \in G$, $t > 0$, а также волновое поле $u(x, t)$ в некоторой области $Y \subset G$, найти коэффициент $c(x)$ в области $X \subset G$, считая, что в $G \setminus X$ этот коэффициент равен известной постоянной $c_0 > 0$. При этом предполагается, что $X \cap Y = \emptyset$. Детализированная постановка с указанием используемых функциональных пространств будет дана ниже.

Подобная обратная задача изучалась ранее в ряде работ с теоретической и вычислительной точки зрения (см., например, [1–11] и др.). Мы не ставим своей задачей подробно описать полученные ранее в этой области результаты, а выделим, на наш взгляд, наиболее близкие к содержанию этой статьи. Это, прежде всего, работы [6, 7], где предложен оригинальный метод решения похожей обратной задачи и получены впечатляющие результаты обработки реальных данных. В монографиях [8, 9] показано, что для решения указанной обратной задачи можно использовать изучаемые там универсальные итерационные алгоритмы. В статьях [10, 11] для решения обратной задачи использованы градиентные методы и суперкомпьютерные технологии. Во всех упомянутых подходах в качестве данных используется именно волновое поле $u(x, t)$, регистрируемое в области Y . Все эти подходы требуют значительных вычислительных затрат и больших вычислительных ресурсов.

Имеется, однако, альтернативная постановка рассматриваемой обратной задачи. В ней в качестве данных используются интегралы по времени (типа моментов) от регистрируемого в Y волнового поля. Тогда можно получить линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода для некоторой функции неизвестной величины $c(x)$ с правой частью, включающей упомянутые интегралы. Постановки обратных задач такого рода рассматривались в работах [12, 13] в случае $G = \mathbb{R}^3$ при $\sigma(x) = 0$. Если в эксперименте можно регистрировать не само рассеянное волновое поле, а именно упомянутые интегралы от него, то обратная коэффициентная задача фактически становится линейной. Кроме того, накопление информации о рассеянном поле в виде таких интегралов позволяет “сжимать” данные для решения обратной задачи, хранение которых требует для четырехмерной величины $u(x, t)$ значительных ресурсов. Этот подход (для специального случая регистрации интегральных данных в плоском слое и при $\sigma(x) = 0$) был доведен в недавней работе [14] до эффективного численного алгоритма, который позволяет решать обратную задачу с размерностями сеток по x порядка $512 \times 512 \times 128$

за время порядка 15–20 мин на персональном компьютере (ПК) средней производительности даже без распараллеливания вычислений.

В данной работе мы предлагаем близкий, но не тождественный, подход для решения аналогичной обратной задачи при $\sigma(x) > 0$ в цилиндрической области $G \subset \mathbb{R}^3$. Уравнения из работы [14] не применимы для решения обратной задачи в этом случае. В этой связи мы получаем новые линейные интегральные уравнения Фредгольма первого рода для ее решения с использованием интегральных данных в цилиндрическом слое. Эти уравнения по форме напоминают уравнения из [14], однако имеют совершенно другие правые части.

Далее, мы предлагаем новый численный алгоритм их решения, существенно отличающийся от предложенного в [14] для обратной задачи в $G = \mathbb{R}^3$. Алгоритм из [14] был основан на сведении основного уравнения с помощью двумерного преобразования Фурье ядра и правой части к набору одномерных интегральных уравнений первого рода, которые затем решались с использованием регуляризации. В данной работе в алгоритме с помощью последовательного применения одномерного преобразования Фурье и разложения в ряды Фурье ядра и правой части нового уравнения получаются другие по форме одномерные интегральные уравнения. Они также решаются с использованием методов регуляризации. Общей особенностью нового алгоритма и алгоритма из [14] является использование быстрого преобразования Фурье (БПФ). Однако в предлагаемом алгоритме применяется одномерное БПФ, в то время как в [14] использовалось двумерное БПФ.

Отметим также, что обоснование нового алгоритма существенно отличается от приведенного в [14].

Мы приводим результаты численных экспериментов по применению этого алгоритма для решения типичных трехмерных модельных задач на ПК средней производительности. При этом мы специально не используем распараллеливание алгоритма, хотя он допускает эту возможность. Этим мы иллюстрируем возможность достаточно быстрого решения обратной задачи даже на одноядерных компьютерах.

2. Интегральное уравнение для нахождения скорости

Полагая, как и ранее, что $X, Y \subset G$, $X \cap Y = \emptyset$, дополнительно предположим, что $\partial G \subset Y$. Будем считать, что выполнены условия:

- 1) решение задачи (1.1) имеет по меньшей мере следующую гладкость: $u(x, t) \in C^{2,2}(G \times [0, \infty))$;
- 2) при любом $x \in G$ сходятся интегралы

$$V_0(x) = \int_0^\infty u(x, t) dt, \quad V_1(x) = \int_0^\infty tu(x, t) dt, \quad V_2(x) = \int_0^\infty t^2u(x, t) dt;$$

- 3) при каждом $x \in G$ справедливы формулы

$$\int_0^\infty \mathbf{D} [u(x, t)] dt = \mathbf{D} \left[\int_0^\infty u(x, t) dt \right], \quad \int_0^\infty t \mathbf{D} [u(x, t)] dt = \mathbf{D} \left[\int_0^\infty tu(x, t) dt \right], \\ \int_0^\infty t^2 \mathbf{D} [u(x, t)] dt = \mathbf{D} \left[\int_0^\infty t^2u(x, t) dt \right],$$

где \mathbf{D} — дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, 3$, и оператор Δ ;

- 4) $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 u(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 u_t(x, t) = 0 \quad \forall x \in G$;
- 5) функция $\xi(x) = \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(x)}$ непрерывна в G и финитна с компактным носителем, лежащим в X ; функция $g(x) \in C^1(G)$ положительна и финитна с компактным носителем $D \subset G$; $\phi(t) \in C[0, +\infty)$ и сходятся интегралы $A_0 = \int_0^\infty \phi(t) dt$, $A_1 = \int_0^\infty t\phi(t) dt$, $A_2 = \int_0^\infty t^2\phi(t) dt$, причем $A_0 \neq 0$;
- 6) $\sigma(x) \in C^1(\bar{G})$, $k(x) \in C(\partial G)$, $k(x) > 0$ на ∂G .

Условия 1)–5) близки к использованным в работе [14], где обсуждается их реалистичность. Эти условия выполняются, например, в случае $c(x) = c_0$ для многих функций источника, удовлетворяющих условиям 5). В частности, функция $\phi(t)$ может быть финитна или экспоненциально убывать. Тогда условия 1), 2) означают достаточно быстрое “затухание” (в фиксированной точке пространства) волнового поля, созданного, например, финитными по пространству и времени источниками. Тем самым эти условия неявно накладывают ограничения на величины $c(x)$, $g(x)$, $\phi(t)$.

