ПМТФ, № 3, 1972

УДК 533.9 + 621.371.1/6

ВОЛНЫ ОГИБАЮЩИХ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ

А. Д. Гладун, С. М. Коршунов

(Москва)

Изучаются стационарные волны огибающих в нерелятивистском электронном потоке на неподвижном ионном фоне. Показано, что скорость стационарной волны огибающей всегда равна скорости невозмущенного электронного потока. В адиабатическом приближении найдено, что любое возмущение огибающих распространяется со скоростью невозмущенного потока. Результат представляет интерес для теории нелинейных волн в диспергирующих средах.

1. В последние годы выяснилось, что для нелинейных волновых процессов в диспергирующих средах наиболее характерными, по-видимому, являются различные эффекты нелинейного самовоздействия [1–7]. К числу последних принадлежит, например, самофокусировка стационарных волновых пучков [2]. В нестационарном случае эффекты самовоздействия проявляются как нелинейная пространственно-временная деформация амплитудной и фазовой огибающих волнового пакета [3, 4, 6, 7]. Это позволяет трактовать нестационарные эффекты самовоздействия как распространение в среде своеобразных волн огибающих. В ряде случаев волны огибающих претерпевают накапливающиеся искажения, при некоторых условиях возможны римановы волны огибающих. В среде с релаксационной нелинейностью могут существовать ударные волны огибающих [7].

При рассмотрении эффектов самовоздействия в нелинейной оптике обычно предполагается наличие в среде кубической нелинейности. Это не исчерпывает, естественно, всех нелинейных сред, в которых возможны эффекты самовоздействия. В частности, обращают на себя внимание диспергирующие среды с гидродинамической нелинейностью $(\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость, ∇ — набла-оператор [8,9]. Рассмотренные в [8] квазиударные волны — по существу ударные волны огибающих. В [9] показано, что волны конечной амплитуды ионного звука в плазме испытывают самовоздействие, приводящее к разрушению однородного фронта волны. Этот эффект аналогичен самофокусировке в нелинейной оптике [2,5]. Все это указывает на целесообразность изучения волновых процессов в диспергирующих средах с гидродинамической нелинейностью в терминах нелинейного самовоздействия.

Целью данной работы является попытка построения теории, в которой волновые процессы в электронных потоках трактуются как пространственно-временная деформация огибающих.

2. Основные результаты линейной теории одномерных волновых процессов в нерелятивистском электронном потоке на неподвижном ионном фоне сводятся к следующему. Любое плоское возмущение потока $f\,(x,\,t)$ может быть представлено в виде

$$f(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega_1}e^{i\,(k_1x-\omega_1t)}\,d\omega_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega_2}e^{i\,(k_2x-\omega_2t)}\,d\omega_2 \tag{2.1}$$

$$k_1=k_1(\omega_1)=\frac{\omega_1-\omega_p}{v_0} \tag{2.2}$$

$$k_2 = k_2(\omega_2) = \frac{\omega_2 + \omega_p}{v_0} \tag{2.3}$$

Здесь v_0 — скорость невозмущенного электронного потока, ω_p — плазменная частота, соотношения (2.2), (2.3) определяют соответственно быструю и медленную волны пространственного заряда. Преобразуя (2.1) находим

$$f(x, t) = \cos\frac{\omega_p}{v_0}x \cdot f\left(0, t - \frac{x}{v_0}\right)$$

т. е.

$$f(x + l, t + \tau) = f(x, t) \qquad (\tau = 2\pi/\omega_p, \quad l = v_0\tau)$$

Последнее означает, что, двигаясь со скоростью невозмущенного потока, возмущение повторяет себя через время τ. Ясно, что распространение такого возмущения удобно описывать, следя за пространственно-временными деформациями его огибающей. Аналогично предыдущему имеем

$$f(x, t) = \cos\omega_p t \cdot f(x - v_0 t, 0)$$

Таким образом, в линейной теории огибающая волнового пакета движется, не деформируясь, со скоростью невозмущенного потока. Этот результат обусловлен законом дисперсии волн пространственного заряда. С другой стороны, он свидетельствует об удобстве и наглядности представления о волнах огибающей в электронном потоке.

