

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ (ЧАСТОТНО-ЗАВИСИМОЙ) ПРОНИЦАЕМОСТИ И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ АНСАМБЛЯ ПОР

О. Ю. Динариев, Д. Н. Михайлов*

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 123995 Москва

* Московский научно-исследовательский центр компании "Шлюмберже", 101000 Москва
E-mails: dinariev@mail.ru, dmikh@yandex.ru

Изучен класс моделей пористых сред, основанных на концепции ансамбля пор с некоторым распределением основных геометрических параметров (например, размера пор). Исследован случай насыщения порового пространства однофазной многокомпонентной жидкой смесью без учета и с учетом переноса электрических зарядов. Законы переноса выводятся из условия убывания свободной энергии. Гидродинамическая связность пор (и электропроводность) описывается двумя ядрами: одно ядро описывает связность пор в пространстве, другое — связность пор в элементарном макрообъеме. С использованием концепции ансамбля пор адекватно воспроизведены частотные зависимости динамической проницаемости, определяемой в лабораторных экспериментах, и электропроводности пористой среды. Установлена связь между рассматриваемыми моделями и моделями релаксационной фильтрации.

Ключевые слова: пористая среда, ансамбль пор, многокомпонентная смесь, динамическая проницаемость, частотно-зависимая электропроводность пористой среды.

Введение. При математическом описании процессов, происходящих в пористых материалах, используется модель сплошной среды, согласно которой и сам пористый материал, и находящаяся в порах жидкость (или газ) непрерывно распределены в пространстве [1–6]. При этом индивидуальные свойства пор считаются несущественными и учитываются опосредованно в макроскопических коэффициентах пористости и проницаемости.

В то же время экспериментально установлено влияние динамики процесса на коэффициенты абсолютной и фазовых проницаемостей, электропроводность пористых сред и т. д. Это обусловило появление большого количества моделей, учитывающих структуру пор, таких как модели совокупности капилляров или сеточные модели (см. [7]). Отметим, что при построении теории кольматации существенным является закон о распределении пор по размерам [8]. Однако каждая из созданных моделей структуры порового пространства предназначалась для решения определенной частной задачи (расчета фазовых проницаемостей, капиллярного давления и пр.).

В настоящей работе предложен математический формализм, который позволяет единообразно получить все модели, основанные на концепции ансамбля пор. Показано, что с помощью этого подхода можно моделировать явления, ранее рассматривавшиеся как абсолютно независимые (например, релаксационные явления и электропроводность пористых сред). Приведены основные уравнения теории для двух типов однофазного насыщения пористой среды: 1) насыщение электрически нейтральной жидкостью; 2) насыщение электролитом. Представлены результаты численного моделирования динамической (частотно-зависимой) проницаемости и электропроводности пористой среды.

1. Основные положения модели ансамбля пор для однофазного случая. Рассмотрим изотропную однородную недеформируемую пористую среду. Все процессы предполагаются изотермическими, поэтому зависимость параметров от температуры не учитывается. Предполагается также, что гравитационные силы незначительны. Индексы a, b, c , соответствующие порядковым номерам пространственных декартовых координат x^a , принимают значения 1, 2, 3. Индексы i, j, k , соответствующие номерам компонентов смеси, принимают значения $1, \dots, M$. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Для частных производных используются обозначения $\partial_a = \partial/\partial x^a$, $\partial_t = \partial/\partial t$ (t — время).

Для того чтобы определить ансамбль пор, введем понятие собирательного параметра ζ , который перечисляет или индексирует различные поры в выделенном элементарном макрообъеме. Этот параметр может характеризовать геометрические (например, характерный размер) или физико-химические (например, смачиваемость) свойства поры, представлять собой индекс поры при наличии пор различного типа (например, в случае трещиновато-пористой породы) либо совпадать с номером поры.

Далее определяется вероятностная мера $d\mu(\zeta)$ на пространстве пор, которая характеризует частоту появления поры ζ в ансамбле. По определению имеет место условие нормировки

$$\int d\mu(\zeta) = 1.$$

Для каждой поры ζ определяются поровый объем $\nu = \nu(\zeta)$ и площадь поровой поверхности $\sigma = \sigma(\zeta)$. Эти величины предполагаются нормированными на единичный объем таким образом, что их интегрирование по вероятностной мере дает пористость φ и удельную площадь поверхности S соответственно:

$$\varphi = \int \nu(\zeta) d\mu(\zeta), \quad S = \int \sigma(\zeta) d\mu(\zeta). \quad (1.1)$$

Рассмотрим M -компонентную однофазную смесь, насыщающую поровое пространство. Тогда для каждой поры определен набор молярных плотностей компонентов смеси $n_i = n_i(t, x^b, \zeta)$. Изменение этих величин удовлетворяет локальным законам сохранения

$$\partial_t(\nu n_i) + \partial_a i_i^a = j_i, \quad (1.2)$$

где $i_i^a = i_i^a(t, x^b, \zeta)$ — пространственный поток компонента i ; $j_i = j_i(t, x^b, \zeta)$ — приток компонента i к поре ζ из других пор в том же элементарном макрообъеме. В силу условия сохранения компонентов при перетоках между порами величина $j_i = j_i(t, x^b, \zeta)$ удовлетворяет интегральному условию

$$\int j_i(t, x^b, \zeta) d\mu(\zeta) = 0. \quad (1.3)$$

Из (1.2), (1.3) следуют макроскопические уравнения переноса

$$\varphi \partial_t N_i + \partial_a I_i^a = 0, \quad (1.4)$$

$$N_i(t, x^a) = \varphi^{-1} \int n_i(t, x^a, \zeta) \nu(\zeta) d\mu(\zeta), \quad I_i^a(t, x^b) = \int i_i^a(t, x^b, \zeta) d\mu(\zeta).$$

Здесь $N_i(t, x^a)$, $I_i^a(t, x^b)$ — средняя молярная плотность и средний поток в элементарном макрообъеме. Для замыкания задачи (1.2) (так же, как и задачи (1.4)) требуются определяющие соотношения — явные выражения для потоков. Поскольку исследуются изотермические процессы, определяющие соотношения необходимо вводить в соответствии с условием убывания свободной энергии.

Пусть $f = f(n_i)$ — свободная энергия гомогенной смеси (энергия Гельмгольца) в единице объема. Зависимость величины f от температуры не учитывается. Следует отметить, что функция $f = f(n_i)$ удовлетворяет термодинамическим соотношениям [9]

$$\varkappa_i = \frac{\partial f}{\partial n_i}, \quad p = -f + n_i \varkappa_i, \quad dp = n_i d\varkappa_i, \quad (1.5)$$

где $\varkappa_i = \varkappa_i(n_j)$ — химический потенциал компонента i ; $p = p(n_i)$ — гидростатическое давление. Зная свободную энергию частицы смеси, несложно вычислить ее для смеси в порах:

$$H = H_b + H_s. \quad (1.6)$$

Здесь H — свободная энергия смеси в порах в единице объема; H_b — объемная составляющая свободной энергии, H_s — поверхностная энергия, обусловленная взаимодействием смеси с неподвижной твердой фазой:

$$H_b = H_b(t, x^a) = \int f(n_i(t, x^a, \zeta)) \nu(\zeta) d\mu(\zeta),$$

$$H_s = H_s(t, x^a) = \int \gamma_s(n_i(t, x^a, \zeta)) \sigma(\zeta) d\mu(\zeta),$$

γ_s — плотность поверхностной энергии. Дифференцируя по времени величины в (1.6) с использованием уравнения (1.2) и соотношений (1.5), получаем уравнение эволюции свободной энергии

$$\partial_t H + \partial_a H^a = \Sigma_1, \quad (1.7)$$

где

$$H^a = \int i_i^a \xi_i d\mu(\zeta), \quad \Sigma_1 = \int (j_i \xi_i + i_i^a \partial_a \xi_i) d\mu(\zeta), \quad \xi_i = \varkappa_i + \sigma \nu^{-1} \frac{\partial \gamma_s}{\partial n_i}.$$

Уравнение (1.7) позволяет интерпретировать величину Σ_1 как диссипативную функцию. Величина Σ_1 не может быть положительной, так как диссипативные процессы должны приводить к уменьшению свободной энергии ($\Sigma_1 \leq 0$).