Детальный анализ условий 1)–6) выходит за рамки данной работы. В частности, мы не будем анализировать вопрос о зависимости условий 1)–6), хотя, например, условие 4) может вытекать из 1), 2), а условие 1) для своей реализации требует, вообще говоря, большей гладкости коэффициентов уравнения (1.1), чем предполагается в 5), 6). Мы, как и в [14], просто предполагаем выполнение этих условий, имея в виду, что они выполняются для простейших задач типа (1.1).

Условия 1)–6) используются при выводе основного интегрального уравнения для решения обратной задачи, который приведен в приложении. Там, в частности, показано, что

$$\Delta V_0(x) = A_0 g(x), \quad l[V_0(x)]|_{\partial G} = 0; \quad \Delta V_1(x) = -\sigma(x)V_0(x) + A_1 g(x), \quad l[V_1(x)]|_{\partial G} = 0.$$

Эти краевые задачи определяют единственные классические решения уравнений Пуассона $V_0(x)$ и $V_1(x)$, которые можно вычислить. Если ввести функцию $\zeta(x) = \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(x)}\right) \times V_0(x)$, связанную с неизвестной функцией $c(x)$ и вычисленной функцией $V_0(x)$, то, как показано в приложении, она удовлетворяет уравнению

$$\int_X \frac{\zeta(x') dx'}{|x - x'|} = W(x) - U(x), \quad x \in Y. \quad (2.1)$$

Здесь функция $W(x)$ вычисляется по данным $\sigma(x)$, $g(x)$ и по найденным функциям $V_0(x)$, $V_1(x)$ по формуле

$$W(x) = \int_G \left(\frac{V_0(x')}{c_0^2} - \frac{1}{2} \sigma(x') V_1(x') + \frac{A_2}{2} g(x') \right) \frac{dx'}{|x - x'|}.$$

Функция $U(x)$ имеет вид:

$$U(x) = -2\pi V_2(x) - \frac{1}{2} \int_{\partial G} V_2(x') \left(\frac{k(x')}{|x - x'|} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x - x'|} \right) \right) dx'.$$

Ее также можно вычислить, если по волновому полю $u(x, t)$ в области Y найдена функция $V_2(x) = \int_0^\infty t^2 u(x, t) dt$. Тогда (2.1) есть интегральное уравнение для неизвестной $\zeta(x)$ с вычисляемой правой частью.

Однако возможен и другой взгляд на уравнение (2.1), связанный с экспериментальным получением данных. Из (2.1) ясно, что при отсутствующих рассеивателях в области X , т.е. при $\zeta(x) = 0$, функция $W(x)$ выражается через соответствующую этому случаю величину $V_2^{(0)}(x)$ следующим образом:

$$W(x) = U^{(0)}(x), \quad U^{(0)}(x) = -2\pi V_2^{(0)}(x) - \frac{1}{2} \int_{\partial G} V_2^{(0)}(x') \left(\frac{k(x')}{|x-x'|} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-x'|} \right) \right) dx'.$$

Поэтому если эксперимент позволяет измерять волновое поле в области Y до и после помещения в нее рассеивающего образца, то величины $V_2^{(0)}(x)$, $V_2(x)$, а значит, и $U^{(0)}(x)$, $U(x)$, вычислимы, и уравнение (2.1) для $\zeta(x)$ приобретает вид

$$\int_X \frac{\zeta(x') dx'}{|x-x'|} = U^{(0)}(x) - U(x), \quad x \in Y. \tag{2.2}$$

Кроме уравнения (2.2), можно аналогичным образом получить другое уравнение

$$\int_X \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{|x-x'|} \right) \zeta(x') dx' = \frac{\partial U^{(0)}(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial U(x)}{\partial x_3}, \quad x \in Y, \tag{2.3}$$

которое более удобно для решения при используемой ниже схеме регистрации данных, чем (2.2).

В дальнейшем мы будем предполагать, что в результате измерений и предварительных вычислений нам известна функция $u(x) = \frac{\partial U^{(0)}(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial U(x)}{\partial x_3}$, $x \in Y$, и мы решаем интегральное уравнение (2.3) в форме

$$\int_X K(x-x') \zeta(x') dx' = u(x), \quad x \in Y; \quad K(x) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{|x|} \right) = -\frac{x_3}{|x|^3}. \tag{2.4}$$

Из предположений о функции ζ , из вида функций K , u и из условия $Y \cap X = \emptyset$ следуют включения $\zeta \in L_2(X)$, $u \in L_2(Y)$, $K(x-x') \in L_2(Y \times X)$.

Будем для краткости записывать уравнение (2.4) в операторной форме $A\zeta = u$ с линейным и ограниченным интегральным оператором A , действующим из $L_2(X)$ в $L_2(Y)$. Известно, что уравнения вида (2.2)–(2.4) могут иметь не единственное решение в рассматриваемом классе функций $\zeta(x)$. Это означает, что ядро $N(A)$ оператора A содержит нетривиальные элементы $\zeta = \zeta_0(x)$: $A\zeta_0 = 0$. При этом любое решение операторного уравнения $A\zeta = u$ допускает ортогональное разложение в сумму нормального решения (решения с минимальной нормой) и части решения, принадлежащей ядру оператора A . Эта часть решения не наблюдаема в том смысле, что ее изменение не влечет изменение правой части уравнения. Мы не ставим себе задачу нахождения таких решений. Поэтому, как и в работе [14], сделаем следующее

Предположение E. Мы будем предполагать, что искомое решение $\zeta = \bar{\zeta}(x)$ уравнения (2.4) удовлетворяет условию $(\bar{\zeta}, \zeta_0)_{L_2(X)} = 0 \quad \forall \zeta_0 \in N(A)$.

Это соответствует нашему желанию по возможности освободиться в искомом решении от не контролируемых правой частью уравнения артефактов $\zeta_0(x)$, создающих нулевую наблюдаемую функцию $u(x)$. Таким образом, мы будем искать единственное нормальное решение $\zeta = \bar{\zeta}(x)$ линейного операторного уравнения $A\zeta = u$ в пространстве $L_2(X)$, совпадающее в силу предположения E с искомым решением.

3. Схема регистрации данных обратной задачи в цилиндрической области и специализированная форма основного уравнения

Ниже примем для координат точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначения x, y, z . На рисунке 1 представлена схема расположения цилиндрических областей: области наблюдения

$Y = \{r_0 \leq r \leq b\} \times \mathbb{R}_z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и области решения $X = \{0 \leq r \leq a\} \times \mathbb{R}_z$. Там же условно показано и положение источников. Считаем цилиндры бесконечными по переменной z : $z \in (-\infty, +\infty)$, имея в виду финитность искомой функции ζ по этой переменной. В дальнейшем будем обозначать как X_{xy} , Y_{xy} сечения цилиндрических областей X , Y плоскостью, перпендикулярной оси Oz .