3. При рассмотрении нелинейных волновых процессов в электронном потоке на неподвижном ионном фоне исходной является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 4\pi e(n - n_0) \tag{3.1}$$

где v — скорость электронного потока, φ — электростатический потенциал, n — плотность электронов, n_0 — плотность ионов, e — абсолютная величина заряда электрона, m — масса электрона.

Сделаем в (3.1) замену переменных [9,10]

$$x_1 = (x - u_1 t)k^*, \qquad x_2 = (x - u_2 t)k^*$$

$$k^* = \frac{\omega_p}{|v_0 - u_1|}, \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$$

где u_1 и u_2 — постоянные величины, v_0 — скорость невозмущенного потока.

Исходной становится следующая система уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}V^2 + \frac{\partial}{\partial x^2}(V + u)^2\right] = 2\left(\frac{I}{V} - 1\right)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} + \frac{\partial I}{\partial x_2} = -u\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{I}{V}\right) \tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения

$$V = \frac{v - u_1}{v_0 - u_1}, \quad I = \frac{n}{n_0}V, \quad u = \frac{u_1 - u_2}{v_0 - u_1}$$

4. Пусть $\partial / \partial x_2 = 0$. Это означает, что ищутся решения (3.2) в виде плоских стационарных волн

$$d^2\Phi / dx_1^2 = 2(1/\sqrt{\Phi} - 1) \tag{4.1}$$

где $\Phi = V^2$. Заметим, что $\operatorname{sgn}(v - u_1) = \operatorname{sgn}(v_0 - u_1)$, так что $V > 0$.

Интегрируя, находим

$$(d\Phi / dx_1)^2 = 4\{A - (\sqrt{\Phi} - 1)^2\} = 4F(A, \Phi) \quad (F(A, \Phi) = A - (\sqrt{\Phi} - 1)^2) \tag{4.2}$$

Отсюда

$$x_1 + \theta = \pm \int \frac{d\Phi}{2\sqrt{F(A, \Phi)}} \tag{4.3}$$

Здесь A и θ — постоянные интегрирования. Величина A соответствует амплитуде волны, θ — ее фазе. При условии

$$0 < A < 1$$

формула (4.3) определяет периодическую функцию

$$\Phi = \Phi(A, x_1 + \theta) \tag{4.4}$$

Ее период равен 2π.

5. Будем искать решения системы (3.2) в виде длинноволнового возмущения стационарной волны, движущейся со скоростью u_1. Воспользовавшись для этого соотношением (4.4), вместо двух функций $V(x_1, x_2)$, $I(x_1, x_2)$ введем в рассмотрение три функции: $A(x_1, x_2)$, $\theta(x_1, x_2)$, $I(x_1, x_2)$. Наложив на A и θ дополнительные условия

$$\frac{d\Phi}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}(u + \sqrt{\Phi})^2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$$

получаем систему уравнений, эквивалентную (3.2)

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial A} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Phi = -\frac{d\Phi}{dx_2} - 2n\frac{d}{dx_2}\sqrt{\Phi} \tag{5.1}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial A} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 2 / I(\sqrt{\Phi} - 1) - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} - \frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = u\frac{d}{dx_2}\left(\frac{I}{\sqrt{\Phi}}\right) - \frac{dI}{dx_2} \tag{5.3}$$

Из (4.1) и (4.2) находим, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{\partial\Phi}{\partial A} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) = -2, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{d\Phi}{dx_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) = -2\frac{dA}{dx_2}$$

поэтому, разрешив систему (5.1), (5.2) относительно $\partial A/\partial x_1$ и $\partial\theta/\partial x_1$, имеем

$$2\frac{\partial A}{\partial x_1} = -2\frac{dA}{dx_2} + 4u\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2}\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi}} - 1\right) + 2\Phi\frac{I-1}{\sqrt{\Phi}} \tag{5.4}$$

$$2\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial x_1}\left(\frac{d\Phi}{dx_2} + 2u\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial A}\left[2\frac{I-1}{\sqrt{\Phi}} - \frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)\right] \tag{5.5}$$

