

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОЙ ПРОСЛОЙКИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. В. Михаськив, И. Я. Жбадинский

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины, 79060 Львов, Украина
E-mail: Zhbadynsky@iapmm.lviv.ua

Исследуется динамическое поведение круговой трещины в упругом композите, состоящем из двух разнородных полупространств, соединенных тонкой податливой прослойкой. Дефект расположен в одном из полупространств перпендикулярно прослойке, его поверхности нагружены нормальными гармоническими усилиями, что обеспечивает симметрию напряженно-деформированного состояния. Связующий тонкий элемент моделируется условиями неидеального контакта полупространств. Задача сведена к граничному интегральному уравнению относительно функции динамического раскрытия дефекта. В результате численного решения уравнения получены частотные зависимости коэффициента интенсивности напряжений отрыва в окрестности трещины при различных значениях толщины прослойки и соотношениях между упругими модулями составляющих композита.

Ключевые слова: трехмерное кусочно-однородное тело, тонкая податливая прослойка, круговая трещина, гармоническое нагружение, коэффициенты интенсивности напряжений, метод граничных интегральных уравнений.

Введение. Широкое использование в современной инженерной практике композитных материалов обуславливает необходимость изучения механизмов их разрушения при наличии в них микротрещин. В трехмерном случае наиболее удобным для теоретического анализа является тело, состоящее из соединенных упругих полупространств с одиночной трещиной. В [1–5] получены решения задач о динамическом нагружении дефекта в таком биматериале в предположении идеального механического контакта, показано, что динамические коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности трещины существенно отличаются от квазистатических [6–8] вследствие инерционных эффектов взаимодействия трещины с межфазной поверхностью. Данная работа посвящена исследованию этих эффектов при неидеальном соединении полупространств, моделирующем наличие тонкой (по сравнению с длиной возбуждающей волны) и податливой (с малым модулем сдвига по сравнению с модулем сдвига матричных материалов) прослойки. Для численного анализа применен метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), который позволяет удовлетворять как условиям контакта на межфазной поверхности, так и условиям динамического раскрытия трещины.

Гранично-интегральная формулировка задачи. Рассмотрим трехмерное кусочно-однородное тело, состоящее из двух упругих полупространств A и B с плот-

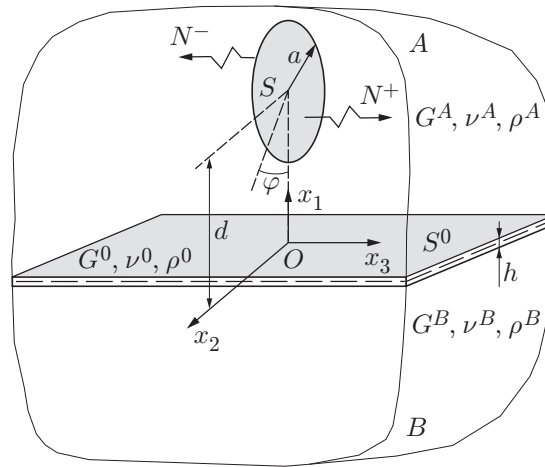


Рис. 1. Расчетная схема

ностями ρ^A и ρ^B , модулями сдвига G^A и G^B , коэффициентами Пуассона ν^A и ν^B соответственно. Полупространства соединены тонкой упругой податливой прослойкой толщиной h с параметрами ρ^0, G^0, ν^0 . В полупространстве A перпендикулярно срединной поверхности S^0 прослойки расположена круговая трещина S радиусом a , на противоположные поверхности которой действуют нормальные, гармонические во времени t усилия с амплитудой $N(\mathbf{x})$ и циклической частотой ω (рис. 1). Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ свяжем с поверхностью S^0 таким образом, чтобы полупространство A определялось значениями $x_1 > 0$, полупространство B — значениями $x_1 < 0$, а трещина располагалась в плоскости $x_3 = 0$. В рассматриваемом случае установившегося процесса временной множитель $\exp(-i\omega t)$ исключается из решения, что позволяет свести задачу к определению амплитуд искомым величин. Для вектора перемещений $\mathbf{u}^D(u_1^D, u_2^D, u_3^D)$ в полупространстве D основным является уравнение Ламе стационарных колебаний