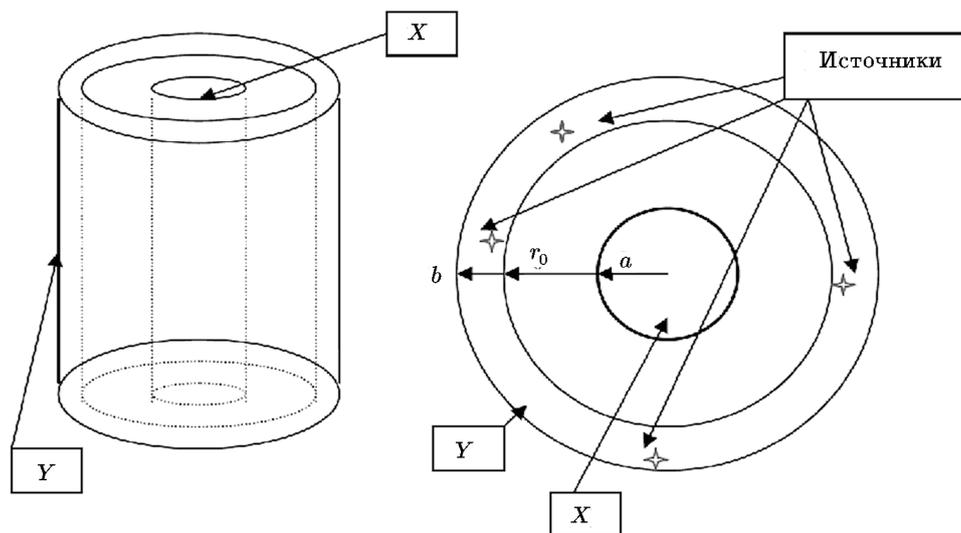


Рис. 1. Геометрическая схема регистрации данных обратной задачи: X — область рассеивателей волнового поля, Y — область регистрации данных $u(x)$, звездочки — условные положения источников

Введем преобразования Фурье функций K , ζ , u как элементов пространства L_2 по переменной z :

$$\tilde{K}(x - x', y - y', \omega) = F_z [K(x - x', y - y', z)] (\omega), \quad \tilde{\zeta}(x', y', \omega) = F_z [\zeta(x', y', z')] (\omega),$$

$$\tilde{u}(x, y, \omega) = F_z [u(x, y, z)] (\omega), \quad F_z[\cdot] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cdot] e^{i\omega z} dz, \quad \omega \in \mathbb{R}_\omega.$$

Введем также представления этих преобразований в полярных системах координат:

$$\hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) = \tilde{K}(x - x', y - y', \omega) = F_z \left[\frac{-z}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + z^2)^{3/2}} \right] (\omega),$$

$$\hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) = \tilde{\zeta}(x', y', \omega), \quad \hat{u}(r, \varphi, \omega) = \tilde{u}(x, y, \omega); \quad 0 \leq r' \leq a < r_0 \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi, \varphi' \leq 2\pi,$$

и разложения этих функций по системе $\{e^{in\varphi}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, в пространстве $L_2(0, 2\pi)$:

$$\hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) = \sum_n \zeta_n(r', \omega) e^{in\varphi'}, \quad \hat{K}(r, r', \cos \psi, \omega) = \sum_n K_n(r, r', \omega) e^{in\psi}, \quad \psi \in [0, 2\pi],$$

$$\hat{u}(r, \varphi, \omega) = \sum_n u_n(r, \omega) e^{in\varphi}$$

с коэффициентами

$$\zeta_n(r', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) e^{-in\varphi'} d\varphi', \quad K_n(r, r', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos \psi, \omega) e^{-in\psi} d\psi,$$

$$u_n(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}(r, \varphi, \omega) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\|\zeta(x, y, z)\|_{L_2(X)}^2 = \sum_n \int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta_n(r', \omega)|^2 r' dr' d\omega = \sum_n \|\zeta_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2. \quad (3.1)$$

Доказательство следует из теоремы Планшереля (с учетом теоремы Фубини):

$$\|\zeta(x, y, z)\|_{L_2(X)}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\tilde{\zeta}(x, y, \omega)\|_{L_2\{X_{xy} \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \int_{-\infty}^{+\infty} r' dr' d\omega \int_0^{2\pi} |\hat{\zeta}(r', \varphi', \omega)|^2 d\varphi'$$

и равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{\zeta}(r', \varphi', \omega)|^2 d\varphi' = \sum_n |\zeta_n(r', \omega)|^2.$$

Почленное интегрирование последнего ряда следует из теоремы Лебега о предельном переходе.

Теорема 1. *Пусть $u(x, y, z) \in L_2(Y)$. Тогда всякое решение $\zeta(x, y, z) \in L_2(X)$ уравнения (2.4) представимо в виде обратного преобразования Фурье:*

$$\zeta(r, \varphi, z) = F_\omega^{-1} \left[\sum_n \zeta_n(r, \omega) e^{in\varphi} \right] (z), \quad (r, \varphi, z) \in X, \quad (3.2)$$

где функции $\zeta_n(r, \omega) \in L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\int_0^a K_n(r, r', \omega) \zeta_n(r', \omega) r' dr' = \frac{1}{2\pi} u_n(r, \omega), \quad r_0 \leq r \leq b, \quad (3.3)$$

зависящим от параметра ω . Обратное, если $\zeta_n(r, \omega) \in L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}$ — решения уравнений (3.3) такие, что $\sum_n \|\zeta_n(r, \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 < \infty$, то функция вида (3.2) есть решение уравнения (2.4).

Доказательство. Из уравнения (2.4) в форме

$$\int_{X_{xy}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - x', y - y', z - z') \zeta(x', y', z') dx' dy' dz' = u(x, y, z), \quad (x, y) \in Y_{xy}, z \in \mathbb{R},$$

применяя преобразование Фурье по z , теорему о свертке по этой переменной и теорему Фубини, получим

$$\int_{X_{xy}} \tilde{K}(x - x', y - y', \omega) \tilde{\zeta}(x', y', \omega) dx' dy' = \tilde{u}(x, y, \omega), \quad (x, y) \in Y_{xy}, \omega \in \mathbb{R}_\omega,$$

или в полярных координатах

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) \hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) r' dr' d\varphi' = \hat{u}(r, \varphi, \omega), \quad (r, \varphi) \in [r_0, b] \times [0, 2\pi]. \quad (3.4)$$

Умножая последнее уравнение на $\frac{e^{-in\varphi}}{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, и интегрируя по $\varphi \in [0, 2\pi]$, получим с использованием теоремы Фубини и с учетом периодичности по ψ функции $\hat{K}(r, r', \cos \psi, \omega)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} d\varphi \left\{ \int_0^a \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) \hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) r' dr' d\varphi' \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} \hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) e^{-in\varphi'} d\varphi' \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) e^{-in(\varphi - \varphi')} d(\varphi - \varphi') \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} \hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) e^{-in\varphi'} d\varphi' \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos \psi, \omega) e^{-in\psi} d\psi \\
&= 2\pi \int_0^a K_n(r, r', \omega) \zeta_n(r', \omega) r' dr' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}(r, \varphi, \omega) e^{-in\varphi} d\varphi = u_n(r, \varphi).
\end{aligned}$$

Из последней строки ясно, что функции $\zeta_n(r, \omega) \in L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}$ удовлетворяют уравнениям (3.3), так что решение ζ уравнения (2.4) выражается через эти функции по формуле (3.2).

