

К ТЕПЛОВОЙ ТЕОРИИ ЗАЖИГАНИЯ

В. Н. Виллюнов
(Томск)

Установлению стационарного горения взрывчатых систем предшествует существенно нестационарный процесс зажигания. Критические условия зажигания расчетным путем исследованы в работах [1—7].

При всей универсальности расчетный способ сопряжен с большим объемом вычислений, посильных лишь современной машинной математике. Это замечание относится особенно к тем краевым задачам зажигания, решение которых определяется большим числом параметров, когда качественный анализ результатов расчета затруднен. Между тем, используя специфику задач зажигания и аррениусовскую зависимость тепловыделения от температуры, можно развить приближенную теорию зажигания, которая вскрывает качественную картину явления. Примером является теория зажигания Я. Б. Зельдовича [8—9]. Полученное в работе [9] критическое время зажигания накаливаемой поверхностью $\tau_3 = \theta_0^2/2\pi$ находится в согласии с расчетами [5], где найдено $\tau_3 = 0,21 \theta_0^2$.

В настоящей работе в развитие теории Я. Б. Зельдовича приводится еще один вариант приближенной теории зажигания.

Физические соображения. Рассмотрим квазилинейное уравнение одномерной теории зажигания

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Qz}{c} e^{-E/RT} \quad (1)$$

и однородное начальное условие

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (2)$$

Здесь использованы общеупотребительные в теории самовоспламенения обозначения [12]. Из всего бесчисленного множества решений уравнения (1) с условием (2) будем исследовать только те, которые удовлетворяют неравенству $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$ при $t > 0, 0 \leq x < \infty$. Например, решение уравнения (1) с простейшими условиями

$$x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_s = \text{const} > 0; \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \quad t > 0 \quad (3)$$

или

$$x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_c - T_s) > 0; \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \quad t > 0 \quad (4)$$

удовлетворяет неравенству $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$. Напротив, решение уравнения (1) с краевыми условиями

$$x = 0, \quad T = T_c = \text{const}; \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (5)$$

при $\alpha/\lambda \rightarrow \infty$ не удовлетворяет этому неравенству на поверхности $x=0$, а поэтому к такому типу краевых задач развиваемый ниже метод не применим. (Здесь T_0 — начальная температура, T_c — температура среды, q_s и T_s — соответственно тепловой поток и температура на поверхности ($x=0$)). Однако к подобным задачам применима теория, развитая в работах [8—9].

Известно, что в задачах зажигания начальная температура взрывчатой системы T_0 значительно ниже некоторой характерной температуры T_z , при которой тепловыделение в зоне химической реакции существенно. Можно указать такой температурный интервал $T_n - T_0$ (T_n — температура прогрева), где тепловыделение от химических реакций мало по сравнению с теплом, отводимым в глубь вещества. Этот интервал соответствует области прогрева, где приближенно справедливо линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t < t_n, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (6)$$

Напротив, высоко над пределом зажигания в области температур $T_z > T_n$ скорость тепловыделения велика по сравнению с теплом, отводимым из зоны реакции, поэтому для адиабатической области зажигания имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Qz}{c} e^{-E/RT}. \quad (7)$$

Очевидно, в общем случае, между областью прогрева и адиабатического зажигания находится смешанная зона, для которой необходимо рассматривать точное уравнение (1). Идея излагаемого метода заключается в том, что на пределе зажигания, по крайней мере, в окрестности $x=0$, кривизна температурного профиля по x меняет знак, поэтому здесь возможна склейка решений уравнений (6) и (7) независимо от смешанной зоны, описываемой уравнением (1).

Пусть $T = \varphi(x, t)$ есть решение уравнения (6) с соответствующими условиями типа (2), (3) или (2), (4), тогда при $x=0$ имеем

$$T = \varphi(0, t). \quad (8)$$

В области адиабатического взрыва решение находится из уравнения (7). Оно зависит от одной произвольной функции, однако для окрестности $x=0$ решение (7) можно представить как однопараметрическое семейство кривых

$$T = f(t, C); \quad (9)$$

к уравнениям (8) и (9) необходимо еще добавить условие сшивки решений

$$\frac{d\varphi(0, t_n)}{dt} = \frac{df(t_n, C)}{dt}. \quad (10)$$

Уравнения (8) — (10) позволяют вычислить искомые параметры: время и температуру прогрева t_n , T_n и постоянную интегрирования (C), а, следовательно, время зажигания (t_3). Изложенному можно дать простую геометрическую интерпретацию (рис. 1). Решению линейного уравнения (7) при $x=0$ в плоскости время — температура соответствует кривая L ; семейство линий K отвечает различным параметрам C . Касание одной из семейств кривых K с кривой L дает критическое значение параметра C_* и определяет параметры прогрева топлива, а вертикальная асимптота к кривой K_* дает критическое время зажигания. Разность $t_3 - t_n$ определяет период индукции зажигания. Сшитые ветви кривых L и K_* дают приближенное решение уравнения (1) при $x=0$.

Рассмотрим два примера применения метода и выясним границы его применения.