Условие $\Sigma_1 \leq 0$ позволяет сформулировать определяющие соотношения в виде

$$i_i^a(t, x^b, \zeta) = - \int k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') \partial_a \xi_j(t, x^b, \zeta') d\mu(\zeta'),$$

$$j_i(t, x^a, \zeta) = \int d_{ij}(t, x^a, \zeta, \zeta') (\xi_j(t, x^a, \zeta') - \xi_j(t, x^a, \zeta)) d\mu(\zeta'). \quad (1.8)$$

Ядра, содержащиеся в (1.8), должны быть симметричными в соответствии с условиями Онзагера [10]

$$k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') = k_{ji}(t, x^b, \zeta', \zeta), \quad d_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') = d_{ji}(t, x^b, \zeta', \zeta),$$

и, кроме того, интегральные операторы, определяемые этими ядрами, должны быть неотрицательными. Из определяющих соотношений (1.8) следует, что движущей силой переноса между порами служат градиенты величин ξ_i . При этом выражения для потоков (1.8)

справедливы как в случае гидродинамического переноса (под действием перепада давления), так и в случае диффузионного переноса. В настоящей работе рассматривается перенос, обусловленный перепадом давления. Будем полагать, что плотность поверхностной энергии γ_s (коэффициент поверхностного натяжения) и сдвиговая вязкость η являются постоянными величинами. Будем также считать, что ядра гидродинамической связности пор k_{ij} , d_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') &= \eta^{-1} n_i(t, x^b, \zeta) n_j(t, x^b, \zeta') k(\zeta, \zeta'), \\ d_{ij}(t, x^a, \zeta, \zeta') &= \eta^{-1} n_i(t, x^b, \zeta) n_j(t, x^b, \zeta') d(\zeta, \zeta'). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ядра $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$ должны быть симметричными, а соответствующие интегральные операторы — неотрицательными. С использованием выражений (1.9) и соотношений (1.5) в предположении, что значения химических потенциалов в разных порах в одном элементарном макрообъеме близки, с учетом последнего соотношения в (1.5) можно приближенно заменить соотношения (1.8) более простыми

$$i_i^a(t, x^b, \zeta) = -\frac{1}{\eta} n_i(t, x^b, \zeta) \int k(\zeta, \zeta') \partial_{ap}(t, x^b, \zeta') d\mu(\zeta'), \quad (1.10)$$

$$j_i(t, x^a, \zeta) = \frac{1}{\eta} \int d(\zeta, \zeta') [p(t, x^b, \zeta') - p(t, x^b, \zeta)] [\varepsilon n_i(t, x^a, \zeta') + (1 - \varepsilon) n_i(t, x^a, \zeta)] d\mu(\zeta'),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & p(t, x^b, \zeta') \geq p(t, x^b, \zeta), \\ 0, & p(t, x^b, \zeta') < p(t, x^b, \zeta). \end{cases}$$

Соотношения (1.10), удовлетворяющие условиям $\Sigma_1 \leq 0$ и (1.3), совместно с уравнением состояния $p = p(n_i)$ замыкают задачу (1.2). Наличие определяющих соотношений в задаче переноса в ансамбле пор (1.2), вообще говоря, не означает наличия определяющих соотношений в макроскопической задаче фильтрации (1.4). Макроскопический закон фильтрации может быть строго выведен только при некоторых дополнительных предположениях.

Предположим, что имеется однокомпонентная жидкость, причем ядро $d(\zeta, \zeta')$ принимает очень большие значения, вследствие чего происходит быстрое выравнивание давления в ансамбле пор. Тогда получаем обычный макроскопический закон фильтрации Дарси

$$I_1^a = -\eta^{-1} \tilde{K} N_1(t, x^a) \partial_{ap},$$

где

$$\tilde{K} = \int k(\zeta, \zeta') d\mu(\zeta) d\mu(\zeta'), \quad (1.11)$$

причем коэффициент макроскопической проницаемости K связан с ядром $k(\zeta, \zeta')$ интегральным соотношением (1.11).

2. Моделирование динамической (частотно-зависимой) проницаемости. Одной из наиболее важных характеристик пористой среды является динамическая (частотно-зависимая) проницаемость, определяющая усредненный (макроскопический) расход насыщающего флюида при наложении переменного перепада давления. Обычно в лабораторных

экспериментах для измерения этого параметра к образцу пористой среды прикладывается гармонически изменяющийся градиент давления $\nabla P \exp(i\omega t)$, где ω — частота. В этом случае согласно закону Дарси объемный расход флюида $Q(\omega)$ равен

$$Q(\omega) = -\eta^{-1}K(\omega) \nabla P(\omega)$$

(η — вязкость флюида; $K(\omega)$ — динамическая проницаемость).

С физической точки зрения зависимость расхода жидкости от частоты изменения давления обусловлена неньютоновскими реологическими свойствами насыщающей жидкости и сложной конфигурацией порового пространства (для перестройки структуры межпоровых перетоков требуется некоторое время). С математической точки зрения динамическая проницаемость является комплексной величиной.

В работе [11] впервые представлены данные экспериментов по определению динамической проницаемости и результаты численных расчетов для модельной периодической пористой среды.

В [12, 13] опубликованы экспериментальные результаты определения динамической проницаемости для иных идеализированных моделей пористых сред: набора капиллярных трубок, “набивки” частичек (стеклянные шарики или зернышки песка) близкого размера, толченого стекла. Во всех экспериментах в качестве насыщающей жидкости использовалась вода.

Данные лабораторных измерений [12, 13] согласуются с результатами численных расчетов динамической проницаемости [14, 15], выполненных для ряда простых моделей пористых сред.

Для аппроксимации экспериментально измеряемой частотной зависимости динамической проницаемости в работе [16] предложена функция

$$\frac{K(\omega)}{K_0} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} i M_* \frac{\omega}{\omega_{cr}}} + i \frac{\omega}{\omega_{cr}} \right)^{-1}, \quad M_* = \frac{8\alpha_\infty K_0}{\varphi \Lambda^2}, \quad (2.1)$$

где φ — пористость; α_∞ — параметр присоединенной массы $\alpha(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \alpha_\infty$; Λ — эффективный размер пор (отношение объема поры к площади ее поверхности, определяемое по результатам измерения электропроводности пористой среды [16, 17]); $\omega_{cr} = \eta\varphi/(\rho K_0 \alpha_\infty)$ — критическая частота Био, характеризующая переход от режима доминирования вязких сил к режиму доминирования сил инерции.

Большинство известных экспериментальных данных и результатов численных расчетов (см., например, [12–15]) хорошо аппроксимируются функцией (2.1) с параметром $M_* = 1$. Однако необходимо учесть, что все лабораторные измерения динамической проницаемости выполнялись для некоторых идеализированных моделей пористых сред. Реальные пористые среды имеют значительно более сложную структуру порового пространства и содержат поры, существенно различающиеся как по размерам, так и по характеру межпоровых связей. Поэтому представляется перспективным применение изложенного выше математического формализма (см. п. 1) для моделирования динамической проницаемости реальных пористых сред.