Для доказательства второй части теоремы достаточно проверить, что задающая равенство (3.2) функция $\hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) = \sum_n \zeta_n(r', \omega) e^{in\varphi}$ удовлетворяет уравнению (3.4). При этом мы учтем вытекающую из теоремы Лебега о предельном переходе в силу условия $\sum_n \|\zeta_n(r, \omega)\|_{L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 < \infty$ возможность почленного интегрирования ряда $\sum_n \zeta_n^2(r', \omega)$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) \hat{\zeta}(r', \varphi', \omega) r' dr' d\varphi' \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) \left(\sum_n \zeta_n(r', \omega) e^{in\varphi} \right) r' dr' d\varphi' \\
&= \sum_n e^{in\varphi} \int_0^a r' dr' \zeta_n(r', \omega) \int_0^{2\pi} \hat{K}(r, r', \cos(\varphi - \varphi'), \omega) e^{in(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \\
&= \sum_n e^{in\varphi} \int_0^a r' dr' \zeta_n(r', \omega) \int_{\varphi - 2\pi}^{\varphi} \hat{K}(r, r', \cos \psi, \omega) e^{-in\psi} d\psi \\
&= \sum_n e^{in\varphi} \int_0^a r' dr' \zeta_n(r', \omega) 2\pi K_n(r, r', \omega) \\
&= 2\pi \sum_n e^{in\varphi} \left[\frac{1}{2\pi} u_n(r, \omega) \right] = \hat{u}(r, \varphi, \omega).
\end{aligned}$$

Равенство первого и последнего члена этой выкладки доказывает теорему. \square

Следствие 1. Пусть функции $\bar{\zeta}_n(r, \omega) \in L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}$ — нормальные решения уравнений (3.3). Тогда функция $\bar{\zeta}(r, \varphi, z) = F_\omega^{-1} [\sum_n \bar{\zeta}_n(r, \omega) e^{in\varphi}] (z)$, $(r, \varphi, z) \in X$, есть нормальное решение уравнения (2.4).

Доказательство. Возьмем произвольное решение уравнения (2.4), которое по теореме 1 должно иметь вид $\zeta(r, \varphi, z) = F_\omega^{-1} [\sum_n \zeta_n(r, \omega) e^{in\varphi}] (z)$, где $\zeta_n(r, \omega)$ — решения уравнений (3.3). В силу нормальности решений $\bar{\zeta}_n(r, \omega)$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$ выполнены неравенства $\|\bar{\zeta}_n(r, \omega)\|_{L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}} \leq \|\zeta_n(r, \omega)\|_{L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}}$. Тогда из равенства (3.1) получим

$$\|\bar{\zeta}(x, y, z)\|_{L_2(X)}^2 = \sum_n \|\bar{\zeta}_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 \leq \sum_n \|\zeta_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 = \|\zeta(x, y, z)\|_{L_2(X)}^2,$$

и это доказывает утверждение. \square

4. Алгоритм решения основного уравнения

Из результатов пункта 3 следует реализуемость следующего алгоритма нахождения нормального решения $\bar{\zeta}(r, \varphi, z) \in L_2(X)$ уравнения (2.3) в форме (2.4).

Алгоритм:

а) вычисление преобразований Фурье $F_z[\cdot](\omega)$ по z :

$$\hat{K}(r, r', \cos \varphi, \omega) = F_z \left[\frac{-z}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi + z^2)^{3/2}} \right] (\omega),$$

$$\hat{u}(r, \varphi, \omega) = F_z [u(r, \varphi, z)] (\omega);$$

б) разложение этих функций в ряды Фурье по φ :

$$\hat{K}(r, r', \cos \varphi, \omega) = \sum_n K_n(r, r', \omega) e^{in\varphi}, \quad \hat{u}(r, \varphi, \omega) = \sum_n u_n(r, \omega) e^{in\varphi};$$

в) нахождение нормальных решений $\bar{\zeta}_n(r, \omega) \in L_2 \{[0, a] \times \mathbb{R}_\omega\}$ интегральных уравнений (3.3) для всех ω ;

г) восстановление по найденным функциям $\bar{\zeta}_n(r', \omega)$ искомого нормального решения $\bar{\zeta}(r, \varphi, z)$:

$$\hat{\zeta}(r, \varphi, \omega) = \sum_n \bar{\zeta}_n(r, \omega) e^{in\varphi}, \quad \bar{\zeta}(r, \varphi, z) = F_\omega^{-1} [\hat{\zeta}(r, \varphi, \omega)] (z);$$

д) нахождение искомой функции $c(r, \varphi, z)$ из равенства

$$\bar{\zeta}(r, \varphi, z) = \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(r, \varphi, z)} \right) V_0(r, \varphi, z).$$

Наиболее трудоемким шагом при использовании алгоритма является шаг в), в котором требуется решить семейство параметрических интегральных уравнений первого рода (3.3). Запишем их в операторной форме $A_n(\omega)\zeta_n = u_n(r, \omega)$ с линейными ограниченными интегральными операторами $A_n(\omega)[\cdot] = 2\pi \int_0^a r' K_n(r, r', \omega)[\cdot] dr'$ из $L_2[0, a]$ в $L_2[r_0, b]$.

Уравнения типа (3.3) являются некорректно поставленными задачами. Их решения могут быть не единственными и не устойчивыми по отношению к возмущениям данных. Мы ищем нормальные в $Z = L_2[0, a]$ решения $\bar{\zeta}_n$ этих уравнений, снимая этим вопрос единственности. Но для решения необходимо применять специальные устойчивые методы — регуляризующие алгоритмы (РА). Разработано много методов нахождения нормальных решений линейных операторных уравнений в гильбертовых пространствах (см. [16–22] и др.). Предположим, что параметрическое семейство операторов $R_\alpha(A_n(\omega), u_n(r, \omega)) : L_2[r_0, b] \rightarrow L_2[0, a]$ с параметром регуляризации α задает один из таких регуляризующих алгоритмов для решения задачи (3.3). Будем считать, что в нашем распоряжении имеются приближенные данные задачи с известным уровнем погрешности δ , т. е. вместо u_n задан элемент $u_{n\delta} \in U = L_2[r_0, b]$, для которого выполнена оценка $\|u_n - u_{n\delta}\|_U \leq \delta$. Тогда при надлежащем выборе параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ для приближенных решений $\zeta_{n\delta} = R_{\alpha(\delta)}(A_n(\omega), u_n(r, \omega))$ гарантируется сходимость $\|\zeta_{n\delta} - \bar{\zeta}_n\|_Z \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ (см. [16–22]). Достаточными условиями такой сходимости являются условия регулярности элементов $\zeta_{n\delta}$:

$$\|\zeta_{n\delta}\|_Z \leq \|\bar{\zeta}_n\|_Z, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|A_n(\omega)[\zeta_{n\delta}] - u_{n\delta}\|_U = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

которые выполнены для многих РА (см., например, [18, 21, 22]).

