

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Герштейн Э. А., Пилюгин Н. Н. Обтекание тел гиперзвуковым потоком невязкого объемно-излучающего газа.— «Научн. труды Ин-та механики МГУ», № 29.
3. Спарроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. Л., «Энергия», 1971.
4. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12 000°K и давлений от 0,001 до 1000 атм). М., Изд-во АН СССР, 1957.
5. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э. Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970.
6. Стулов В. П., Шапиро Е. Г. Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1970, № 1.
7. Физическая газодинамика, теплообмен и термодинамика газов высоких температур. М., Изд-во АН СССР, 1962.
8. Каменщиков В. А., Пластинин Ю. А., Николаев В. М., Новицкий Л. А. Радиационные свойства газов при высоких температурах. М., «Машиностроение», 1971.
9. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э. Оптические свойства горячих газов. Смеси CO<sub>2</sub> и N<sub>2</sub>.— ТВТ, 1970, т. 8, № 1.
10. Биберман Л. М., Бронин С. Я., Лагарьков А. Н. Радиационно-конвективный теплообмен при гиперзвуковом обтекании затупленного тела.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 5.
11. Бронин С. Я. Канд. дис. МФТИ, 1971.
12. Пилюгин Н. Н. Распределение лучистого теплового потока по поверхности сферы при обтекании ее гиперзвуковым потоком невязкого излучающего газа.— ПМТФ, 1972, № 6, с. 44.

УДК 536.24:536.33

**ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ НЕВЯЗКИМ  
ИЗЛУЧАЮЩИМ ГАЗОМ  
ПЛОСКИХ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ**

*Н. Н. Пилюгин, Г. А. Тирский*  
(Долгопрудный)

В работе получено аналитическое решение в ньютоновском приближении [1] задачи об обтекании плоского затупленного тела установившимся равномерным гиперзвуковым невязким объемно-излучающим потоком газа.

Задача о гиперзвуковом обтекании осесимметричных затупленных тел невязким объемно-излучающим газом рассматривалась в работах [2—4]. В этом случае удовлетворительное решение задачи получается уже в нулевом приближении при разложении искомых величин по параметру  $\varepsilon$ , равному отношению плотностей газа до и после прохождения ударной волны. В случае обтекания плоских затупленных тел решение задачи в нулевом приближении по  $\varepsilon$  оказывается неудовлетворительным, так как при течении газа в ударном слое, близком к адиабатическому, отход ударной волны и лучистый поток к телу оказываются сильно завышенными. Фримен показал [5], что при обтекании плоского затупленного тела неизлучающим газом результаты можно значительно улучшить за счет применения более точного выражения для касательной составляющей скорости, вычисленной в следующем приближении по параметру  $\varepsilon$ .

В данной работе это уточнение применяется для решения задачи об обтекании плоского затупленного тела объемно-излучающим газом. Найдены распределение газодинамических параметров в ударном слое, отход ударной волны и лучистый тепловой поток к поверхности тела. Полученное решение подробно анализируется на примере обтекания кругового цилиндра.

1. Система безразмерных уравнений, описывающая течение вязкого нетеплопроводного химически равновесного объемно-излучающего газа в ударном слое около плоского затупленного тела, имеет следующий вид [1]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^2 v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\varepsilon}{H} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{RH} &= -\frac{\partial p}{\partial \psi}; \\ \frac{\rho u}{H} \frac{\partial}{\partial x} (h + u^2 + \varepsilon^2 v^2) &= -\Gamma K_P T^4; \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= H \frac{v}{u}; \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u}; \quad H = 1 + \frac{\varepsilon y}{R(x)}; \\ r(x, y) &= r_w(x) + \varepsilon y \sin \alpha; \\ \Gamma &= \frac{8K_{P_s^*} \sigma T_{s^*}^4 \varepsilon l}{\rho_\infty V_\infty^3}; \\ \varepsilon &= \rho_\infty / \rho_{s^*}; \quad h = \bar{h}(p, T); \quad \rho = \rho(p, T). \end{aligned}$$