Рассмотрим однофазный случай, когда среда с ансамблем пор насыщена однокомпонентной слабосжимаемой жидкостью. Пусть все переменные, характеризующие поле, зависят только от времени t и пространственной координаты x^1 . Однокомпонентная насыщающая жидкость является упругой и характеризуется линейным уравнением состояния

$$p = p_0 + \beta^{-1}(n_1 - n_{10})/n_{10}. \quad (2.2)$$

При этом предполагается, что плотность изменяется незначительно: $|n_1 - n_{10}|/n_{10} \ll 1$.

Из уравнений (1.2), (2.2) с учетом (1.10) выводится линейное уравнение для давления

$$\beta\nu \partial_t p + \partial_1 i_* = j_*, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} i_*(t, x^1, \zeta) &= -\frac{1}{\eta} \int k(\zeta, \zeta') \partial_1 p(t, x^1, \zeta') d\mu(\zeta'), \\ j_*(t, x^1, \zeta) &= \frac{1}{\eta} \int d(\zeta, \zeta') (p(t, x^1, \zeta') - p(t, x^1, \zeta)) d\mu(\zeta'). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для того чтобы записать решение задачи (2.3), (2.4) в компактном виде, удобно ввести следующие обозначения. Будем рассматривать функции параметра ζ как элементы функционального пространства $L_2(d\mu(\zeta))$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этих обозначениях правые части выражений (2.4) представляются в операторном виде

$$i_* = -\eta^{-1} K \partial_1 p, \quad j_* = -\eta^{-1} D p,$$

где K, D — самосопряженные неотрицательные операторы. Далее, нетривиальное (непостоянное) поле давления может быть обусловлено наличием подходящих граничных и начальных условий или внешних источников. Будем решать задачу в бесконечном пространстве с внешними источниками:

$$\beta\nu \partial_t p + \partial_1 i_* = j_* + \theta_* s$$

($\theta_* = \theta_*(\zeta) = 1$ — фиксированная функция параметра ζ ; $s = s(t, x^1)$ — произвольная функция источников). Выполнив преобразование Фурье по времени и координате:

$$p_F = p_F(\omega, \chi, \zeta) = \int \exp(-i\omega t - i\chi x^1) p(t, x^1, \zeta) dt dx^1,$$

решение для давления получаем в операторном виде

$$p_F = \eta(i\eta\beta\nu\omega + \chi^2 K + D)^{-1} \theta_* s_F. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) позволяет найти связь между макроскопическим давлением $P = \varphi^{-1} \langle \nu \theta_0, p \rangle$ и макроскопическим потоком $I = \langle \theta_0, i_* \rangle$. Выполнив необходимые преобразования, получаем нелокальный макроскопический закон фильтрации

$$I(t, x^1) = -\frac{1}{\eta} \int \Pi(t - t', x^1 - (x^1)') \partial_1 P(t', (x^1)') dt' d(x^1)'; \quad (2.6)$$

$$\Pi_F(\omega, \chi) = \varphi \frac{\langle \theta_0, K(i\eta\beta\nu\omega + \chi^2 K + D)^{-1} \theta_* \rangle}{\langle \nu \theta_0, (i\eta\beta\nu\omega + \chi^2 K + D)^{-1} \theta_* \rangle}. \quad (2.7)$$

При $\text{Im } \omega < 0$ функция (2.7) голоморфна, поэтому согласно теореме Пэли — Винера [18] нелокальный закон фильтрации (2.6) удовлетворяет условию причинности. Нелокальные законы фильтрации (особенно релаксационные законы фильтрации с нелокальностью по времени) возникают при постановке различных задач, наблюдались в экспериментах и изучались во многих работах (см. [19–24]). Чисто релаксационный закон фильтрации получается из соотношений (2.6), (2.7) в пределе малых волновых чисел (или длинных волн) $\chi \rightarrow 0$. Таким образом, существует связь между моделями с ансамблем пор и макроскопическими релаксационными моделями. Отметим, что в соответствии с (1.11) имеет место

переход к закону Дарси для медленных процессов и длинных волн с макроскопическим коэффициентом проницаемости

$$\tilde{K} = \int \Pi(t, x^1) dt dx^1 = \Pi_F(0, 0).$$

Рассмотрим предельный случай бесконечно длинных волн $\chi = 0$. В этом случае выражение для знаменателя дроби в (2.7) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \langle \nu \theta_0, (i\eta\beta\nu\omega + D)^{-1}\theta_* \rangle &= (i\eta\beta\omega)^{-1} \langle (-i\eta\beta\nu\omega + D)\theta_0, (i\eta\beta\nu\omega + D)^{-1}\theta_* \rangle = \\ &= (i\eta\beta\omega)^{-1} \langle \theta_0, \theta_* \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В низкочастотном пределе ($\omega \rightarrow 0$) справедливо следующее разложение:

$$(i\eta\beta\nu\omega + D)^{-1}\theta_* = (i\eta\beta\omega\varphi)^{-1} \langle \theta_0, \theta_* \rangle \theta_0 + \theta_{**}, \quad \langle \theta_0, \theta_{**} \rangle = 0, \quad \theta_{**} = O(1).$$

Тогда асимптотическое (при $\omega \rightarrow 0$) выражение для динамической проницаемости имеет вид

$$K(\omega) = \Pi_F(\omega, 0) = \langle \theta_0, K\theta_0 \rangle + O(|\omega|). \quad (2.9)$$

Следует отметить, что выражение (2.9) не зависит от функции θ_* и совпадает с выражением (1.11).

Одним из основных требований, предъявляемых к частотно-зависимой функции проницаемости $K(\omega)$, является ее согласованность со вторым законом термодинамики для систем с памятью [25], что соответствует неравенству $\text{Re } K(\omega) \geq 0$. Для проверки этого неравенства применим спектральное разложение самосопряженного неотрицательного оператора [26]:

$$\nu^{-1/2} D \nu^{-1/2} = \int \lambda P_\lambda d\lambda. \quad (2.10)$$

Здесь $\lambda \geq 0$ — спектральный параметр; P_λ — оператор, проецирующий на собственный вектор θ_λ с собственным значением λ . Используя (2.8) и (2.10), получаем

$$\begin{aligned} K(\omega) = \Pi_F(\omega, 0) &= i\varphi\eta\beta\omega \frac{\langle \theta_0, K(i\eta\beta\nu\omega + D)^{-1}\theta_* \rangle}{\langle \theta_0, \theta_* \rangle} = \\ &= \frac{i\eta\varphi\beta\omega}{\langle \theta_0, \theta_* \rangle} \int \frac{\langle \theta_0, K\nu^{-1/2}\theta_\lambda \rangle \langle \theta_\lambda, \nu^{-1/2}\theta_{*\lambda} \rangle}{i\eta\beta\omega + \lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Предполагая справедливость неравенства

$$a_\lambda = \frac{\langle \theta_0, K\nu^{-1/2}\theta_\lambda \rangle \langle \theta_\lambda, \nu^{-1/2}\theta_{*\lambda} \rangle}{\langle \theta_0, \theta_* \rangle} \geq 0$$

(которое должно быть проверено для конкретных ядер $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$ и функций $\nu(\zeta)$, $\theta_*(\zeta)$), из (2.11) получаем

$$\text{Re } K(\omega) = \eta^2 \varphi \beta^2 \omega^2 \int \frac{a_\lambda d\lambda}{|i\eta\beta\omega + \lambda|^2} \geq 0.$$

Таким образом, условие $\text{Re } K(\omega) \geq 0$ выполняется, а развиваемая теория не противоречит второму закону термодинамики.

Данный вывод справедлив также в случае насыщения пористой среды вязкоупругой жидкостью. В этом случае вязкость является не постоянной величиной, а некоторой функцией частоты: $\eta = \eta(\omega)$. Поскольку вязкоупругая жидкость также должна удовлетворять второму закону термодинамики [25], справедливо неравенство $\operatorname{Re} \eta(\omega) \geq 0$.