$$\omega_{1D}^{-2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^D) - \omega_{2D}^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^D) + \mathbf{u}^D = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее D принимает значения A и B ; ∇ — трехмерный набла-вектор; $\omega_{1D} = \omega/c_1^D$; $\omega_{2D} = \omega/c_2^D$; c_1^D, c_2^D — скорости распространения в материале D продольных и поперечных волн соответственно.

Учитывая, что $\max\{\omega_{2A}h, \omega_{2B}h\} < 1$ и $G^0 \ll \min\{G^A, G^B\}$, для описания воздействия прослойки на волновое поле используем граничные условия для скачков перемещений u_j^D при соблюдении условий непрерывности соответствующих напряжений σ_{ij}^D на срединной поверхности S^0 в виде [9]

$$\sigma_{11}^A(\mathbf{x}) = 2G^0 \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0} \frac{u_1^A(\mathbf{x}) - u_1^B(\mathbf{x})}{h}, \quad \sigma_{\beta 1}^A(\mathbf{x}) = G^0 \frac{u_\beta^A(\mathbf{x}) - u_\beta^B(\mathbf{x})}{h}, \quad \beta = 2, 3, \quad (2)$$

$$\sigma_{j1}^A(\mathbf{x}) = \sigma_{j1}^B(\mathbf{x}), \quad j = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in S^0.$$

Во введенной системе координат граничные условия для усилий, приложенных к поверхностям трещины, записываются следующим образом:

$$\sigma_{33}^A(\mathbf{x}) = -N(\mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (1)–(3) можно представить в виде

$$\mathbf{u}^A = \nabla\varphi^A + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^A + \mathbf{u}_*^A, \quad \mathbf{u}^B = \nabla\varphi^B + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^B, \quad (4)$$

где составляющая \mathbf{u}_*^A учитывает вклад в волновую картину динамического раскрытия трещины, а скалярные φ^D и векторные $\boldsymbol{\psi}^D(\psi_1^D, \psi_2^D, \psi_3^D)$ функции — вклад отраженных ($\varphi^A, \boldsymbol{\psi}^A$) и преломленных ($\varphi^B, \boldsymbol{\psi}^B$) на поверхности S^0 волн. В формулах (4) все слагаемые удовлетворяют условиям излучения на бесконечности [10].

Из физического смысла перемещения \mathbf{u}_*^A следует, что интегральные представления его компонент $(u_*^A)_j(\mathbf{x})$ ($j = \overline{1, 3}$) и соответствующих напряжений $(\sigma_*^A)_{ij}(\mathbf{x})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) такие же, как и в случае бесконечного однородного тела с трещиной, имеющего механические постоянные материала A [11]. С учетом симметрии задачи (отсутствия разрывов касательных перемещений в области S) эти представления записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (u_*^A)_j(\mathbf{x}) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[1 + \frac{2}{\omega_{2A}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right] \iint_S \Delta u_3(\boldsymbol{\xi}) \frac{\exp(i\omega_{1A}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}} - \\ & - 2 \left[\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\omega_{2A}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right] \iint_S \Delta u_3(\boldsymbol{\xi}) \frac{\exp(i\omega_{2A}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}}, \\ & j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ — расстояние между актуальной точкой $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и точкой интегрирования $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2)$; δ_{ij} — символ Кронекера; $\Delta u_3(\mathbf{x}) = [(u_3^A)^-(\mathbf{x}) - (u_3^A)^+(\mathbf{x})]/(4\pi)$ — скачок перемещений противоположных поверхностей трещины в направлении оси Ox_3 .