6. Для нахождения решений системы (5.3) — (5.5) воспользуемся методом усреднения [11]. Представим для этого искомые функции в виде ряда

$$A(x_1, x_2) = A_0(x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_1, x_2)$$

$$\theta(x_1, x_2) = \theta_0(x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(x_1, x_2) \tag{6.1}$$

$$I(x_1, x_2) = I_0(x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_1, x_2)$$

где A_0, θ_0, I_0 — медленно меняющиеся функции, а $A_k(x_1, x_2)$, $\theta_k(x_1, x_2)$, $I_k(x_1, x_2)$ — величины k-го порядка малости, быстроосциллирующие по x_1 и медленно меняющиеся по x_2.

Применяя дифференцирование по частям, из (5.4) и (5.3) находим

$$2\frac{dA}{dx_2} + 2\frac{\partial A}{\partial x_1} = 4\frac{\partial}{\partial x_1}(I\sqrt{\Phi}) - 4\frac{\partial}{\partial x_1}(\sqrt{\Phi}) + 4u(1-I)\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2} - - 4u\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2} + 4\frac{dI}{dx_2}(u+\sqrt{\Phi}) \tag{6.2}$$

Разложим все функции, содержащие $\Phi(A, \theta)$, в ряд Тейлора в окрестности точки A_0, θ_0

$$\begin{gathered}\Phi = \Phi(A_0, \theta_0) + A_1\frac{\partial\Phi(A_0, \theta_0)}{\partial A} + \theta_1\frac{\partial\Phi(A_0, \theta_0)}{\partial x_1} + \ldots \\ \sqrt{\Phi} = \sqrt{\Phi(A_0, \theta_0)} + A_1\frac{\partial\sqrt{\Phi(A_0, \theta_0)}}{\partial A} + \theta_1\frac{\partial\sqrt{\Phi(A_0, \theta_0)}}{\partial x_1} + \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(A_0, \theta_0)}} + A_1\frac{\partial}{\partial A}\frac{1}{\sqrt{\Phi(A_0, \theta_0)}} + \theta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{\Phi(A_0, \theta_0)}} + \ldots\end{gathered} \tag{6.3}$$

Подставляя (6.1) и (6.3) в уравнение (6.2) и отбрасывая величины второго порядка малости, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{dA_0}{dx_2} = 2\frac{\partial}{\partial x_1}(I_0\sqrt{\Phi}) - 2\frac{\partial}{\partial x_1}(\sqrt{\Phi}) + 2\frac{\partial}{\partial x_1}(I_1\sqrt{\Phi}) + \\ + 2\frac{\partial}{\partial x_1}\left[I_0\left(A_1\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial A} + \theta_1\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial x_1}\right)\right] - 2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(A_1\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial A} + \theta_1\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial x_1}\right) + \\ + \frac{2u(1-I_0)}{\sqrt{\Phi}}\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2} - 2u\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2} + 2(u+\sqrt{\Phi})\frac{dI_0}{dx_2}\end{gathered} \tag{6.4}$$

Приравнивая в (6.4) члены одинаковых порядков, находим

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(I_0\sqrt{\Phi}) - \frac{\partial}{\partial x_1}\sqrt{\Phi} = 0$$

Отсюда $I_0 = 1$ и

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{dA_0}{dx_2} = 2\frac{\partial}{\partial x_1}(I_1\sqrt{\Phi}) - 2u\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2} \tag{6.5}$$

Аналогично предыдущему из (5.5) и (5.3) имеем

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} = -\frac{I_1}{\sqrt{\Phi}}\frac{\partial\Phi}{\partial A} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial x_1}\frac{d}{dx_2}(\Phi + 2u\sqrt{\Phi})\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial A}\frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_1} = -u\frac{d}{dx_2}\frac{1}{\sqrt{\Phi}} = -u\left(\frac{dA_0}{dx_2}\frac{\partial}{\partial A} + \frac{d\theta_0}{dx_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{1}{\sqrt{\Phi}} \tag{6.7}$$