Несмотря на то что в данном случае неравенство $\operatorname{Re} K(\omega) \geq 0$ может не являться истинным, противоречия со вторым началом термодинамики не возникает, так как необходимое неравенство справедливо в случае подвижности насыщающего флюида:

$$\operatorname{Re} \frac{K(\omega)}{\eta(\omega)} = \varphi \beta \omega^2 \int \frac{a_\lambda d\lambda}{|i\beta\omega\eta(\omega) + \lambda|^2} \operatorname{Re} \eta(\omega) \geq 0.$$

Выполним некоторые расчеты динамической проницаемости.

Пусть параметр ζ имеет смысл характерного размера пор, а распределение пор по размерам соответствует логнормальному распределению

$$d\mu(\zeta) = g(\zeta) d\zeta, \quad g(\zeta) = \frac{1}{\zeta \sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} \ln^2 \left(\frac{\zeta}{l} \right) \right], \quad (2.12)$$

где l — характерный размер пор; σ_* — среднеквадратичное отклонение.

В соответствии с первым условием нормировки (1.1) выражение для порового объема запишем в виде

$$\nu(\zeta) = \varphi \exp^{-1} (9\sigma_*^2/2) \zeta^3 l^{-3}. \quad (2.13)$$

Выражения для ядер $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$ также построим на основе логнормального распределения:

$$\begin{aligned} k(\zeta, \zeta') &= K_0 \Xi \frac{\sqrt{\zeta \zeta'}}{l \sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} \ln^2 \left(\frac{\zeta}{\zeta'} \right) \right], \\ d(\zeta, \zeta') &= d_0 \frac{\sqrt{\zeta \zeta'}}{l \sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} \ln^2 \left(\frac{\zeta}{\zeta'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь K_0 — макроскопическая проницаемость; d_0 — коэффициент, определяющий интенсивность перетоков между порами в одном и том же элементарном макрообъеме; коэффициент Ξ соответствует условию нормировки $K_0 = \iint k(\zeta, \zeta') d\mu(\zeta') \mu(\zeta)$.

Примем следующие значения параметров распределения по размерам: $l = 0,4$ мкм, $\sigma_* = 0,459$. Поскольку большинство лабораторных экспериментов по определению динамической проницаемости [12, 13] проводилось для водонасыщенных пористых сред, зададим следующие значения параметров: $\varphi = 0,3$, $\eta = 10^{-3}$ Па·с, $K_0 = 10^{-12}$ м², $\beta = 4 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, $\rho = 10^3$ кг/м³. Кроме того, положим $d_0 = 2 \cdot 10^{-8}$.

Следует отметить, что при заданных значениях параметров критическая частота Био $\omega_{cr} \approx 300$ кГц (см. (2.1)). Поскольку в рамках изложенной выше концепции ансамбля пор инерционные силы не учитываются, необходимо ограничиться расчетами в низкочастотном диапазоне ($\omega \ll \omega_{cr}$), в котором доминируют вязкие силы. Будем считать, что частота изменяется в диапазоне $0 \leq \omega \leq 30$ кГц.

На рис. 1 представлены зависимости нормированного модуля динамической проницаемости $|K|/K_0$ и фазового сдвига Ψ (в градусах) от частоты, полученные по формуле (2.7). Для сравнения на рис. 1 приведены результаты расчетов по аппроксимирующей функции (2.1) при $M_* = 1, 10$. Видно, что результаты моделирования динамической про-

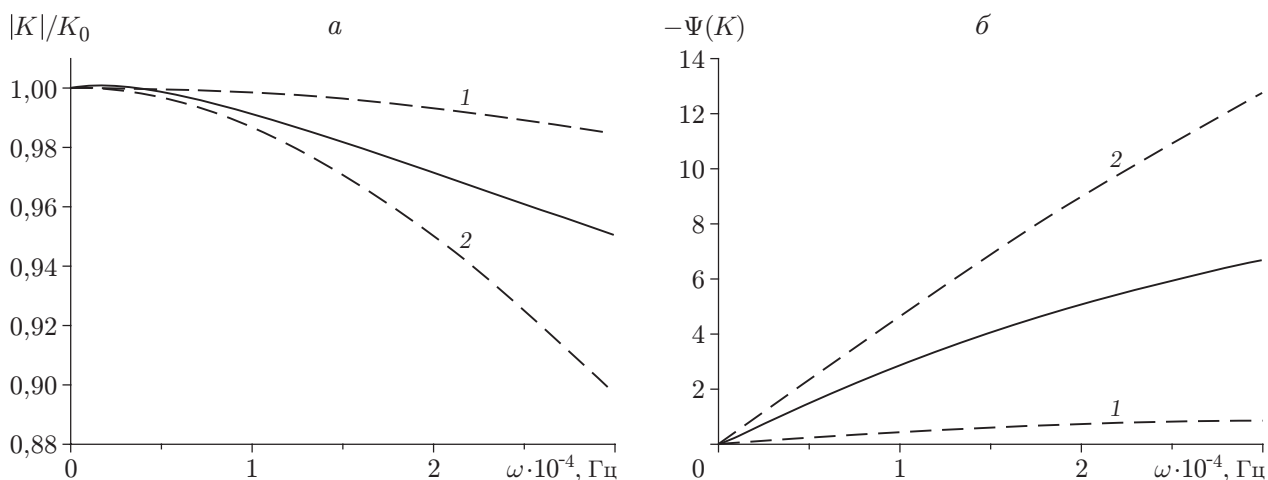


Рис. 1. Зависимости нормированного модуля динамической проницаемости $|K|/K_0$ (а) и фазового сдвига Ψ (в градусах) (б) от частоты: сплошная линия — расчет по формуле (2.7); штриховые — расчет по аппроксимирующей зависимости (2.1) (1 — $M_* = 1$; 2 — $M_* = 10$)

ницаемости хорошо согласуются как с данными лабораторных измерений [12, 13], так и с теоретическими данными [14, 15].

Заметим, что в рамках изложенного выше подхода динамическая проницаемость определяется видом межпоровых связей (т. е. ядрами $k(\zeta, \zeta')$ и $d(\zeta, \zeta')$), которые могут быть восстановлены, например, с помощью анализа срезов керна, с использованием трехмерных микромоделей, полученных методами рентгеновской или ядерно-магнитной томографии, или путем сравнения результатов расчетов распространения пассивной примеси, гистерезиса капиллярного давления и т. д. [27] с соответствующими экспериментальными данными. Предложенный математический формализм имеет универсальный характер и позволяет единообразно описать все модели, основанные на концепции ансамбля пор [27].

Развиваемую теорию нетрудно обобщить на случай вязкоупругой насыщающей жидкости, что особенно важно при моделировании динамического течения тяжелых нефтей в пористых средах. В этом случае вязкость насыщающего флюида является не постоянной величиной, а некоторой функцией частоты: $\eta = \eta(\omega)$.

Рассмотрим зависимость вязкости насыщающей жидкости от частоты, характеризующуюся временами релаксации τ_1 и τ_2 :

$$\eta(\omega) = \frac{\eta_0}{2} \left(\frac{1}{1 + i\omega\tau_1} + \frac{1}{1 + i\omega\tau_2} \right), \quad (2.15)$$

и зададим следующие значения параметров: $\varphi_0 = 0,3$, $\eta_0 = 10^{-3}$ Па·с, $K_0 = 10^{-12}$ м², $\beta = 4 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, $\rho = 10^3$ кг/м³, $d_0 = 2 \cdot 10^{-8}$.