Функции $\varphi^A, \boldsymbol{\psi}^A, \varphi^B, \boldsymbol{\psi}^B$, входящие в соотношения (4), являются решениями уравнений Гельмгольца, поэтому выбираются в виде соответствующих потенциалов:

$$\begin{aligned} \varphi^{A(B)}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \iint_{S^0} \alpha_{1(4)}(\boldsymbol{\eta}) \frac{\exp(i\omega_{1A(1B)}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} dS_{\boldsymbol{\eta}}, \\ \psi_j^{A(B)}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \iint_{S^0} \alpha_{1+j(4+j)}(\boldsymbol{\eta}) \frac{\exp(i\omega_{2A(2B)}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} dS_{\boldsymbol{\eta}}, \\ & j = 1, 2, \quad \psi_3^{A(B)}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Удовлетворяя контактными условиям (2) с помощью представлений (4)–(6), получим систему интегральных уравнений второго рода относительно плотностей α_j

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 \Lambda_{jn}^{\mathbf{x}}[\alpha_n(\mathbf{x})] + \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left[\Phi_{jnk}^{\mathbf{x}} \left(\iint_{S^0} \alpha_n(\boldsymbol{\eta}) \frac{\exp(i\omega_{kA}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} dS_{\boldsymbol{\eta}} \right) + \right. \\ \left. + \Phi_{j(3+n)k}^{\mathbf{x}} \left(\iint_{S^0} \alpha_{3+n}(\boldsymbol{\eta}) \frac{\exp(i\omega_{kB}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|} dS_{\boldsymbol{\eta}} \right) \right] = p_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S^0, \quad j = \overline{1, 6}, \end{aligned} \quad (7)$$

где скачок перемещений Δu_3 содержится в функциях

$$p_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} (u_*^A)_j(\mathbf{x}), & j = \overline{1, 3}, \\ (2G^A)^{-1}(\sigma_*^A)_{(j-3)1}(\mathbf{x}), & j = \overline{4, 6}, \end{cases}$$

дифференциальные операторы $\Lambda_{jn}^{\mathbf{x}}$ и $\Phi_{jnk}^{\mathbf{x}}$ имеют вид

$$\Lambda_{11}^{\mathbf{x}} = \Lambda_{14}^{\mathbf{x}} = \Lambda_{33}^{\mathbf{x}} = \Lambda_{36}^{\mathbf{x}} = 2\pi \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \Lambda_{15}^{\mathbf{x}} = -\Lambda_{26}^{\mathbf{x}} = -\pi GH \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{16}^x &= \pi GH \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), & \Lambda_{21}^x &= \Lambda_{24}^x = -\Lambda_{32}^x = -\Lambda_{35}^x = 2\pi \frac{\partial}{\partial x_3}, \\
\Lambda_{25}^x &= -\pi GH \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), & \Lambda_{34}^x &= -\pi GK \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\Lambda_{42}^x &= -\Lambda_{53}^x = -\pi \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, & \Lambda_{43}^x &= \pi \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2A}^2 \right), \\
\Lambda_{45}^x &= -\Lambda_{56}^x = -\pi G \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, & \Lambda_{46}^x &= \pi G \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\Lambda_{52}^x &= -\pi \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2A}^2 \right), & \Lambda_{55}^x &= -\pi G \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\Lambda_{61}^x &= -\pi \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2A}^2 \right), & \Lambda_{64}^x &= -\pi G \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\Phi_{132}^x &= -\Phi_{222}^x = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2A}^2 \right), & \Phi_{141}^x &= -GH \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1B}^2 \right), \\
\Phi_{162}^x &= -\Phi_{252}^x = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2, & \Phi_{241}^x &= -GH \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1B}^2 \right), \\
\Phi_{311}^x &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1A}^2, & \Phi_{341}^x &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1B}^2 \right), \\
\Phi_{352}^x &= GK \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), & \Phi_{362}^x &= -GK \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\Phi_{411}^x &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1A}^2 \right), & \Phi_{441}^x &= -G \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1B}^2 \right), \\
\Phi_{511}^x &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1A}^2 \right), & \Phi_{541}^x &= -G \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{1B}^2 \right), \\
\Phi_{622}^x &= -\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2A}^2 \right), & \Phi_{632}^x &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2A}^2 \right), \\
\Phi_{652}^x &= G \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), & \Phi_{662}^x &= -G \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \omega_{2B}^2 \right), \\
\Lambda_{12}^x &= \Lambda_{13}^x = \Lambda_{22}^x = \Lambda_{23}^x = \Lambda_{31}^x = \Lambda_{41}^x = \Lambda_{44}^x = \Lambda_{51}^x = \Lambda_{54}^x = \Lambda_{62}^x = \Lambda_{63}^x = \Lambda_{65}^x = \Lambda_{66}^x = 0, \\
\Phi_{j12}^x &= \Phi_{j21}^x = \Phi_{j31}^x = \Phi_{j42}^x = \Phi_{j51}^x = \Phi_{j61}^x = 0, \quad j = \overline{1, 6}, \\
\Phi_{111}^x &= \Phi_{122}^x = \Phi_{152}^x = \Phi_{211}^x = \Phi_{232}^x = \Phi_{262}^x = \Phi_{322}^x = \Phi_{332}^x = \Phi_{422}^x = \Phi_{432}^x = \\
&= \Phi_{452}^x = \Phi_{462}^x = \Phi_{522}^x = \Phi_{532}^x = \Phi_{552}^x = \Phi_{562}^x = \Phi_{611}^x = \Phi_{641}^x = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $G = G^B/G^A$; $H = G^*h$; $G^* = G^B/G^0$; $K = H(1 - 2\nu^0)/(1 - \nu^0)$.