Тепловое зажигание полупрозрачного топлива лучистой энергией. Если топливо полупрозрачно, то существенная доля теплового потока может проходить вглубь, нагревая конденсированное вещество изнутри. С учетом этого обстоятельства к правой части уравнения (1) необходимо добавить положительный член $\frac{nq_s e^{-nx}}{\rho c}$, где q_s — падающий на поверхность $x=0$ тепловой поток лучистой энергии, n — коэффициент ослабления потока (коэффициент диффузного отражения включен в q_s). Величина n зависит от диапазона длин волн источника излучения и материала топлива и обычно определяется из эксперимента.

В безразмерных переменных краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \mu e^{-\mu \xi} + e^{\frac{\theta}{1+\gamma\theta}};$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0 < 0, \quad 0 \leq \xi < \infty; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$\theta = \frac{E}{RT_1^2} (T - T_1), \quad \tau = \frac{t}{t_1}, \quad \xi = \frac{x}{x_1}, \quad x_1 = \sqrt{\kappa t_1},$$

$$t_1 = \frac{RT_1^2}{E} \frac{c}{Qz} e^{E/RT_1}, \quad \theta_0 = \frac{E}{RT_1^2} (T_0 - T_1), \quad \gamma = \frac{RT_1}{E}.$$

Масштаб температуры находится из условия

$$\frac{\lambda RT_1^2}{E x_1} = q_s. \quad (12)$$

Как показали расчеты [7], при таком выборе масштаба влияние параметра γ оказывает слабое влияние на критические параметры зажигания (T_1 близка к T_n).

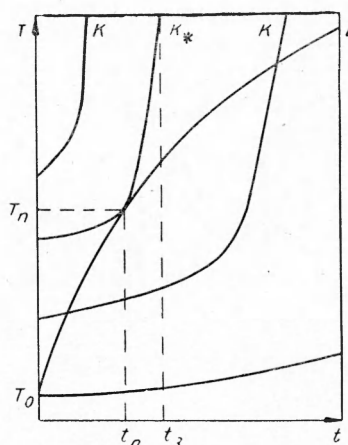


Рис. 1. Характер поведения решений при $x=0$.

Решение линейного уравнения (пренебрегаем только нелинейным членом) при $x=0$ дает равенство [10]

$$\theta_n = \theta_0 + 2 \sqrt{\frac{\tau_n}{\pi}} + \frac{1}{\mu} [e^{\mu^2 \tau_n} \Phi^* (\mu \sqrt{\tau_n}) - 1]. \quad (13)$$

Индексом n отмечаются параметры в точке касания (см. рис. 1).
Здесь

$$\Phi^* (z) = 1 - \Phi (z), \quad \Phi (z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta. \quad (14)$$

Интегрирование уравнения адиабатического зажигания приводит к зависимости

$$\tau_3 = \tau_n + (1 + \gamma \theta_n)^2 (1 + 2\gamma) e^{-\frac{\theta_n}{1 + \gamma \theta_n}}, \quad (15)$$

которая при $\tau_n \rightarrow 0$, $\theta_n \rightarrow \theta_0$ дает адиабатическое время взрыва, результат, полученный О. М. Тодесом [11]. Наконец, из условия склейки кривых находим

$$\theta_n = (1 + \gamma \theta_n) \ln [\mu e^{\mu^2 \tau_n} \Phi^* (\mu \sqrt{\tau_n})]. \quad (16)$$

Уравнения (13)—(16) в параметрической форме представляют решение задачи о зажигании полупрозрачных топлив лучистой энергией. В частности, для непрозрачных топлив $\mu \rightarrow \infty$, используя (13) и (16), имеем соотношение

$$(1 + \gamma \ln \sqrt{\pi \tau_n}) \left(\theta_0 + 2 \sqrt{\frac{\tau_n}{\pi}} \right) + \ln \sqrt{\pi \tau_n} = 0, \quad (17)$$

которое совместно с (15) определяет τ_3 .

На рис. 2 представлена зависимость $\lg \tau_3$ от $\lg |\theta_0|$ для различных значений μ , найденная из (13)—(16). Совпадение теории и расчета вполне удовлетворительное. В исследуемом диапазоне изменения θ_0 отклонение не превышает 7%. Для $\gamma=0$ и $\gamma=0,05$, критическое время зажигания несколько растет, значения при $\gamma=0$ и $\gamma=0,05$ отличаются не более чем на 3%. Приведем аппроксимирующие формулы

$$\theta_n = -\frac{2,67 \lg |\theta_0| - 0,2}{1 + \gamma (2,67 \lg |\theta_0| - 0,2)}; \quad \tau_n = \frac{\pi}{4} (\theta_n - \theta_0)^2, \quad (18)$$

где τ_3 определяется из (15). Для согласования с расчетами на ЭВМЦ, правая часть (15) умножается на коэффициент 1,07.