На рис. 2–4 представлены расчетные частотные зависимости нормированного модуля и фазового сдвига Ψ вязкости насыщающей жидкости, динамической проницаемости и гидродинамической подвижности $\delta(\omega) = K(\omega)/\eta(\omega)$. Результаты численных расчетов свидетельствуют о том, что вязкоупругие свойства насыщающей жидкости оказывают существенное влияние на частотную зависимость проницаемости породы.

Изложенная теория позволяет определить динамическую проницаемость пористой среды, насыщенной вязкоупругой жидкостью, с использованием частотной зависимости вязкости данной жидкости $\eta(\omega)$ и результатов измерения динамической проницаемости для той же пористой среды, насыщенной ньютоновской жидкостью.

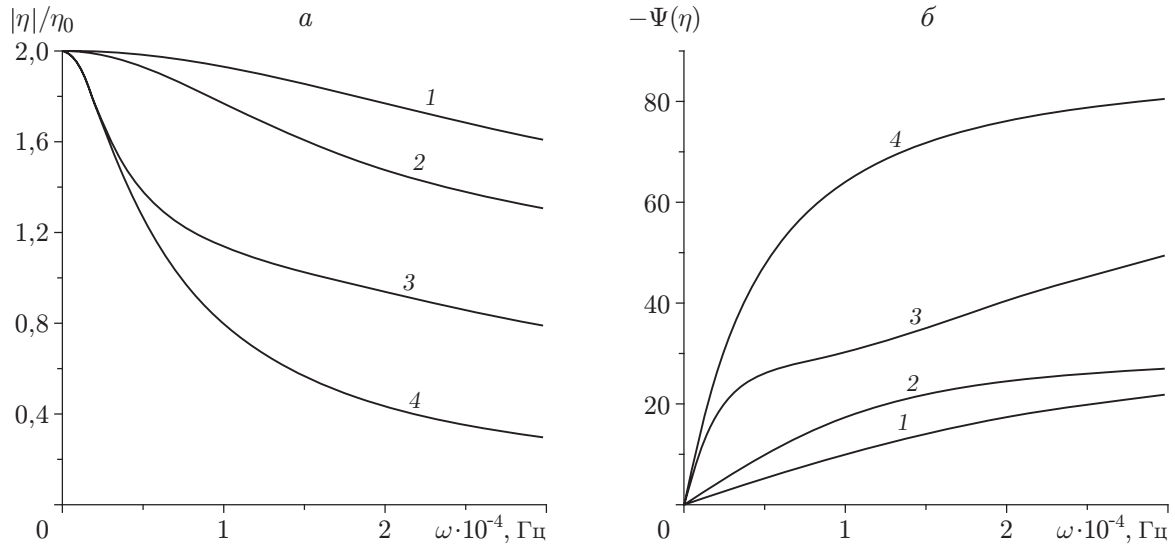


Рис. 2. Частотные зависимости нормированного модуля (*a*) и фазового сдвига Ψ (*б*) вязкости вязкоупругой насыщающей жидкости, рассчитанные по формуле (2.15):

1 — $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ с, $\tau_2 = 3 \cdot 10^{-4}$ с; 2 — $\tau_1 = 6 \cdot 10^{-5}$ с, $\tau_2 = 6 \cdot 10^{-4}$ с; 3 — $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ с, $\tau_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ с; 4 — $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ с, $\tau_2 = 10^{-4}$ с

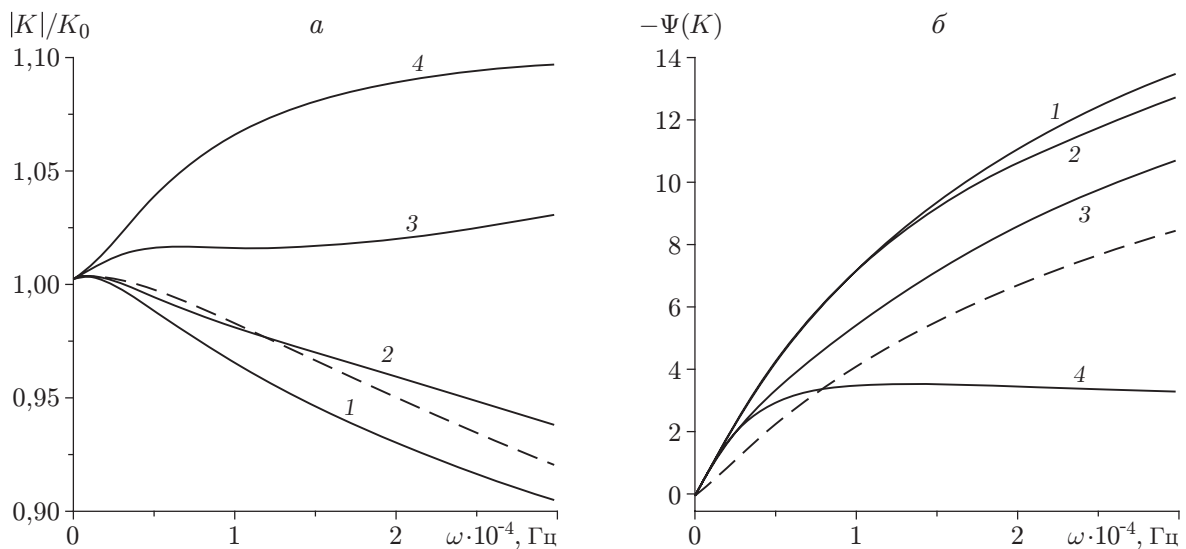


Рис. 3. Частотные зависимости нормированного модуля (*a*) и фазового сдвига (*б*) динамической проницаемости пористой среды при ее насыщении вязкоупругой жидкостью, рассчитанные по формуле (2.15):

штриховые кривые — результаты расчетов в случае насыщения пористой среды ньютоновской жидкостью; остальные обозначения те же, что на рис. 2

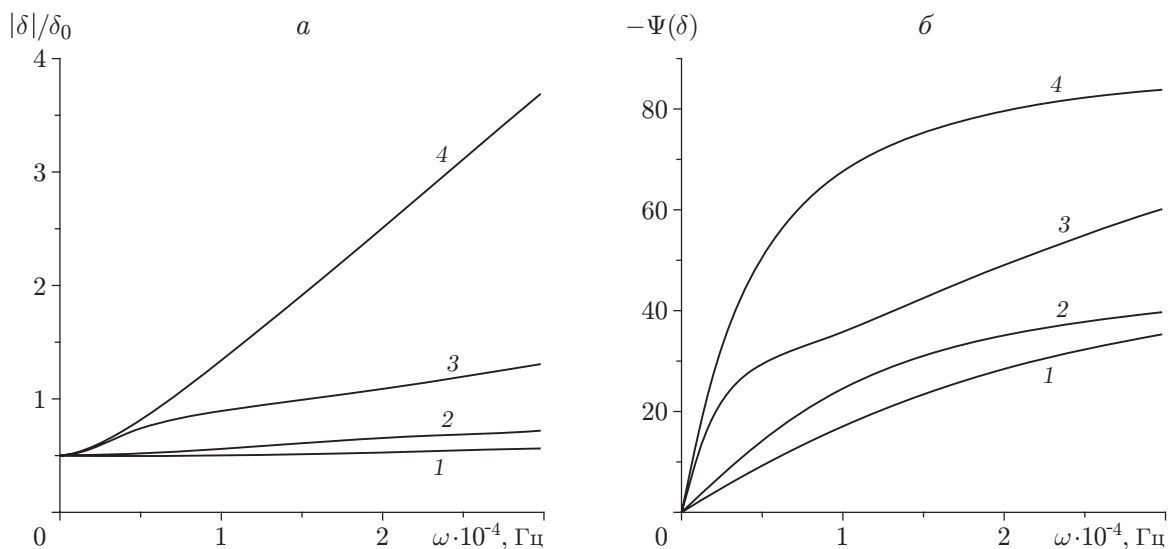


Рис. 4. Частотные зависимости нормированного модуля (а) и фазового сдвига (б) подвижности насыщающей фазы (обозначения те же, что на рис. 2)

3. Моделирование частотно-зависимой электропроводности пористой среды. В последнее время существенно возрос интерес к исследованию механизмов, связывающих гидро- и электропроводность пористой среды, насыщенной электролитом. Например, на основе результатов измерения электропроводности предлагается оценивать проницаемость пористой среды [28–32]. (Действительно, если поры заполнены проводящей жидкостью, а материал матрицы является диэлектриком, то по электропроводности можно судить как об объемной доле насыщающей фазы, так и об извилистости поровых каналов, через которые течет ток.)