Плотности α_j определяются из уравнений (7) с помощью интегрального преобразования Фурье по координатам x_2 , x_3 и последующего обращения с использованием теоремы о свертке.

Таким образом, получаем выражения для плотностей α_j ($j = \overline{1,6}$). Зная α_j , с помощью соотношений (6) можно определить потенциалы отраженных (φ^A, ψ^A) и преломленных (φ^B, ψ^B) волн через функцию Δu_3 раскрытия трещины. Для нахождения функции Δu_3 используем условие нагружения дефекта (3) с напряжениями σ_{33}^A в левой части, следующими из формулы (4). Окончательно получим ГИУ, заданное в ограниченной области S :

$$\iint_S \Delta u_3(\boldsymbol{\xi}) [R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \omega) - \bar{R}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)] dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\omega_{2A}^2}{4G^A} N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (8)$$

Здесь особенность потенциала Гельмгольца содержится в ядре R , которое совпадает с ядром граничного интегрального уравнения задачи о динамическом нагружении трещины в бесконечном однородном теле A [11]:

$$R(r, \omega) = \left(9 - 9i\omega_{1A}r + (\omega_{2A}^2 - 5\omega_{1A}^2)r^2 + i\omega_{1A}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)r^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)^2 r^4 \right) \frac{\exp(i\omega_{1A}r)}{r^5} - (9 - 9i\omega_{2A}r - 4\omega_{2A}^2 r^2 + i\omega_{2A}^3 r^3) \frac{\exp(i\omega_{2A}r)}{r^5}.$$

Регулярное ядро \bar{R} , учитывающее взаимодействие трещины с межфазной поверхностью, определяется соотношением

$$\bar{R}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = R(|\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi}|, \omega) + 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau}{F_{St}(\tau)} \left(\Theta_1(|x_2 - \xi_2|, \omega, \tau) \exp[-(x_1 + \xi_1)V_1^A(\tau)] + \right. \\ \left. + \Theta_2(|x_2 - \xi_2|, \omega, \tau) \exp[-(x_1 + \xi_1)V_2^A(\tau)] - \right. \\ \left. - \Theta_3(|x_2 - \xi_2|, \omega, \tau) \{ \exp[-x_1 V_2^A(\tau) - \xi_1 V_1^A(\tau)] + \exp[-x_1 V_1^A(\tau) - \xi_1 V_2^A(\tau)] \} \right) d\tau. \quad (9)$$