Сходимость получаемых с помощью предлагаемого алгоритма приближенных решений устанавливает

Теорема 2. Пусть приближенные решения $\zeta_\delta(r, \varphi, z) = F_\omega^{-1} [\sum_n \zeta_{n\delta}(r, \omega) e^{in\varphi}] (z)$ получены с помощью регуляризованных решений $\zeta_{n\delta}(r, \omega) = R_{\alpha(\delta)}(A_n(\omega), u_n(r, \omega))$ уравнений (3.3), подчиняющихся условиям регулярности. Тогда

$$\|\zeta_\delta(r, \varphi, z) - \bar{\zeta}(r, \varphi, z)\|_{L_2(X)} \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Из формулы (3.1) следует

$$\|\zeta_\delta(r, \varphi, z) - \bar{\zeta}(r, \varphi, z)\|_{L_2(X)}^2 = \sum_n \|\zeta_{n\delta}(r', \omega) - \bar{\zeta}_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 \stackrel{def}{=} \sum_n \Delta_n(\delta). \quad (4.1)$$

При этом условия регулярности обеспечивают выполнение для каждого $n \in \mathbb{Z}$ соотношений

$$\begin{aligned} \Delta_n(\delta) &= \|\zeta_{n\delta}(r', \omega) - \bar{\zeta}_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 \rightarrow 0, \\ \|\zeta_{n\delta}(r', \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2 &\leq \|\bar{\zeta}_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд в (4.1) мажорируется сходящимся (по лемме 1) рядом $\|\bar{\zeta}\|_{L_2(X)}^2 = \sum_n \|\bar{\zeta}_n(r', \omega)\|_{L_2\{[0,a] \times \mathbb{R}_\omega\}}^2$, и поэтому справедлива теорема о почленном предельном переходе:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\zeta_\delta(r, \varphi, z) - \bar{\zeta}(r, \varphi, z)\|_{L_2(X)}^2 = \sum_n \lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_n(\delta) = 0. \quad \square$$

5. Реализации алгоритма при конечномерной аппроксимации задачи и модельные расчеты

При конечномерной аппроксимации задачи область G в цилиндрических координатах (r, φ, z) заменялась на область $G' = [0, a] \times [0, 2\pi] \times [-L, L]$ с “достаточно большим” параметром L . Далее в области G' вводились равномерные сетки по (r, φ, z) размеров N_r, N_φ, N_z соответственно. На шаге а) алгоритма при вычислении на этих сетках дискретных аналогов функций $\hat{K}(r, r', \cos \varphi, \omega)$, $\hat{u}(r, \varphi, \omega)$ использовалось быстрое преобразование Фурье (БПФ) по переменной z , а при последующем вычислении соответствующих коэффициентов Фурье $K_n(r, r', \omega)$, $u_n(r, \omega)$ — БПФ по переменной φ . Уравнения (3.3) аппроксимировались с использованием квадратурных формул и сводились к набору $N_z \cdot N_\varphi$ систем линейных уравнений (СЛАУ)

$$A^{(m)} \zeta^{(m)} = v^{(m)}, \quad m = 1, \dots, N_z \cdot N_\varphi, \quad (5.1)$$

с матрицами $A^{(m)} = [\nu_{ij} K_n^{(m)}(r_i, r'_j, \omega^{(m)})]$ и правыми частями $v^{(m)} = \frac{1}{2\pi} u_n^{(m)}(r, \omega^{(m)})$. Здесь ν_{ij} — квадратурные коэффициенты, а $\omega^{(m)}, n^{(m)}$ — занумерованные одним индексом m дискретные аналоги величин ω, n . Системы (5.1) решались с помощью известного

метода TSVD (см., например, [20]), который показал свою эффективность при решении аналогичной обратной задачи с данными в плоском слое (см. [14]). Последняя часть алгоритма реализована также с помощью БПФ.

Поскольку в данной работе нас интересуют только скорость и точность метода решения обратной задачи, мы считаем, что данные $u(r, \varphi, z)$ для ее решения уже подготовлены. В численных экспериментах по решению обратной задачи это означает, что по заданному модельному решению $\bar{\zeta}(r, \varphi, z) \in L_2(X)$ они вычисляются непосредственно из дискретного аналога равенства (2.4) на мелких сетках и далее используются в алгоритме на более грубых сетках. Отметим, что этим в данные вносится ошибка сеточной аппроксимации. Мы также ограничимся при реализации алгоритма лишь нахождением функций $\bar{\zeta}(r, \varphi, z)$ и $\bar{\xi}(r, \varphi, z) = \frac{\bar{\zeta}(r, \varphi, z)}{V_0(r, \varphi, z)} = \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(r, \varphi, z)}$ без окончательного вычисления $c(r, \varphi, z)$.

На рис. 2 представлены результаты решения уравнения (2.4) с невозмущенными данными по предлагаемому алгоритму для модельного решения $\bar{\zeta}(x, y, z) = \bar{\xi}(x, y, z)V_0(x, y, z)$. Здесь функция $V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^8 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|}$, $\mathbf{x} \in Y$, $\mathbf{x}_l \in D$, также имеет модельный характер и формально порождается 8-точечными источниками с $g(x) = \delta(x - x_l)$, расположенными в точках \mathbf{x}_l с цилиндрическими координатами $(1, \frac{\pi k}{2}, \pm 1)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Функция $\bar{\xi}(x, y, z) = \xi_1(x, y, z) + \xi_2(x, y, z)$ содержит слагаемые

$$\begin{aligned} \xi_1(x, y, z) &= \exp \left\{ -350(x - 0.4)^2 - 350y^2 - 8.75(z + 0.2)^2 \right\} \chi(G_1), \\ \xi_2(x, y, z) &= \exp \left\{ -350(x + 0.4)^2 - 350(y - 0.4)^2 - 8.75(z - 0.2)^2 \right\} \chi(G_2), \end{aligned}$$

где $\chi(G_{1,2})$ — характеристические функции множеств,

$$G_1 = (x - 0.4)^2 + y^2 + 0.125(z + 0.1)^2 \leq 0.3^2, \quad G_2 = (x + 0.4)^2 + (y - 0.4)^2 + 0.125(z - 0.1)^2 \leq 0.3^2.$$

При этом $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $G = \{0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}$ и $X = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}$, $Y = \{1.01 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}$.