Фундаментальным эмпирическим законом, связывающим электропроводность насыщенной пористой среды и пористость φ , является закон Арчи

$$F = \sigma_f / \sigma_r = \varphi^{-m},$$

где m — структурный показатель, зависящий от степени сцементированности породы; σ_r — электропроводность насыщенной пористой среды; σ_f — электропроводность насыщающей жидкости (предполагается, что материал пористой матрицы является диэлектриком).

В простейшем случае, когда используется набор извилистых трубок, связь между пористостью и проницаемостью выражается формулой Козени — Кармана [7].

Однако для реальных пористых сред со сложной структурой межпоровых связей их проницаемость, в отличие от электропроводности, зависит не только от пористости и извилистости поровых каналов, но и от характерной длины пор, по которым течет жидкость. В работах [28–32] предложены более сложные зависимости между проницаемостью и электропроводностью пористой среды, косвенно учитывающие размер динамически связанных пор.

Напомним, что в концепции ансамбля пор, изложенной выше, гидродинамическая связанность пор описывается с помощью ядер $k(\zeta, \zeta')$ и $d(\zeta, \zeta')$. В случае когда материал пористой матрицы является диэлектриком, структура именно этих ядер определяет каналы проводимости для электрического тока. Поэтому представляется логичным обобщение модели на случай насыщения пористой среды электролитом.

Как и выше (см. п. 1), рассмотрим изотермический однофазный случай, когда все поровое пространство заполнено M -компонентной смесью. Предположим, что некоторые компоненты насыщающей смеси обладают электрическим зарядом e_i , пористая среда помещена во внешнее электрическое поле (и (или) находится под действием внешних источников гидродинамических возмущений), материал матрицы является диэлектриком.

Введем электрический потенциал, имеющий некоторое распределение по ансамблю пор и в пространстве:

$$\varphi_e = \varphi_e(t, x^a, \zeta).$$

В рамках квазистационарного приближения распределение электрического потенциала описывается линейным уравнением

$$\int \{k_e(\zeta, \zeta') \partial_a \partial_a \varphi_e(t, x^b, \zeta') + d_e(\zeta, \zeta') [\varphi_e(t, x^b, \zeta') - \varphi_e(t, x^b, \zeta)]\} d\mu(\zeta') = \varepsilon_0^{-1} (\rho_{ext} + \rho_e), \quad (3.1)$$

где $k_e(\zeta, \zeta')$, $d_e(\zeta, \zeta')$ — ядра, определяющие электропроводящую связь между порами ζ и ζ' в пространстве и элементарном макрообъеме соответственно; $\rho_{ext}(t, x^a, \zeta)$ — внешний электрический заряд; $\rho_e(t, x^a, \zeta) = e_j n_j(t, x^a, \zeta)$ — объемная плотность электрического заряда смеси; e_i — электрический заряд компонентов насыщающей смеси; ε_0 — электрическая постоянная.

Динамика молярных плотностей компонентов смеси $n_i = n_i(t, x^b, \zeta)$ подчиняется локальным законам сохранения (1.2).

Выведем определяющие соотношения (явные выражения для гидродинамических потоков). Как и выше (см. п. 1), в случае изотермического процесса это можно сделать с использованием условия убывания свободной энергии.

Следует отметить, что полная электропроводность пористой среды складывается из объемной проводимости (за счет подвижности заряженных частиц в объеме электролита) и поверхностной проводимости, обусловленной избытком подвижных ионов в диффундирующей области двойного электрического слоя [33]. Далее учитывается только объемная проводимость насыщающего электролита.

В случае когда пористая среда насыщена электролитом и помещена во внешнее электрическое поле, в полученное выше выражение для объемной составляющей свободной энергии смеси (1.6) добавляется член

$$H_b = H_b(t, x^a) = \int f(n_i(t, x^a, \zeta)) \nu(\zeta) d\mu(\zeta) + \int \rho_e(t, x^a, \zeta) \varphi_e(t, x^a, \zeta) \nu(\zeta) d\mu(\zeta). \quad (3.2)$$

Поверхностная энергия, так же как и поверхностная электропроводность, не учитывается. Дифференцируя (3.2) по времени и используя уравнение сохранения (1.2), получаем уравнение эволюции свободной энергии

$$\partial_t H_b + \partial_a H_b^a = \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_2 = \int (j_i \xi_i + i_i^a \partial_a \xi_i) d\mu(\zeta), \quad H_b^a = \int i_i^a \xi_i d\mu(\zeta), \quad \xi_i = \varkappa_i + e_i \varphi_e.$$

С использованием условия убывания свободной энергии (что соответствует неравенству $\Sigma_2 \leq 0$) получаем выражения для потоков в форме, аналогичной (1.8):

$$i_i^a(t, x^b, \zeta) = - \int k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') \partial_a \xi_j(t, x^b, \zeta') d\mu(\zeta'); \quad (3.3)$$

$$j_i(t, x^a, \zeta) = \int d_{ij}(t, x^a, \zeta, \zeta') (\xi_j(t, x^a, \zeta') - \xi_j(t, x^a, \zeta)) d\mu(\zeta'). \quad (3.4)$$

Однако представление ядер k_{ij} и d_{ij} в виде (1.9) не всегда справедливо при описании электроосмотических явлений [34, 35], поскольку не все компоненты смеси являются одинаково подвижными. Например, некоторые заряженные компоненты насыщающей смеси могут осаждаться на поверхности поровых каналов.

С учетом сказанного выше имеем следующее разложение для ядер k_{ij} и d_{ij} :

$$\begin{aligned} k_{ij}(t, x^a, \zeta, \zeta') &= a_i(\zeta) a_j(\zeta') k(\zeta, \zeta'), \\ d_{ij}(t, x^a, \zeta, \zeta') &= a_i(\zeta) a_j(\zeta') d(\zeta, \zeta'). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В частном случае, когда $a_i(\zeta) = \eta^{-1/2} n_{i0}(\zeta)$, разложение (3.5) совпадает с (1.9). В общем случае эти разложения различны. Равенство нулю коэффициента $a_i(\zeta)$ для некоторого компонента смеси с номером i означает, что данный компонент неподвижен.

По аналогии с п. 2 введем функциональное пространство $L_2(d\mu(\zeta))$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и найдем решение задачи в бесконечном пространстве с внешними источниками электрического поля:

$$\delta \rho_{ext} = s^\varphi \theta_1$$

($\theta_1 = \theta_1(\zeta)$ — некоторая функция параметра ζ ; $s^\varphi = s^\varphi(t, x^a)$ — произвольная функция источника электрического поля).