Здесь  $lx$ ,  $\varepsilon ly$  — координаты, направленные вдоль поверхности тела и по нормали к ней;  $uV_\infty$ ,  $\varepsilon V_\infty v$  — составляющие скорости газа в направлении этих координат;  $\varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho$  — плотность;  $\rho_\infty V_\infty^2 p$  — давление;  $0,5V_\infty^2 h$  — энтальпия;  $T_{s^*} T$  — температура газа;  $K_{P_s^*} K_P$  — коэффициент поглощения Планка;  $lR(x)$  — радиус кривизны поверхности тела;  $lr$  — расстояние от оси симметрии до рассматриваемой точки;  $l$  — характерный линейный размер;  $\Gamma$  — параметр излучения;  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $\alpha$  — угол между касательной к телу и направлением скорости невозмущенного потока;  $\rho_\infty V_\infty l \psi$  — функция тока, определяемая выражением  $d\psi = \rho v dy - \rho v H dx$ . Индексы  $\infty$ ,  $s$ ,  $*$ ,  $w$  отмечают соответственно параметры набегающего потока, параметры непосредственно за ударной волной, характерные значения параметров и их величины на поверхности тела.

При выводе системы (1.1) предполагалось, что собственным излучением сравнительно холодной поверхности тела можно пренебречь.

Граничные условия на ударной волне имеют вид

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \psi &= \psi_s(x) = r_s(x) = r_w(x) + \varepsilon y_s \sin \alpha; \\ u_s(x, \psi_s) &= \cos \beta \cos(\beta - \alpha) + \varepsilon \frac{\rho_{s^*}}{\rho_s} \sin \beta \sin(\beta - \alpha); \\ v_s(x, \psi_s) &= \cos \beta \sin(\beta - \alpha) - \varepsilon \frac{\rho_{s^*}}{\rho_s} \sin \beta \cos(\beta - \alpha); \\ p_s(x, \psi_s) &= (\gamma_\infty M_\infty^2)^{-1} + \left( 1 - \varepsilon \frac{\rho_{s^*}}{\rho_s} \right) \sin^2 \beta; \\ h_s(x, \psi_s) &= h_\infty + \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{\rho_{s^*}^2}{\rho_s^2} \right) \sin^2 \beta; \\ \operatorname{tg}(\beta - \alpha) &= \varepsilon y_{sx} / (1 + \varepsilon y_s / R), \end{aligned}$$

где  $\beta$  — угол между касательной к ударной волне и направлением невозмущенного потока;  $M_\infty$  — число Маха набегающего потока;  $y_s = y_s(x)$  — уравнение ударной волны. На поверхности тела принято

$$(1.3) \quad \psi = 0.$$

2. Решение системы уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) находится в виде разложений [1,5] по малому параметру  $\varepsilon$

$$(2.1) \quad f(x, \psi, \varepsilon) = f_0(x, \psi) + \varepsilon f_1(x, \psi) + \dots,$$

где  $f$  — любая из функций  $u^2$ ,  $v^2$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $h$  или  $T$ . Далее предполагается, что в ударном слое все эти функции и их первые производные — величины порядка единицы. Подставляя разложение (2.1) в систему уравнений (1.1), получим в нулевом приближении

$$(2.2) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p_0}{\partial \psi} = \frac{u_0}{R}; \quad \rho_0 u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} = -\Gamma K_p T_0^k;$$

$$\rho_0 = \rho_0(p_0, T_0); \quad h_0 = h_0(p_0, T_0); \quad r = r_w(x).$$

Следуя работам [5,6], далее для величин  $h_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  ограничимся нулевым приближением (2.2), а для касательной и нормальной составляющей скорости и геометрической координаты используем первое приближение

$$(2.3) \quad \frac{\partial u_1^2}{\partial x} = -\frac{2}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x}; \quad u^2 = u_0^2 + \varepsilon u_1^2;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho_0 u}, \quad v = \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Граничные условия на скачке примут вид