Усредняя (6.5) по быстрым осцилляциям, получим

$$\frac{dA_0}{dx_2} = -2u\frac{dA_0}{dx_2}\frac{\partial}{\partial A}\langle\sqrt{\Phi}\rangle \tag{6.8}$$

Здесь скобки означают усреднения по x_1

$$\langle\sqrt{\Phi}\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(1-\sqrt{A})^2}^{(1+\sqrt{A})^2}\frac{\sqrt{\Phi}d\Phi}{2\sqrt{F(A_0, \Phi)}} = 1 + \frac{A_0}{2}$$

Таким образом, уравнение (6.8) дает

$$\frac{dA_0}{dx_2}(1+u)=0$$

Возможны два случая: $u=-1$ и $u\neq-1$.

7. Рассмотрим случай, когда $u=-1$. Это означает, что длинноволновое возмущение движется со скоростью $u_2=v_0$. Интегрируя уравнение (6.7), находим

$$I_1=\frac{dA_0}{dx_2}\frac{\partial}{\partial A}\arcsin\frac{\sqrt{\Phi}-1}{\sqrt{A_0}}+\frac{d\theta_0}{dx_2}\frac{1}{\sqrt{\Phi}} \tag{7.1}$$

Из условия $\langle n/n_0\rangle=1$ постоянную интегрирования следует положить равной нулю. Подставляя (7.1) в (6.6) и усредняя по быстрым осцилляциям, имеем

$$\frac{d\theta_0}{dx_2}\left\langle\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial x_1}\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial x_1}-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial A}-1\right\rangle=\frac{dA_0}{dx_2}\left\langle\frac{2\partial\sqrt{\Phi}}{\partial A}\frac{\partial}{\partial A}\arcsin\frac{\sqrt{\Phi}-1}{\sqrt{A_0}}\right\rangle-$$
$$-\frac{dA_0}{dx_2}\left\langle\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial x_1}\frac{\partial\sqrt{\Phi}}{\partial A}\right\rangle$$

Произведя в этом выражении интегрирование по частям, получаем

$$\frac{d\theta_0}{dx_2}-\frac{A_0}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{A_0}}-\frac{A_0+1}{A_0\sqrt{A_0}}\ln 2\sqrt{A_0}\right) \tag{7.2}$$

Отсюда

$$\theta_0=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2A_0+1}{\sqrt{A_0}}+\frac{1-A_0}{\sqrt{A_0}}\ln 2\sqrt{A_0}\right) \tag{7.3}$$

Как видно из (7.3), длинноволновое возмущение амплитуды стационарной волны приводит к искажению фазы последней.

8. Рассмотрим случай, когда $u\neq-1$. Здесь $A_0=\mathrm{const}$. Из уравнения (6.7) следует:

$$I_1=-\frac{u}{\sqrt{\Phi}}\frac{d\theta_0}{dx_2} \tag{8.1}$$

Подставляя (8.1) в уравнение (6.6) и усредняя по быстрым осцилляциям, получим

$$\frac{d\theta_0}{dx_2}\left(-u\frac{\partial}{\partial A}\langle\ln\Phi\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi+2u\sqrt{\Phi})\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial A}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\right\rangle\right)=0$$

Можно убедиться, что выражение в скобках не равно нулю. Поэтому $\theta_0=\mathrm{const}$. Уравнение (8.1) дает при этом $I_1=0$. Таким образом, если $u_2\neq v_0$, длинноволновое возмущение стационарной волны в первом приближении отсутствует. Покажем, что в любом приближении при $u_2\neq v_0$ возмущение отсутствует. Заметим, что все величины вида

$$\frac{d}{dx_2}f(\Phi)=\left(\frac{dA_1}{dx_2}\frac{\partial}{\partial A}+\frac{d\theta_1}{dx_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)f(\Phi)$$

второго порядка малости.