При описании динамической электропроводности возмущение плотности компонентов смеси целесообразно представить в виде

$$\delta n_i(t, x^a, \zeta) = a_i(\zeta) \beta_1(\zeta) w(t, x^a, \zeta), \quad (3.6)$$

где

$$\beta_1 = \left(a_k a_m \frac{\partial \chi_k}{\partial n_m} \right)^{-1}.$$

Выполняя преобразование Фурье по пространству и времени, подставляя (3.6) в (3.3), (3.4) с учетом разложения (3.5) и используя уравнение баланса масс (1.2) с внешними гидродинамическими источниками, получаем уравнение, связывающее фурье-образы возмущения плотности компонентов смеси и электрического потенциала:

$$[i\beta_1 \nu \omega - R(\zeta) + \chi_a \chi_a K + D] w_F + (\chi_a \chi_a K + D)(q \delta \varphi_{eF}) = \theta_0 s_F^h. \quad (3.7)$$

Здесь

$$R(\zeta) = \int d(\zeta, \zeta') [1 - a_j(\zeta') a_j^{-1}(\zeta)] d\mu(\zeta'),$$

$s^h = s^h(t, x^a)$ — произвольная скалярная функция (функция источников возмущения для плотности компонентов); $q = e_j a_j$; χ_a — волновое число.

Из уравнения (3.7) следует выражение для возмущения плотности компонентов смеси в операторном виде

$$w_F = -L_1 \delta\varphi_{eF} + L_2 \theta_0 s_F^h, \quad (3.8)$$

где

$$L_1 = L_1(\omega, \chi_a) = (i\beta_1 \nu \omega - R(\zeta) + \chi_a \chi_a K + D)^{-1} (\chi_a \chi_a K + D) q,$$

$$L_2 = L_2(\omega, \chi_a) = (i\beta_1 \nu \omega - R(\zeta) + \chi_a \chi_a K + D)^{-1}.$$

Подставляя (3.8) в (3.1) и учитывая выражения для объемной плотности электрического заряда смеси $\rho_e(t, x^a, \zeta) = e_j n_j(t, x^a, \zeta)$, получаем выражение для возмущения потенциала

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{eF}(\omega, \zeta) = & [q\beta_1 L_1 - \varepsilon_0(\chi_a \chi_a K_e + D_e)]^{-1} \theta_1 s_F^\varphi + \\ & + [q\beta_1 L_1 - \varepsilon_0(\chi_a \chi_a K_e + D_e)]^{-1} q\beta_1 L_2 \theta_0 s_F^h. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Рассмотрим частный случай, когда насыщенная электролитом пористая среда подвергается воздействию только внешнего электрического поля, что характерно при электрокаротаже скважин. Тогда $s^h = 0$, $s^\varphi \neq 0$. Тем не менее с помощью (3.8), (3.9) можно также описать класс задач с внешними источниками гидродинамических возмущений, что характерно для электрокинетических процессов.

Макроскопический электрический потенциал Φ_e и макроскопическая сила тока J_a определяются путем усреднения по ансамблю пор:

$$\Phi_e = \varphi^{-1} \langle \nu \theta_0, \varphi_{eF} \rangle, \quad J = e \langle \theta_0, i_* \rangle.$$

Используя известную связь электропроводности среды и электрического потенциала, после необходимых преобразований получаем нелокальный макроскопический закон Ома

$$J_a(t, x^b) = - \int \Pi_e(t - t', x^b - (x^b)') \partial_a \Phi_e(t', (x^b)') dt' d(x^b)',$$

где выражение для нелокального ядра электропроводности следует из (3.3), (3.8), (3.9):

$$\begin{aligned} \Pi_{eF}(\omega, \chi_a) = \\ = \varphi \frac{i\omega \langle \theta_0, qK(i\beta_1 \nu \omega - R + \chi_a \chi_a K + D)^{-1} \beta_1 \nu [\varepsilon_0(\chi_a \chi_a K_e + D_e) + q\beta_1 L]^{-1} \theta_1 \rangle}{\langle \theta_0 \nu, [q\beta_1 L - \varepsilon_0(\chi_a \chi_a K_e + D_e)]^{-1} \theta_1 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что (3.10) не зависит от вида функции источников. Выражение для частотно-зависимой электропроводности $\sigma_{eF}(\omega)$ следует из (3.10) в пределе бесконечно длинных волн ($\chi_a \approx 0$):

$$\sigma_{eF}(\omega) = \Pi_{eF}(\omega, 0) = \varphi \frac{i\omega \langle \theta_0, qK(i\beta_1 \nu \omega - R + D)^{-1} \beta_1 \nu (\varepsilon_0 D_e + q\beta_1 L)^{-1} \theta_1 \rangle}{\langle \theta_0 \nu, (q\beta_1 L - \varepsilon_0 D_e)^{-1} \theta_1 \rangle}.$$

Здесь $L = (i\beta_1 \nu \omega - R + D)^{-1} D q$.

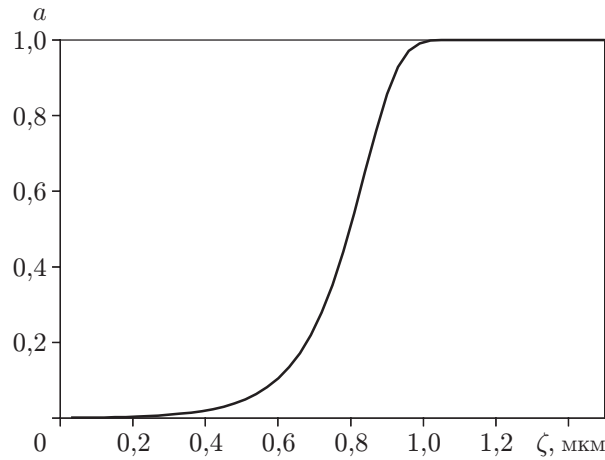


Рис. 5. Зависимость коэффициента подвижности компонентов смеси от размера пор

Для упрощения задачи предположим, что ядра электропроводности и гидропроводности насыщенной пористой среды пропорциональны:

$$d_e(\zeta, \zeta') = \delta_* d(\zeta, \zeta'). \tag{3.11}$$

Положим также $\theta_*(\zeta) = \theta_0(\zeta) = 1$. Иными словами, внешние источники воздействуют на все поры с одинаковой интенсивностью.

Как и выше, предположим, что параметр ζ имеет смысл характерного размера пор, а распределение пор по размерам соответствует логнормальному распределению (см. (2.12)). Пусть поровый объем и ядра $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$ описываются выражениями (2.13), (2.14). Пусть также коэффициент подвижности одинаков для всех компонентов смеси, но зависит от характерного размера пор $a_i(\zeta) \equiv a(\zeta)$. Последнюю зависимость аппроксимируем формулой

$$a(\zeta) = \text{th} \left[\exp \left(\frac{1}{2\sigma_*} \frac{\zeta - \zeta^*}{l} \right) \right]. \tag{3.12}$$

Аппроксимация (3.12) соответствует случаю, когда в малых порах все компоненты смеси неподвижны (адсорбированы на стенках поровых каналов), а в больших порах подвижность всех компонентов близка к 100 %-й. На рис. 5 представлена зависимость коэффициента подвижности от размера пор при $\sigma_* = 0,1$, $\zeta^* = 1,3$ мкм.

Рассмотрим случай пористой среды, насыщенной водным солевым раствором и находящейся под действием внешнего электрического поля. Параметры задачи те же, что и в п. 2: $\varphi_0 = 0,3$, $\eta = 10^{-3}$ Па·с, $K_0 = 10^{-12}$ м², $\beta = 4 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, $\rho = 10^3$ кг/м³. Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, диэлектрическая проницаемость $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, коэффициент $q = e_j a_j = 2,5 \cdot 10^{-18}$ (кмоль/м³) $\sqrt{\text{м} \cdot \text{Кл}/\text{кг}}$, коэффициент пропорциональности между ядрами электропроводности и гидропроводности (см. (3.11)) положим равным $\delta_* = 10^{-4}$ Н·кмоль/(Кл·В·м).