$$(2.4) \quad \psi = \psi_s(x) = r_w(x); \quad u_{s0}(x, \psi_s) = \cos \alpha(x); \quad p_{s0}(x, \psi_s) = \sin^2 \alpha(x);$$

$$h_{s0}(x, \psi_s) = \sin^2 \alpha(x); \quad u_{s1}(x, \psi_s) = 0.$$

Интегрируя первые уравнения (2.2), с учетом (2.4) получим

$$(2.5) \quad u_0(x, t) = \cos \alpha(t);$$

$$(2.6) \quad p_0(x, t) = \sin^2 \alpha(x) - \frac{1}{R(x)} \int_t^x \cos \alpha(t) \sin \alpha(t) dt,$$

где  $t$  — координата, фиксирующая место входа данной линии тока в ударный слой.

Анализ таблиц [7,8] показывает, что в определенном интервале температур и давлений можно использовать уравнение состояния (в размерном виде)

$$(2.7) \quad h = \gamma/(\gamma - 1)p/\rho$$

( $\gamma$  — эффективное отношение теплоемкостей газа в ударном слое), а также аппроксимировать коэффициент поглощения Планка в виде

$$(2.8) \quad K_p = A p T^n,$$

где  $A$ ,  $n$  — константы аппроксимации.

Тогда уравнение энергии с учетом (2.4) — (2.8) имеет решение

$$(2.9) \quad h_0(x, t) = \left\{ \sin^{-2(n+4)} \alpha(t) + \frac{b(x-t)}{\cos \alpha(t)} \right\}^{-\frac{1}{n+4}};$$

$$b = 8A\rho_\infty V_\infty^2 \left( \frac{V_\infty^2}{2C_p} \right)^{n+4} \varepsilon l \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) \frac{\sigma(n+4)}{\rho_\infty V_\infty^3}.$$

Находим решение системы уравнений (2.3) с учетом (2.5) — (2.9):

$$(2.10) \quad u^2(x, t) = \cos^2 \alpha(t) - \varepsilon \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \right) \times$$

$$\times \int_t^x \frac{dx' h_0(x', t)}{\rho_0(x', t)} \frac{\partial p_0}{\partial x'}(x', t);$$

$$y(x, t) = \int_0^t \frac{\sin \alpha(t) dt}{\rho_0(x, t) u(x, t)}.$$

Отход ударной волны определяется из (2.10) при  $t=x$ . Нормальная составляющая скорости находится дифференцированием выражения (2.10):  $v=uy/\partial x$ .

На основе полученных параметров течения газа в ударном слое установим распределение лучистого потока по поверхности тела:

$$q_w(x) = \frac{2q_R(x)}{\rho_\infty V_\infty^3} = \frac{b}{2(n+4)} \int_0^x \frac{h^{n+5}(x, t) \sin \alpha(t) dt}{u(x, t)}.$$

3. В качестве примера более подробно рассмотрим обтекание кругового цилиндра радиуса  $R$  гиперзвуковым потоком воздуха. В этом случае с учетом геометрических соотношений  $l=R$ ;  $\alpha(x)=\pi/2 - \theta$ ;  $\Phi=\pi/2 - \alpha(t)$  получим

$$(3.1) \quad u_0(\Phi) = \sin \Phi;$$

$$p_0(\theta, \Phi) = \cos^2 \Phi - \frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{\sin^2 \Phi}{2};$$

$$h_0(\theta, \Phi) = \left\{ \cos^{-2(n+4)} \Phi + \frac{b(\theta - \Phi)}{\sin \Phi} \right\}^{-\frac{1}{n+4}}.$$