Уравнение (2.4), сведенное к СЛАУ (5.1), решалось сначала на сетках размеров $N_r = 80$, $N_\varphi = 128$, $N_z = 128$. Результаты, т.е. сравнение зависимостей от x, y приближенно найденной функции $\xi_{\text{appr}}(x, y, z_i)$ и точной функции $\bar{\xi} = \xi_{\text{exact}}(x, y, z_i)$ при избранных фиксированных сеточных значениях координаты $z = z_i$, представлены на рис. 2. Вычисления проводились в системе МАТЛАБ на ПК с процессором Intel (R) Core (TM) i7-7700 CPU 3.60 GHz, ОЗУ 16Гб (без распараллеливания). Эти рисунки позволяют качественно оценить точность получаемых решений обратной задачи. Количественное сравнение дается величиной

$$\Delta(z) = \frac{\|\xi_{\text{appr}}(x, y, z) - \xi_{\text{exact}}(x, y, z)\|_{L_2(\mathbb{R}_{xy}^2)}}{\|\xi_{\text{exact}}(x, y, z)\|_{L_2(\mathbb{R}_{xy}^2)}}$$

в зависимости от z и представлено на рис. 3. На этом же рисунке изображена аналогичная зависимость, полученная при решении уравнения (2.4) с возмущенными данными задачи. Возмущение задавалось в виде аддитивного слагаемого в правой части уравнения (2.4), моделирующего нормально распределенные погрешности данных Δu , с $\delta = \|\Delta u\|_{L_2} = 10^{-12}$. Из графика видна чрезвычайная чувствительность получаемого приближенного решения к возмущениям данных. Этот вопрос был обсужден ранее в работе [14] и связан с плохой обусловленностью обратной задачи.

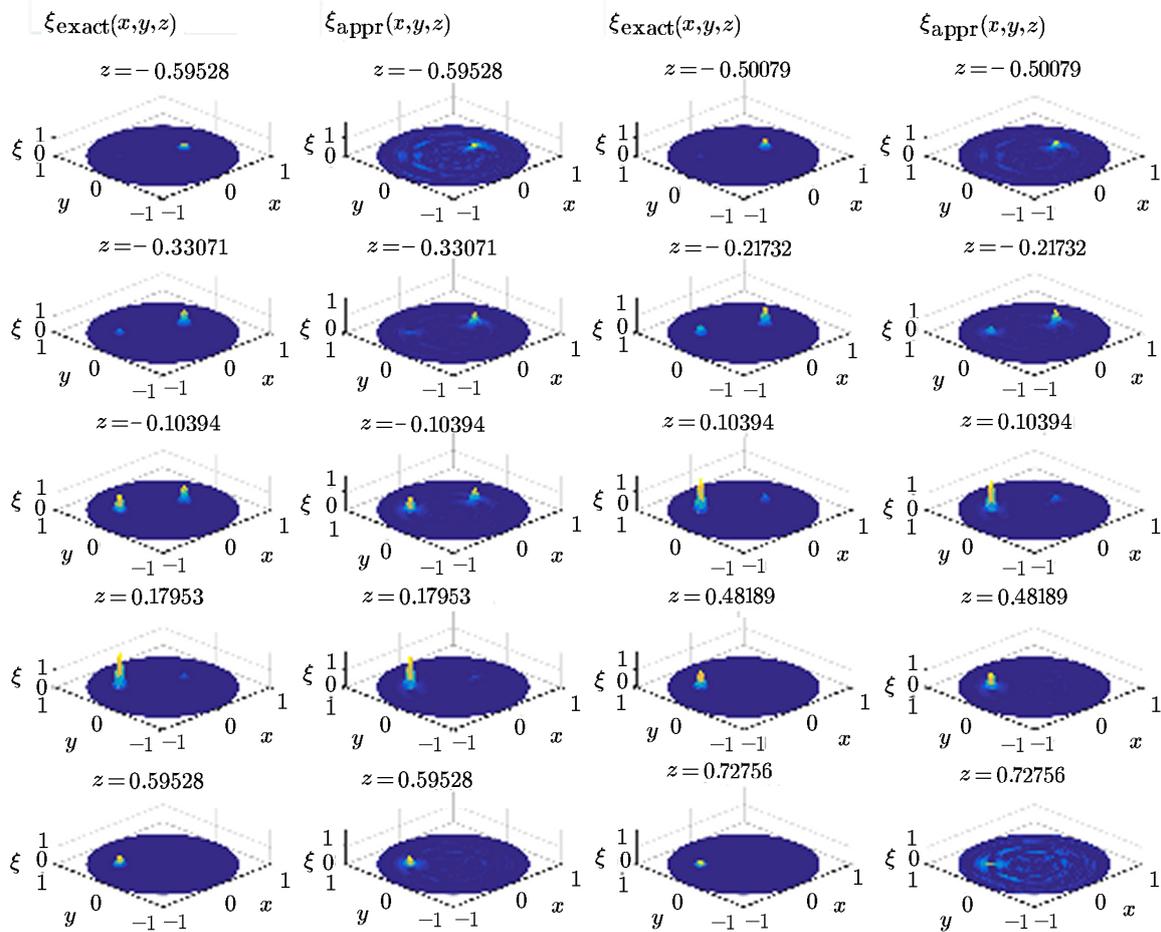


Рис. 2. Парное сравнение точного $\xi_{\text{exact}}(x, y, z)$ и приближенного $\xi_{\text{appr}}(x, y, z)$ решения обратной задачи с невозмущенными данными для избранных z

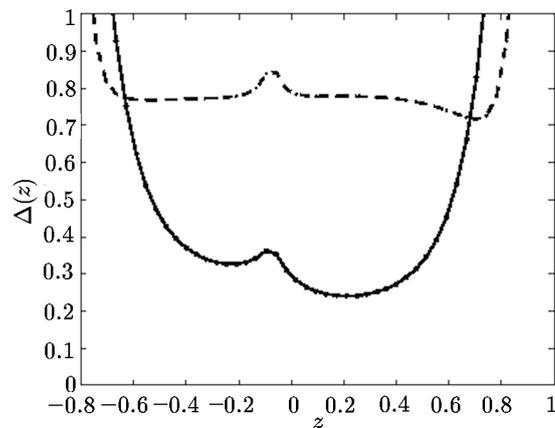


Рис. 3. Относительная точность $\Delta(z)$ приближенного решения в сечениях решения для различных z . Непрерывная линия — величина $\Delta(z)$ для невозмущенных данных задачи, пунктирная линия — для данных с максимальной величиной возмущения порядка $\delta = 10^{-12}$

В численных экспериментах на том же ПК было также оценено быстродействие предложенного алгоритма решения обратной задачи (без распараллеливания). На рис. 4 изображена полученная зависимость времени решения от $N = N_r = N_\varphi = N_z$. Таким образом, это время составляет около 1.4 часа для сеток размеров $N_r = N_\varphi = N_z = 512$. Для сеток размеров $N_r = 80$, $N_\varphi = 128$, $N_z = 128$, использованных для получения результатов, которые представлены на рис. 2, требуется около 1 минуты.