Здесь точка $\bar{\mathbf{x}}$ — симметричное отображение точки \mathbf{x} в полупространство B , т. е. $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(x_2, -x_1)$; $F_{St}(\tau)$ — аналог функции Стоунли [10]:

$$F_{St}(\tau) = 2\{\tau^2[G\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2 - 2(G-1)\tau^2]^2 - [\omega_{2A}^2 + 2(G-1)\tau^2]^2 V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) - \\ - [G\omega_{2B}^2 - 2(G-1)\tau^2]^2 V_1^A(\tau)V_2^A(\tau) + 4(G-1)^2 \tau^2 V_1^A(\tau)V_2^A(\tau)V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) - \\ - G\omega_{2A}^2 \omega_{2B}^2 [V_1^A(\tau)V_2^B(\tau) + V_1^B(\tau)V_2^A(\tau)]\} - \\ - HK[(2\tau^2 - \omega_{2B}^2)^2 - 4\tau^2 V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)][(2\tau^2 - \omega_{2A}^2)^2 - 4\tau^2 V_1^A(\tau)V_2^A(\tau)] - \\ - 2H\{4\tau^2[\omega_{2B}^2 V_1^B(\tau)V_2^A(\tau)(V_1^A(\tau) - V_2^A(\tau)) + G\omega_{2A}^2 V_1^A(\tau)V_2^B(\tau)(V_1^B(\tau) - V_2^B(\tau))] - \\ - \omega_{2A}^2 \omega_{2B}^2 (\omega_{2A}^2 V_1^B(\tau) + G\omega_{2B}^2 V_1^A(\tau))\} - \\ - K\{4\tau^2 V_2^A(\tau)V_2^B(\tau)[\omega_{2B}^2 (V_1^A(\tau) - V_2^A(\tau)) + G\omega_{2A}^2 (V_1^B(\tau) - V_2^B(\tau))] - \\ - \omega_{2A}^2 \omega_{2B}^2 (\omega_{2A}^2 V_2^B(\tau) + G\omega_{2B}^2 V_2^A(\tau))\},$$

$$\Theta_1(r, \omega, \tau) = 2 \left(\frac{(\nu^A)^2 \omega_{2A}^4}{4(1 - \nu^A)^2} J_0(\tau r) + \frac{\nu^A \omega_{2A}^2}{(1 - \nu^A)} \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right) \times \\ \times \{ [G\omega_{2B}^2 - 2(G-1)\tau^2]^2 V_2^A(\tau) - 4(G-1)^2 \tau^2 V_2^A(\tau)V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) + G\omega_{2A}^2 \omega_{2B}^2 V_2^B(\tau) + \\ + H[4\tau^2 V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) - (2\tau^2 - \omega_{2B}^2)^2][2K\tau^2 V_2^A(\tau) + G\omega_{2A}^2] + \\ + 2\tau^2 \omega_{2B}^2 V_2^A(\tau)[KV_2^B(\tau) + HV_1^B(\tau)] \},$$