Отметим, что метод решения непригоден в окрестности ньютоновской точки отрыва, в которой давление на поверхности тела падает до нуля [5]. Для цилиндра это соответствует значению угла  $\theta_*$ , отсчитываемого от критической точки

$$\theta_* = \arcsin \sqrt{2/3} = 54^\circ 44'.$$

Касательная составляющая скорости с учетом первого приближения имеет вид

$$(3.2) \quad u^2(\theta, \Phi) = \sin^2 \Phi - \varepsilon \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \right) \int_\Phi^\theta d\theta' h_0(\theta', \Phi) \frac{\partial \ln p_0(\theta', \Phi)}{\partial \theta'}.$$

Представим отход ударной волны как

$$(3.3) \quad y_s(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \int_0^1 \frac{dt h_0(\theta, \Phi(t)) \sin \theta}{\left[ \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} (1-t^2) \right] u(\theta, \Phi(t))},$$

где проведена замена переменных вида  $\sin \Phi = t \sin \theta$ .

Тогда лучистый поток к поверхности тела определим по формуле

$$(3.4) \quad q_w(\theta) = \frac{b \sin \theta}{2(n+4)} \int_0^1 \frac{dt h_0(\theta, \Phi(t))^{n+5}}{u(\theta, \Phi(t))}.$$

4. Рассмотрим предельные случаи полученных выше выражений. В подынтегральном члене равенства (3.2) положим приближенно

$$(4.1) \quad h_0(\theta', \Phi) \simeq h_0(\theta, \Phi).$$

Такая замена вносит ошибку лишь в членах  $O(\varepsilon)$  и позволяет получить

правильный результат в случае течения неизлучающего газа. С учетом (4.1) выражение (3.2) интегрируется:

$$u^2(\theta, \Phi) = \sin^2 \Phi - \varepsilon \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \right) h_0(\theta, \Phi) \ln \left[ \frac{p_0(\theta, \Phi)}{\cos^2 \Phi} \right].$$

При  $b \ll 1$ , когда газ слабо излучает, из (3.1) имеем (4.2)

$$(4.2) \quad h_0(\theta, \Phi) = \cos^2 \Phi.$$

Учитывая (3.3), (4.2), получим выражение для отхода ударной волны

$$(4.3) \quad y_s(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \sin \theta \int_0^1 \frac{dt (1-t^2 \sin^2 \theta)}{\left[ \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta (1-t^2)}{2} \right] \sqrt{F(\theta, t)}};$$

$$F(\theta, t) = t^2 \sin^2 \theta - 2\varepsilon (1-t^2 \sin^2 \theta) \ln \left( \frac{\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} (1-t^2)}{1-t^2 \sin^2 \theta} \right).$$

Находим значение для углов  $\theta \leq \pi/6$ , для чего разлагаем в (4.3) логарифмическую функцию в ряд по степеням  $\sin^2 \theta$  (сокращая при этом на  $\sin \theta$ ) и опускаем в подынтегральном выражении оставшиеся члены порядка  $\sin^2 \theta$  и выше

$$(4.4) \quad y_s(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{1-3\varepsilon}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-3\varepsilon}}{\sqrt{3\varepsilon}} \right).$$

Из (4.4) на критической линии ( $\theta=0$ ) при  $3\varepsilon \ll 1$  получим выражение для отхода ударной волны (в размерном виде)

$$\Delta_s(0) = \frac{\varepsilon R}{2} \ln \frac{4}{3\varepsilon}.$$

Эта формула согласуется с результатом работ [5,6], полученным для течения неизлучающего газа.

Лучистый поток к поверхности цилиндра при  $b \ll 1$  имеет вид

$$(4.5) \quad q_w(\theta) = \frac{b \sin \theta}{2(n+4)} \int_0^1 \frac{dt (1-t^2 \sin^2 \theta)^{n+5}}{\sqrt{F(\theta, t)}}.$$

Тот же поток в критическую точку  $\theta=0$  вычисляется точно

$$q_w(0) = \frac{b}{2(n+4)} \frac{1}{\sqrt{1-3\varepsilon}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-3\varepsilon}}{\sqrt{3\varepsilon}} \right).$$