Уравнения второго приближения имеют вид

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1}+\frac{dA_1}{dx_2}=2\frac{\partial}{\partial x_1}(I_2\sqrt{\Phi})-2u\frac{d\sqrt{\Phi}}{dx_2}$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}=-\frac{I_2}{\sqrt{\Phi}}\frac{\partial\Phi}{\partial A}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial A\partial x_1}\frac{d}{dx_2}(\Phi+2u\sqrt{\Phi})+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial A}\frac{d}{dx_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial x_1}=-u\frac{d}{dx_2}\frac{1}{\sqrt{\Phi}}=-u\left(\frac{dA_1}{dx_2}\frac{\partial}{\partial A}+\frac{d\theta_1}{dx_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\frac{1}{\sqrt{\Phi}}$$

Эта система уравнений совпадает с (6.5) — (6.7), если в ней заменить A_2, θ_2, A_1, θ_1, I_2 соответственно на A_1, θ_1, A_0, θ_0, I_1. Аналогично предыдущему получаем

$$A_1 = \theta_1 = I_1 = 0, \quad A_2 = A_2(x_2), \quad \theta_2 = \theta_2(x_2)$$

По индукции легко показать, что все величины рядов (6.1), начиная с первого и выше, равны нулю. Таким образом, стационарная волна огибающей может двигаться только со скоростью невозмущенного потока.

9. Полученные результаты можно понять, анализируя закон дисперсии волн пространственного заряда

$$k^2 / \omega^2 = \varepsilon(\omega) / v_0^2 \tag{9.1}$$

где

$$\varepsilon(\omega) = (1 \pm \omega_p / \omega)^2$$

или

$$\omega / k = v_0 \pm \omega_p / k \tag{9.2}$$

Заметим, что используемый обычно анализ разложения функции $\varepsilon(\omega)$ по степеням ω здесь не применим, так как при $\omega = 0$ имеется особенность. Ниже показано, что соотношения (9.1) и (9.2) являются одновременно и нелинейным законом дисперсии. Характерно при этом, что в закон дисперсии не входит амплитуда волн. При $\omega \to \infty$ или $k \to \infty$ дисперсия исчезает и фазовая скорость стремится к скорости невозмущенного потока v_0.

Покажем, что характер волн огибающих в электронном потоке обусловлен в конечном итоге спецификой дисперсионных соотношений (9.1), (9.2). Нетрудно убедиться, что исходная система (3.1) может быть найдена из вариационного принципа, в котором плотность функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - mn\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] + e\varphi(n - n_0) + mnC(t) \tag{9.3}$$

где

$$\psi(x, t) = \int\limits_x^{x_0} v(x', t)\, dx'$$

$$C(t) = \frac{1}{2} v^2(x_0, t) - \frac{e}{m}\varphi(x_0, t)$$

Обобщенными координатами при этом являются полевые переменные $n(x, t)$, $\psi(x, t)$ и $\varphi(x, t)$. Как было показано, система (3.1) допускает стационарное решение, в котором все величины суть функции комбинации $kx - \omega t$. Для возмущений, длина волны которых много больше длины стационарной волны, амплитуда A, волновое число k и частота ω являются медленными функциями времени и координаты. Можно считать поэтому, что локально-стационарное решение справедливо в каждой точке, однако амплитуда, длина волны и частота меняются от точки к точке. В [12] показано, что усредненные уравнения для медленно меняющихся функций A, k, ω получаются из усредненного лагранжиана варьированием по A, k и ω.

Подставляя стационарное решение в лагранжиан и усредняя по периоду стационарной волны, имеем

$$\langle L \rangle = \frac{1}{8\pi}\left\langle\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right\rangle - en_0\langle\varphi\rangle \tag{9.4}$$

В (9.4) учтено, что варьирование по n дает уравнение движения

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2=\frac{e}{m}\varphi+C(t) \tag{9.5}$$

Подстановка в него стационарного решения обращает (9.5) в тождество, а выражение

$$\left\langle mn\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]-e\varphi n-mnC(t)\right\rangle$$

в нуль.