$$\begin{aligned}
\Theta_2(r, \omega, \tau) = & \frac{6V_2^A(\tau)}{V(\tau)} (\{G^2\omega_{2B}^2(\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2) - 4(G-1)[G\omega_{2B}^2 - (G-1)\tau^2](\tau^2 - \omega_{2A}^2)\}V_1^A(\tau) + \\
& + G\{\omega_{2A}^2(\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2) - 4(G-1)[\omega_{2A}^2 + (G-1)\tau^2](\tau^2 - \omega_{2B}^2)\}V_1^B(\tau) + \\
& + G[G\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2 - 2(G-1)\tau^2]^2V_2^B(\tau) - 4(G-1)^2(\tau^2 - \omega_{2A}^2)V_1^A(\tau)V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)) \frac{\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) - \\
& - \frac{3}{V(\tau)} (KV_2^A(\tau)\{G(\omega_{2A}^2 - \omega_{2B}^2)[\tau^2\omega_{2B}^2 - (\tau^2 - \omega_{2A}^2)(4\tau^2 - \omega_{2B}^2)] + \\
& + 4(\tau^2 - \omega_{2A}^2)V_2^B(\tau)[G\omega_{2A}^2V_1^B(\tau) + \omega_{2B}^2V_1^A(\tau)]\} + \\
& + 2H\{GV_2^B(\tau)[(2\tau^2 - \omega_{2B}^2)^2 - 4\tau^2V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)][H\omega_{2A}^2V_1^A(\tau) + G\tau^2] + \\
& + V_2^B(\tau)[(2\tau^2 - \omega_{2A}^2)^2 - 4\tau^2V_1^A(\tau)V_2^A(\tau)][H\omega_{2B}^2V_1^B(\tau) + \tau^2 - V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)] + \\
& + GV_2^B(\tau)[4\omega_{2B}^2(\tau^2 - \omega_{2A}^2)(\tau)V_2^A(\tau)V_1^B + 4\tau^2(2\tau^2 - \omega_{2A}^2)V_2^B(\tau)V_1^B(\tau) + \\
& + 4\omega_{2A}^2(2\tau^2 - \omega_{2B}^2)V_2^A(\tau)V_1^A(\tau) - \omega_{2A}^2\omega_{2B}^2V_2^B(\tau)V_1^A(\tau) - 8\omega_{2A}^2V_1^A(\tau)V_2^A(\tau)V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) - \\
& - 2\tau^2(2\tau^2 - \omega_{2B}^2)(2\tau^2 - \omega_{2A}^2)] + 4\omega_{2B}^2(\tau^2 - \omega_{2A}^2)V_1^A(\tau)V_1^B(\tau)V_2^A(\tau)\} - \\
& - HK\{4V_2^A(\tau)(\tau^2 - \omega_{2A}^2)[\omega_{2B}^4 + 4\tau^2V_2^B(\tau)(V_2^B(\tau) - V_1^B(\tau))][GV_2^B(\tau) + V_1^A(\tau)] + \\
& + V_2^B(\tau)[4V_2^A(\tau)(\tau^2V_2^A(\tau) - \omega_{2A}^2V_1^A(\tau)) + \omega_{2A}^4] \times \\
& \times [H(2\tau^2 - \omega_{2B}^2)^2 - 4H\tau^2V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) + \omega_{2B}^2V_2^B(\tau)]\} \frac{\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) + \\
& + \frac{1}{V(\tau)} \left(\frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) F_{St}(\tau) - F_{St}(\tau)[1 + HV_2^B(\tau)]\omega_{2A}^2 \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) \right), \\
\Theta_3(r, \omega, \tau) = & 2 \left(\frac{\nu^A \omega_{2A}^2}{2(1 - \nu^A)} \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right) \times \\
& \times (V_2^A(\tau)\{2(G-1)[\omega_{2A}^2 + 2(G-1)\tau^2][\tau^2 - V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)] + \\
& + G\omega_{2B}^2[G\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2 - 4(G-1)\tau^2]\} - V_2^A(\tau)(2\tau^2 - \omega_{2A}^2) \times \\
& \times \{HK[(2\tau^2 - \omega_{2B}^2)^2 - 4\tau^2V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)] - \omega_{2B}^2(2HV_1^B(\tau) + KV_2^B(\tau))\}), \\
V(\tau) = & HV_2^A(\tau)V_2^B(\tau) + V_2^A(\tau) + GV_2^B(\tau), \\
V_j^D(\tau) = & \sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2} = \begin{cases} |\sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2}|, & \tau \geq \omega_{jD}, \\ -i|\sqrt{\omega_{jD}^2 - \tau^2}|, & \tau < \omega_{jD}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Из ГИУ (8) как частные случаи следуют соответствующие уравнения динамической задачи о трещине в идеально соединенных полупространствах [5], когда толщина прослойки стремится к нулю ($H \rightarrow 0$), и трещине в полупространстве со свободной от усилий поверхностью [12], когда модуль сдвига прослойки стремится к нулю ($H \rightarrow \infty$).