Физический смысл этой формулы в том, что она дает лучистый поток от однородного плоского объемно-излучающего слоя газа с толщиной, равной величине отхода ударной волны (4.4). Прделав разложения, аналогичные использованным при выводе (4.4), получим из (4.5)

$$(4.6) \quad q_w(\theta) \cong q_w(0) \cos^m \theta;$$

$$m = (n+5) \left[ \frac{\sqrt{1+a}}{\ln \left( \frac{1+\sqrt{1-3\varepsilon}}{\sqrt{3\varepsilon}} \right)} - a \right];$$

$$a = 3\varepsilon/(1-3\varepsilon).$$

Отметим, что в отличие от аналогичного выражения, полученного при обтекании сферы [3], показатель степени  $m$  в (4.6) оказывается меньше и зависит не только от  $n$ , но и от  $\varepsilon$ . Кроме того, величина лучистого по-

тока в критическую точку  $q_w(0)$  для цилиндра больше, чем для сферы из-за большей величины отхода ударной волны. Для численной оценки на основе таблиц [7, 8] возьмем  $\varepsilon=0,05$ ;  $n=8$ . В этом случае отношение величин для цилиндра (индекс 1) к величинам для сферы (индекс 2) запишем как

$$q_{w1}(0)/q_{w2}(0)=1,74; m_1/m_2=0,748.$$

В другом предельном случае, когда газ является сильно излучающим ( $b \gg 1$ ), асимптотическое вычисление интеграла в (3.4) для углов  $\theta \leq \pi/6$  приводит к следующему выражению для отхода ударной волны:

$$(4.7) \quad y_s(\theta) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{n + 4}{n + 3} \frac{b^{-\frac{1}{n+4}}}{\cos^{\frac{1}{n+4}} \theta}.$$

В этих же допущениях распределение лучистого потока при  $b \gg 1$  имеет вид

$$(4.8) \quad q_w(\theta) = \frac{\cos^3 \theta}{2}.$$

Сравнение формул для цилиндра (4.4), (4.6) — (4.8) с соответствующими формулами, полученными в работе [3] при обтекании сферы, показывает, что наиболее сильное отличие в лучистом потоке  $q_w(\theta)$  и отходе ударной волны  $y_s(\theta)$  наблюдается при обтекании этих тел слабо излучающим газом ( $b \ll 1$ ).

В случае сильно излучающего газа ( $b \gg 1$ ) величины  $q_w(\theta)$  и  $y_s(\theta)$  при обтекании плоского и осесимметричного тела близки. Это объясняется тем, что главную роль при  $b \gg 1$  играет распределение параметров течения вблизи ударной волны, а не в подслое около тела, где поведение параметров менее существенно для определения  $q_w(\theta)$  и  $y_s(\theta)$ .

Поступила 20 IX 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Wang K. C. Radiating and absorbing steady flow over Symmetric bodies.—*J. Quantit. Spectroscopy and Radiat. Transfer.*, 1968, vol. 8, p. 119.
3. Пилюгин Н. Н. Распределение лучистого теплового потока по поверхности сферы при обтекании ее гиперзвуковым потоком вязкого излучающего газа.—*ПМТФ*, 1972, № 6, с. 44.
4. Гершбейн Э. А., Пилюгин Н. Н., Тирский Г. А. Гиперзвуковое обтекание заглушенных тел произвольной формы вязким излучающим газом при наличии сильного вдува инородных газов.—*Докл. на XXIV Междунар. астронавтич. конгрессе*, 1973, Баку, Препринт Ин-та механики МГУ, окт. 1973.
5. Freeman N. C. On the theory of hypersonic flow past plane and axially symmetric bluff bodies.—*J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 1, N 4, p. 366. Рус. пер. в кн.: *Проблемы движения головной части ракет дальнего действия*. М., ИЛ, 1959.
6. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., ИЛ, 1962.
7. *Таблицы термодинамических функций воздуха для температур 200—6000—12 000—20 000°K*. М., Изд-во АН СССР, 1957, 1959, 1962.
8. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э. Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970.