Проведенные численные расчеты показали, что в низкочастотном диапазоне абсолютная величина электропроводности и фазовый сдвиг существенно зависят от частоты (соответствующие результаты расчетов представлены на рис. 6, 7 при различных значениях коэффициента d_0). Еще раз отметим, что в данной работе поверхностная электропроводность не учитывалась.

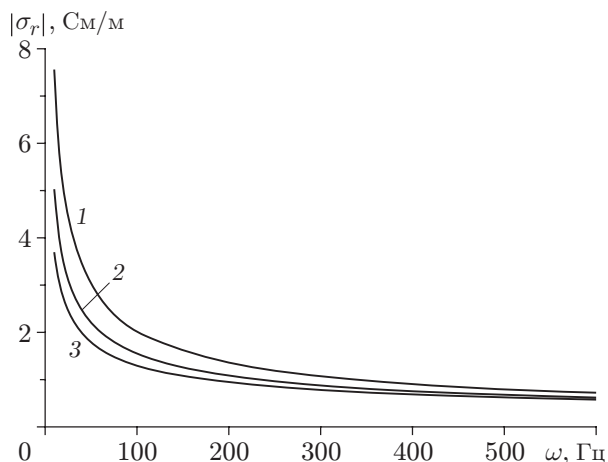


Рис. 6

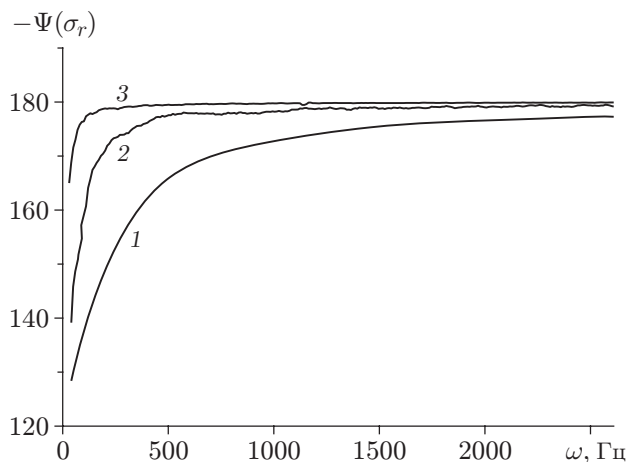


Рис. 7

Рис. 6. Расчетные частотные зависимости абсолютной величины электропроводности пористой среды, насыщенной электролитом и помещенной во внешнее переменное электрическое поле:

1 — $d_0 = 10^{-4}$; 2 — $d_0 = 5 \cdot 10^{-5}$; 3 — $d_0 = 10^{-5}$

Рис. 7. Расчетные частотные зависимости фазового сдвига электропроводности пористой среды, насыщенной электролитом и помещенной во внешнее переменное электрическое поле (обозначения те же, что на рис. 6)

Итак, рассмотренный в настоящей работе подход позволяет связать динамическую проницаемость и динамическую электропроводность с микроструктурой пористых материалов, что существенно расширяет возможности для интерпретации соответствующих полевых и лабораторных исследований. Следует отметить, что использование моделей, основанных на концепции ансамбля пор, позволяет не только исследовать проницаемость и электропроводность, но и изучать процессы переноса в ансамбле пор с многофазным насыщением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.
2. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
4. Николаевский В. Н. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Недра, 1970.
5. Желтов Ю. П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975.
6. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1984.
7. Dullien F. A. L. Porous media: fluid transport and pore structure. San Diego: San Diego Acad. Press, 1992.
8. Santos A., Bedrikovetski P. Size exclusion during particle suspension transport in porous media: stochastic and averaged equations // Comput. Appl. Math. 2004. V. 23, N 2/3. P. 259–284.

9. **Пригожин И.** Химическая термодинамика / И. Пригожин, Р. Дефэй. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1966.
10. **Де Грот С.** Неравновесная термодинамика / С. де Грот, П. Мазур. М.: Мир, 1964.
11. **Auriault J. L., Borne L., Chambon R.** Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1985. V. 77. P. 1641–1650.
12. **Charlaix E., Kushnick A. P., Stokes J. P.** Experimental study of dynamic permeability in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 61. P. 1595–1598.
13. **Smeulders D. M. J.** On wave propagation in saturated and partially saturated porous media: PhD Thesis. Eindhoven, 1992.
14. **Sheng P., Zhou M.-Y.** Dynamic permeability in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 61, N 14. P. 1591–1594.
15. **Sheng P., Zhou M.-Y.** First-principles calculations of dynamic permeability in porous media // *Phys. Rev. B.* 1989. V. 39, N 16. P. 1591–1594.
16. **Johnson D. L., Koplik J., Dashen R.** Theory dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 379–402.
17. **Johnson D. L., Koplik J., Schwartz L. M.** New pore-size parameter characterizing transport in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57, N 20. P. 2564–2567.
18. **Стейн И.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. М.: Мир, 1974.
19. **Молокович Ю. М.** Релаксационная фильтрация / Ю. М. Молокович, Н. Н. Непримеров, В. И. Пикуза, А. В. Штанин. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
20. **Молокович Ю. М.** Основы теории релаксационной фильтрации / Ю. М. Молокович, П. П. Осипов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.
21. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Релаксационные явления в насыщенных пористых средах. Линейная теория // *Прикл. математика и механика.* 1989. Т. 53, вып. 3. С. 469–475.
22. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // *Инж.-физ. журн.* 1990. Т. 58, № 1. С. 78–82.
23. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Об обобщении закона Дарси для нестационарных режимов фильтрации // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 313, № 1. С. 31–36.
24. **Динариев О. Ю., Шапиро А. А.** Нелокальные точные решения кинетической теории газа в пористой среде // *Журн. техн. физики.* 1996. Т. 66, вып. 1. С. 24–34.
25. **Day W.** The thermodynamics of simple materials with memory. N. Y.: Springer-Verlag, 1972.
26. **Данфорд Н.** Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. М.: Мир, 1966.
27. **Динариев О. Ю., Михайлов Д. Н.** Моделирование изотермических процессов в пористых материалах на основе концепции ансамбля пор // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2007. № 5. С. 118–132.
28. **Katz A. J., Thompson A. H.** Quantitative prediction of permeability in porous rock // *Phys. Rev. Ser. B.* 1986. V. 34, N 11. P. 8179–8181.
29. **Achdou Y., Avellaneda M.** Influence of pore roughness and pore-size dispersion in estimating the permeability of a porous medium from electric measurements // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4, N 12. P. 2651–2673.

30. **Kostek S., Schwartz L. M., Johnson D. L.** Fluid permeability in porous media: Comparison of electrical estimates with hydrodynamical calculations // Phys. Rev. B. 1992. V. 45, N 1. P. 186–195.
31. **Avellaneda M., Torquato S.** Rigorous link between fluid permeability, electrical conductivity, and relaxation times for transport in porous media // Phys. Fluids A. 1991. V. 3, N 11. P. 2529–2541.
32. **Schwartz L. M., Martys N., Bentz D. P., et al.** Cross-property relations and permeability estimation in model porous media // Phys. Rev. E. 1993. V. 48, N 6. P. 4584–4591.
33. **Духин С. С.** Электропроводность и электрокинетические свойства дисперсных систем. Киев: Наук. думка, 1975.
34. **Чураев Н. В.** Физико-химия процессов массопереноса в пористых телах. М.: Химия, 1990.
35. **Brett C. M. A., Brett A. M. O.** Electrochemistry. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.

*Поступила в редакцию 5/VI 2009 г.,
в окончательном варианте — 27/I 2010 г.*