Регуляризация и численное решение ГИУ. Выделяя особенности с помощью интегралов типа ньютоновского (статического) потенциала, уравнение (8) можно тождественно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\Delta u_3(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_{\boldsymbol{\xi}} + q\omega_{2A}^2 \iint_S \frac{\Delta u_3(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}} + \iint_{S_\varepsilon} \Delta u_3(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{4(1 - \nu^A)}{\omega_{2A}^2} R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \omega) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{q\omega_{2A}^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \right) dS_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{4(1 - \nu^A)}{\omega_{2A}^2} \iint_S \Delta u_3(\boldsymbol{\xi}) \bar{R}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1 - \nu^A}{G^A} N(\mathbf{x}), \quad (10) \\ & \mathbf{x} \in S, \quad q = \frac{7 - 12\nu^A + 8(\nu^A)^2}{8(1 - \nu^A)}. \end{aligned}$$

В левой части ГИУ (10) третий интеграл регулярен, в чем можно убедиться, разлагая ядро R в ряд по величине $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$.

В соответствии с условием непрерывности перемещений в окрестности контура круговой трещины искомую функцию представим в виде произведения

$$\Delta u_3(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - (x_1 - d)^2 - x_2^2} \alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (11)$$

где $\alpha(\mathbf{x})$ — неизвестная функция; d — расстояние от центра дефекта до поверхности S^0 (см. рис. 1).

С учетом представления (11) особые интегралы в уравнении (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \alpha(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = I_{00}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) + I_{01}(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1} + I_{10}(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \\ & + \frac{1}{2} I_{02}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + I_{11}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} I_{20}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + \\ & + \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \left(\alpha(\boldsymbol{\xi}) - \alpha(\mathbf{x}) - (\xi_1 - x_1) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1} - (\xi_2 - x_2) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\xi_1 - x_1)^2 \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} - (\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2} (\xi_2 - x_2)^2 \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \right) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \alpha(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\ & = I(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) + \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} [\alpha(\boldsymbol{\xi}) - \alpha(\mathbf{x})] dS_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{jk}(\mathbf{x}) &= \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} (\xi_1 - x_1)^k (\xi_2 - x_2)^j dS_{\boldsymbol{\xi}}, \\ I(\mathbf{x}) &= \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (13) \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральные выражения в правых частях равенств (12) ограничены в точке $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, численное интегрирование в соответствующих интегралах проводилось вдоль области S_ε , образующейся из S путем удаления малой окрестности этой точки. Интегралы (13) существуют в смысле главного значения и вычисляются аналитически интегрированием по частям [13].

Подставляя соотношения (12) в ГИУ (10), получаем его регулярный аналог в виде

$$\begin{aligned} & [g_{00}(\mathbf{x}) + q\omega_{2A}^2 g(\mathbf{x})]\alpha(\mathbf{x}) + g_{01}(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1} + g_{10}(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \\ & + \frac{1}{2} g_{02}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + g_{11}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} g_{20}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + \\ & + \frac{4(1-\nu^A)}{\omega_{2A}^2} \left(\iint_{S_\varepsilon} \sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2} \alpha(\boldsymbol{\xi}) R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \omega) dS_\xi - \right. \\ & \left. - \iint_S \sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2} \alpha(\boldsymbol{\xi}) \bar{R}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) dS_\xi \right) = \frac{1-\nu^A}{GA} N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_{jk}(\mathbf{x}) &= I_{jk}(\mathbf{x}) - \iint_{S_\varepsilon} \sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2} \frac{(\xi_1 - x_1)^k (\xi_2 - x_2)^j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_\xi, \\ g(\mathbf{x}) &= I(\mathbf{x}) - \iint_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_\xi. \end{aligned}$$