Для стационарной волны

$$\varphi=\frac{(kv_0-\omega)^2m}{2ek^2}\left\{\Phi\left[A,\frac{\omega_p}{|kv_0-\omega|}(kx-\omega t)+\theta\right]+1\right\}$$

так как

$$x_1=\omega_p\frac{x-ut}{|v_0-u_1|}=\frac{\omega_p}{|kv_0-\omega|}(kx-\omega t)$$

Функция $\Phi=\Phi(A,x_1+\theta)$ определяется формулой (4.3). Ее свойства описаны, например, в [8]. Поскольку период Φ равен 2π для всех значений амплитуды A $(0<A<1)$, находим

$$|kv_0-\omega|=\omega_p$$

т. е.

$$\varphi=\frac{2\pi en_0}{k^2}\{\Phi(A,kx-\omega t+\theta)+1\} \tag{9.6}$$

Таким образом, линейное дисперсионное уравнение одновременно является и нелинейным. В этом состоит специфика рассматриваемой задачи.

Подставляя (9.6) в (9.4) и выполняя усреднение, находим

$$\langle L\rangle=-\frac{2\pi e^2n_0^2}{k^2}A$$

Пользуясь методикой [12], получаем уравнение Эйлера для усредненного лагранжиана L

$$\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial A}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial k}=0$$

или

$$\frac{1}{k^2}-2\frac{A}{k^3}\frac{\partial k}{\partial A}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial A}{\partial k}-2\frac{A}{k^3}\right)=0$$

Отсюда следует:

$$A/k^2=\mathrm{const} \tag{9.7}$$

Используя дисперсионное уравнение $\omega=kv_0\pm\omega_p$ и соотношение

$$\partial k/\partial t=-\partial\omega/\partial x$$

получим

$$\partial k/\partial t+v_0\,\partial k/\partial x=0$$

т. е.

$$k=k(x-v_0t)$$

Соотношение (9.7) при этом дает

$$A=A(x-v_0t)$$

что и требовалось показать.

Отметим, что в литературе известно точное решение системы уравнений (3.1) в лагранжевых переменных (см., например, [13, 14]). Однако использование этого решения в данной работе осложняется трудностью перехода в явном виде от лагранжевых переменных к эйлеровым.

Таким образом, нелинейное искажение волн огибающих возможно, по-видимому, лишь в многоскоростных потоках.

Полученные результаты относятся, естественно, не только к электронным потокам, но и к волнам в холодной плазме

Поступила 20 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Новое в нелинейной оптике. Усп. физ. н., 1968, т. 95, № 1, стр. 231—247.
2. Аскарьян Г. А. Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 6, стр. 1567.
3. Островский Л. А. Электромагнитные волны в нелинейных средах с дисперсией. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 8, стр. 905.
4. Whitham G. B. Non-linear dispersive waves. Proc. Roy. Soc., 1965, vol. 283, No. 1393, p. 238.
5. Литвак А. Г. О самофокусировке электромагнитных волн в плазме. Изв. вузов, Радиофизика, 1965, т. 9, № 5, стр. 900.
6. Островский Л. А. Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 4, стр. 1189.
7. Островский Л. А. Ударные волны огибающих. ЖЭТФ, 1965, т. 54, вып. 4, стр. 1236.
8. Гладун А. Д. О квазиударных волнах в электронных потоках. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2, стр. 499.
9. Петвиашвили В. И. Самофокусировка ионно-звуковой волны в плазме. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 3, стр. 917.
10. Петвиашвили В. И. Колебания периодической ионно-звуковой волны. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, № 2, стр. 205.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958, стр. 46, 299.
12. Whitham G. B. Variational methods and application to water waves. Proc. Roy. Soc., 1967, vol. 299, No. 1456, pp. 6—25.
13. Dowson J. M. Non-linear electron oscillations in cold plasma. Phys. Rev., 1959, vol. 113, No. 2, p. 383.
14. Davidson R. W. C., Schram P. P. J. M. Non-linear oscillations in a cold plasma. Nucl. fusion, 1968, vol. 8, No. 3, pp. 183—195.