Тепловое зажигание топлива в потоке газа. Исходным для данной задачи является уравнение (1) с условиями (4). Переходя к ранее введенным безразмерным переменным и определяя масштаб температур вместо (12) равенством $T_1 = T_c$, получаем, что решение зависит теперь от трех безразмерных параметров

$$\theta_0 = \frac{E}{RT_c^2} (T_0 - T_c) < 0, \quad \gamma = \frac{RT_c}{E}, \quad \text{Nu} = \frac{\alpha x_c}{\lambda}. \quad (19)$$

Используя развитый выше метод, приходим к зависимостям

$$\theta_n = (1 + \gamma \theta_n) \ln \left[\left| \theta_0 \right| \left(\frac{1}{z \sqrt{\pi}} - e^{z^2} \Phi^*(z) \right) \right]; \quad \theta_n = \theta_0 e^{z^2} \Phi^*(z), \quad (20)$$

где $z = Nu \sqrt{\tau_n}$. Формулы (15), (20), (21) позволяют вычислить все критические параметры зажигания. Крайние значения числа Нуссельта $Nu \rightarrow 0$ и $Nu \rightarrow \infty$ соответственно дают два предельных режима поведения вещества топлива — классический адиабатический взрыв и зажигание накаливаемой поверхностью. Из (15), (20) соответственно следует:

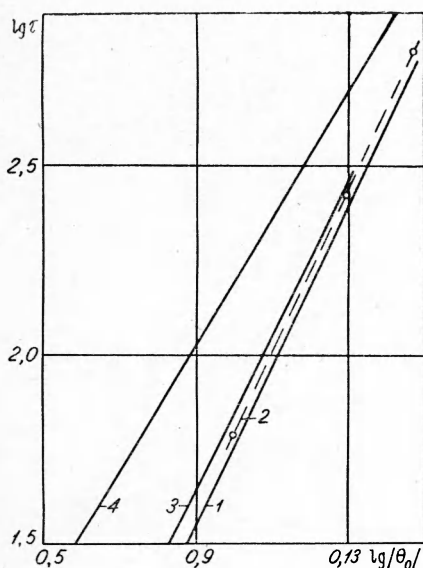


Рис. 2. Зависимость времени зажигания от θ_0 для $\gamma = 0$.
1 — $\mu = \infty$; 2 — $\mu \rightarrow \infty$, численное интегрирование [7]; 3 — $\mu = 1,0$; 4 — $\mu = 0,1$.

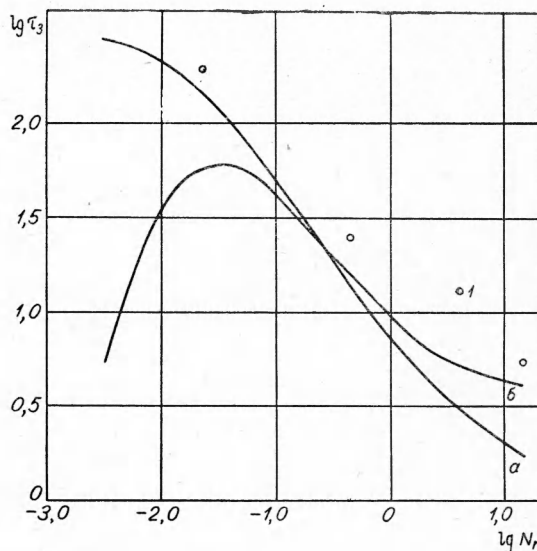


Рис. 3. Зависимость времени зажигания от числа Nu для $\theta_0 = -5$; $\gamma = 0,025$.
а — по формулам (15), (20); б — по формулам (21), (22).
1 — точки, полученные численным интегрированием.

при $Nu \rightarrow 0$, $\tau_n \rightarrow 0$, $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $\tau_3 \rightarrow \tau_a$, где τ_a определяется по (15), а при $Nu \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$, $\theta_n \rightarrow 0$, $\tau_3 \rightarrow (1 + 2\gamma)$. Таким образом, изложенный метод расчета должен давать хороший результат при $Nu \ll 1$ и не пригоден для $Nu \gg 1$. Для анализа $Nu \gg 1$ используем теорию зажигания Я. Б. Зельдовича [9]. Уточняя ее поправкой на γ , вместо (20) приходим к зависимостям:

$$Nu \theta_s = - \sqrt{2 \left\{ (1 + \gamma \theta_s)^2 e^{\frac{\theta_s}{1 + \gamma \theta_s}} - (1 + \gamma \theta_0)^2 e^{\frac{\theta_0}{1 + \gamma \theta_0}} \right\} (1 - 2\gamma)}, \quad (21)$$

$$\theta_s = \theta_0 e^{z_s^2} \Phi^*(z_s); \quad z_s = Nu \sqrt{\tau_s}, \quad (22)$$

где θ_s — температура на поверхности. Исследуя снова предельные случаи, получаем, что при $Nu \rightarrow 0$, $\tau_s \rightarrow 0$, $\theta_s \rightarrow \theta_0$, а при $Nu \rightarrow \infty$, $\theta_s \rightarrow 0$, $\tau_s \rightarrow \frac{\theta_0^2}{2\pi(1 - 2\gamma)}$.