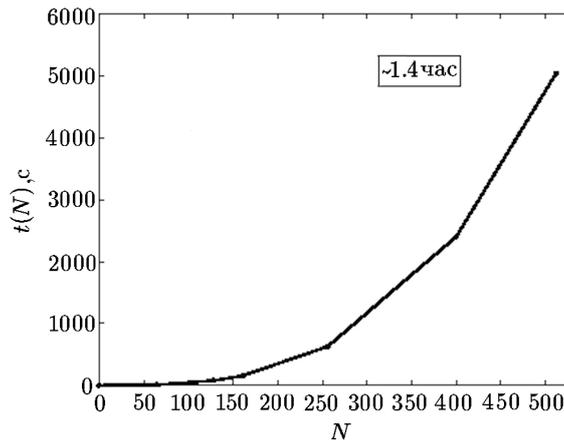


Рис. 4. Зависимость времени решения обратной задачи (в секундах) от $N = N_r = N_\varphi = N_z$

Заключение

Подводя итоги этой работы, можно сделать следующие выводы.

1. Обратная коэффициентная задача для уравнения колебаний с потерями, возникающая, например, при моделировании акустического зондирования, может быть решена численно быстрее, если в качестве ее данных брать не временные зависимости $u(x, t)$ рассеянного поля в некоторой области пространства, а некоторые интегралы от этих зависимостей по времени. Такими интегралами могут служить функции $V_2(x)$, $V_2^{(0)}(x)$ или их производные.
2. Для данных этого типа, регистрируемых в цилиндрическом слое, можно предложить численный алгоритм, который позволяет решать обратную задачу на персональном компьютере без использования суперкомпьютерных систем (и даже без распараллеливания алгоритма) за сравнительно небольшое время для достаточно мелких сеток.

Приложение. Вывод основного интегрального уравнения

Из условий 2), 4) пункта 2 получим равенства, справедливые для $x \in G$:

$$\int_0^\infty t u_t(x, t) dt = t u(x, t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty u(x, t) dt = -V_0(x),$$

$$\int_0^\infty t u_{tt}(x, t) dt = t u_t(x, t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty u_t(x, t) dt = -u(x, t) \Big|_0^\infty = 0,$$

$$\int_0^\infty t^2 u_{tt}(x, t) dt = t^2 u_t(x, t) \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty t u_t(x, t) dt = 2V_0(x),$$

$$\int_0^\infty t^2 u_t(x, t) dt = t^2 u(x, t) \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty t u(x, t) dt = -2V_1(x),$$

$$\int_0^\infty u_{tt}(x, t) dt = u_t(x, t) \Big|_0^\infty = 0, \quad \int_0^\infty u_t(x, t) dt = u(x, t) \Big|_0^\infty = 0.$$

Из (1.1) с учетом условий 3) следует:

$$\frac{1}{c^2(x)} \int_0^\infty u_{tt}(x, t) dt + \sigma(x) \int_0^\infty u_t(x, t) dt = \Delta \int_0^\infty u(x, t) dt - A_0 g(x),$$

$$l \left[\int_0^\infty u(x, t) dt \right]_{\partial G} = 0,$$

и далее в силу полученных формул для интегралов по t : $\Delta V_0(x) = A_0 g(x)$, $l[V_0(x)]|_{\partial G} = 0$. Эти равенства определяют задачу для нахождения $V_0(x)$. В силу предположений о коэффициентах $g(x)$, $k(x)$ она имеет единственное классическое решение (см. [15]). Аналогично,

$$\frac{1}{c^2(x)} \int_0^\infty t u_{tt}(x, t) dt + \sigma(x) \int_0^\infty t u_t(x, t) dt = \Delta \int_0^\infty t u(x, t) dt - A_1 g(x),$$

и значит, $\Delta V_1(x) = -\sigma(x)V_0(x) + A_1 g(x)$, $l[V_1(x)]|_{\partial G} = 0$ (задача для нахождения единственного классического решения $V_1(x)$). И, наконец,

$$\frac{1}{c^2(x)} \int_0^\infty t^2 u_{tt}(x, t) dt + \sigma(x) \int_0^\infty t^2 u_t(x, t) dt = \Delta \int_0^\infty t^2 u(x, t) dt - A_2 g(x),$$

т. е.

$$\frac{2V_0(x)}{c^2(x)} - 2\sigma(x)V_1(x) = \Delta V_2(x) - A_2 g(x). \quad (5.2)$$

Вводя функцию $\zeta(x) = \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(x)}\right) V_0(x)$, получим из (5.2):

$$\zeta(x) = \frac{V_0(x)}{c_0^2} - \sigma(x)V_1(x) + \frac{A_2}{2}g(x) - \frac{1}{2}\Delta V_2(x), \quad x \in G.$$

Отсюда

$$\int_G \frac{\zeta(x') dx'}{|x - x'|} = \int_G \left(\frac{V_0(x')}{c_0^2} - \sigma(x')V_1(x') + \frac{A_2}{2}g(x') \right) \frac{dx'}{|x - x'|} -$$

$$\frac{1}{2} \int_G \frac{\Delta V_2(x') dx'}{|x - x'|}, \quad x \in G. \quad (5.3)$$

Введем теперь функции

$$W(x) = \int_G \left(\frac{V_0(x')}{c_0^2} - \frac{1}{2}\sigma(x')V_1(x') + \frac{A_2}{2}g(x') \right) \frac{dx'}{|x - x'|}, \quad U(x) = \frac{1}{2} \int_G \frac{\Delta V_2(x') dx'}{|x - x'|}.$$

Функцию $U(x)$ можно с помощью третьей формулы Грина [15] преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}
U(x) &= -2\pi V_2(x) + \frac{1}{2} \int_{\partial G} \left(\frac{1}{|x-x'|} \frac{\partial V_2(x')}{\partial n} - V_2(x') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-x'|} \right) \right) dx' \\
&= -2\pi V_2(x) - \frac{1}{2} \int_{\partial G} V_2(x') \left(\frac{k(x')}{|x-x'|} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-x'|} \right) \right) dx'.
\end{aligned}$$

Здесь использовано граничное условие $l[V_2(x)]|_{\partial G} = \left[\frac{\partial V_2(x)}{\partial n} + k(x)V_2(x) \right] \Big|_{\partial G} = 0$, вытекающее из определения функции $V_2(x)$ и граничных условий задачи (1.1). Тогда, учитывая финитность функции $\zeta(x)$, получим из (5.3):

$$\int_X \frac{\zeta(x') dx'}{|x-x'|} = W(x) - U(x), \quad x \in Y. \quad (5.4)$$

Литература

1. **Colton D., Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. — Berlin: Springer, 1998.
2. **Pestov L.** On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2014. — Vol. 22, № 2. — P. 245–250.
3. **Agaltsov A., Novikov R.** Riemann-Hilbert problem approach for two-dimensional flow inverse scattering // J. of Mathematical Physics / American Institute of Physics (AIP). — 2014. — Vol. 55, № 10. — P. 103502-1–103502-25.
4. **Буров В.А., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.** Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. — 2015. — Т. 61, № 2. — С. 254–273.
5. **Belishev M.I., Ivanov I.B., Kubyshkin I.V., and Semenov V.S.** Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2016. — Vol. 24, iss. 2. — P. 159–180.
6. **Beilina L. and Klibanov M.V.** Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. — New York: Springer, 2012.
7. **Beilina L., Th'anh N.T., Klibanov M.V., and Fiddy M.A.** Reconstruction from blind experimental data for an inverse problem for a hyperbolic equation // Inverse Problems. — 2014. — Vol. 30, iss. 24. — P. 025002.
8. **Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.** Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. Mathematics and Its Applications. — Dordrecht: Springer, 2004.
9. **Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.** Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
10. **Гончарский А.В., Романов С.Ю.** О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 2. — С. 263–269.
11. **Гончарский А.В., Романов С.Ю.** Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗИ-томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 235–238.
12. **Лаврентьев М.М.** Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 3. — С. 520–521.
13. **Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю.** Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2003. — Т. 43, № 8. — С. 1201–1209.

14. **Bakushinsky A.V. and Leonov A.S.** Fast numerical method of solving 3D coefficient inverse problem for wave equation with integral data // J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2018. — Vol. 26, iss. 4. — P. 477–492.
15. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
16. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989. Перевод: Bakushinsky A., Goncharky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
17. **Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.** Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.
18. **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987.
19. **Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.** Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. Перевод: Tikhonov A., Goncharky A., Stepanov V., and Yagola A. Numerical methods for the solution of ill-posed problems. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
20. **Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.** Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
21. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995. Перевод: Tikhonov A.N., Leonov A.S., and Yagola A.G. Non-Linear Ill-Posed Problems. — London: Chapman and Hall, 1998.
22. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. Изд-е 2. — М.: Либроком, 2013.

*Поступила в редакцию 17 сентября 2018 г.,
После доработки 14 декабря 2018 г.
Принята к публикации 25 июля 2019 г.*

Литература в транслитерации

1. **Colton D., Kress R.** Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. — Berlin: Springer, 1998.
2. **Pestov L.** On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2014. — Vol. 22, № 2. — P. 245–250.
3. **Agaltsov A., Novikov R.** Riemann-Hilbert problem approach for two-dimensional flow inverse scattering // J. of Mathematical Physics / American Institute of Physics (AIP). — 2014. — Vol. 55, № 10. — P. 103502-1–103502-25.
4. **Burov V.A., Zotov D.I., Rumyancheva O.D.** Vosstanovlenie prostranstvennykh raspredeleniy skorosti zvuka i pogloscheniya v fantomakh myagkikh biotkaney po eksperimental'nyim dannym ul'trazvukovogo tomografirovaniya // Akust. zhurn. — 2015. — Т. 61, № 2. — S. 254–273.
5. **Belishev M.I., Ivanov I.B., Kubyshkin I.V., and Semenov V.S.** Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2016. — Vol. 24, iss. 2. — P. 159–180.
6. **Beilina L. and Klivanov M.V.** Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. — New York: Springer, 2012.
7. **Beilina L., Th'anh N.T., Klivanov M.V., and Fiddy M.A.** Reconstruction from blind experimental data for an inverse problem for a hyperbolic equation // Inverse Problems. — 2014. — Vol. 30, iss. 24. — P. 025002.

8. **Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.** Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. Mathematics and Its Applications. — Dordrecht: Springer, 2004.
9. **Bakushinskiy A.B., Kokurin M.Yu.** Iteracionnye metody resheniya nekorrektnykh operatornykh uravneniy s gladkimi operatorami. — M.: Editorial URSS, 2002.
10. **Goncharskiy A.V., Romanov S.Yu.** O dvukh podkhodakh k resheniyu koefitsientnykh obratnykh zadach dlya volnovykh uravneniy // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — T. 52, № 2. — S. 263–269.
11. **Goncharskiy A.V., Romanov S.Yu.** Superkomp'yuternye tekhnologii v razrabotke metodov resheniya obratnykh zadach v UZI-tomografii // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye: novye vychislitel'nye tekhnologii. — 2012. — T. 13, № 1. — S. 235–238.
12. **Lavrent'ev M.M.** Ob odnoy obratnoy zadache dlya volnovoogo uravneniya // Dokl. AN SSSR. — 1964. — T. 157, № 3. — S. 520–521.
13. **Bakushinskiy A.B., Kozlov A.I., Kokurin M.Yu.** Ob odnoy obratnoy zadache dlya trekhmernogo volnovoogo uravneniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2003. — T. 43, № 8. — S. 1201–1209.
14. **Bakushinsky A.B. and Leonov A.S.** Fast numerical method of solving 3D coefficient inverse problem for wave equation with integral data // J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2018. — Vol. 26, iss. 4. — P. 477–492.
15. **Tikhonov A.N., Samarskiy A.A.** Uravneniya matematicheskoy fiziki. — M.: Nauka, 1966.
16. **Bakushinskiy A.B., Goncharskiy A.V.** Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1989. Perevod: Bakushinsky A., Goncharsky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
17. **Vaynikko G.M., Veretennikov A.Yu.** Iteracionnye procedury v nekorrektnykh zadachakh. — M.: Nauka, 1986.
18. **Morozov V.A.** Regulyarnye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach. — M.: Nauka, 1987.
19. **Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.** Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1990. Perevod: Tikhonov A., Goncharsky A., Stepanov V., and Yagola A. Numerical methods for the solution of ill-posed problems. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
20. **Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.** Regularization of Inverse Problems. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
21. **Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G.** Nelineynyye nekorrektnyye zadachi. — M.: Nauka, 1995. Perevod: Tikhonov A.N., Leonov A.S., and Yagola A.G. Non-Linear Ill-Posed Problems. — London: Chapman and Hall, 1998.
22. **Leonov A.S.** Reshenie nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach. Ocherk teorii, prakticheskie algoritmy i demonstratsii v MATLAB. Izd-e 2. — M.: Librokom, 2013.