Учитывая регулярность ядер в уравнении (14), можно построить его дискретный аналог. С этой целью круговая область S делится на $Q - 1$ четырехугольных элементов S_q ($q = \overline{1, Q-1}$) равной длины в направлении радиальной и угловой координат, дополнительный круговой элемент S_Q располагается в центре трещины ($S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_Q$). Неизвестная функция $\alpha(\mathbf{x})$ аппроксимируется на сетке граничных элементов следующим образом:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^Q \alpha_q \theta_q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (15)$$

Здесь коэффициент $\alpha_q = \alpha(\mathbf{x}_q)$ равен значению неизвестной функции в геометрическом центре \mathbf{x}_q q -го элемента; θ_q ($q = \overline{1, Q}$) — известные весовые функции, такие что $\theta_q(\mathbf{x}_m) = \delta_{qm}$.

Подставляя интерполяционное соотношение (15) в регулярный аналог ГИУ (14) и требуя выполнения уравнения в каждой узловой точке \mathbf{x}_q ($q = \overline{1, Q}$), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами относительно значений α_q :

$$\sum_{m=1}^Q e_{qm} \alpha_m = \frac{1-\nu^A}{GA} N(\mathbf{x}_q), \quad q = \overline{1, Q}.$$

Здесь коэффициенты e_{qm} определяются соотношениями

$$e_{qm} = [g_{00}(\mathbf{x}_q) + q\omega_{2A}^2 g(\mathbf{x}_q)]\delta_{qm} + g_{10}(\mathbf{x}_q) \frac{\partial \theta_m(\mathbf{x}_q)}{\partial x_1} + g_{01}(\mathbf{x}_q) \frac{\partial \theta_m(\mathbf{x}_q)}{\partial x_2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} g_{20}(\mathbf{x}_q) \frac{\partial^2 \theta_m(\mathbf{x}_q)}{\partial x_1^2} + g_{11}(\mathbf{x}_q) \frac{\partial^2 \theta_m(\mathbf{x}_q)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} g_{02}(\mathbf{x}_q) \frac{\partial^2 \theta_m(\mathbf{x}_q)}{\partial x_2^2} + \\
 & + \frac{4(1 - \nu^A)}{\omega_{2A}^2} \iint_{S_m} \sqrt{a^2 - (\xi_1 - d)^2 - \xi_2^2} \theta_m(\boldsymbol{\xi}) [(1 - \delta_{qm})R(|\mathbf{x}_q - \boldsymbol{\xi}|, \omega) - \\
 & \qquad \qquad \qquad - \bar{R}(\mathbf{x}_q, \boldsymbol{\xi}, \omega)] dS_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов e_{qm} по формулам (16) полубесконечный интеграл в ядре \bar{R} (9) заменялся конечным с достаточно большим конечным интервалом с учетом убывания подынтегральной функции при $\tau \rightarrow \infty$. Также применялись разностные схемы замены производных. При численном интегрировании использовалась кусочно-постоянная аппроксимация решения:

$$\theta_q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in S_q, \\ 0, & \mathbf{x} \notin S_q. \end{cases}$$

Зная дискретное решение $\alpha(\mathbf{x})$, легко найти коэффициент интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва в окрестности трещины по формуле [14]

$$K_I(\varphi) = -\frac{2G^A \pi \sqrt{\pi a}}{1 - \nu^A} \alpha(\mathbf{x}) \Big|_{\substack{x_1 = d - a \cos \varphi, \\ x_2 = a \sin \varphi}}$$

где φ — угловая координата точки контура трещины (см. рис. 1).

Численные результаты. В качестве примера рассмотрим трещину, центр которой расположен на расстоянии от прослойки $d = 1,15a$. Поверхности трещины нагружены разрывными усилиями постоянной амплитуды ($N(\mathbf{x}) = N_0 = \text{const}$). Плотности и коэффициенты Пуассона составляющих композита полагались равными: $\rho^A = \rho^B$, $\nu^A = \nu^B = \nu^0 = 0,3$, а неоднородность тела обеспечивалась различными модулями сдвига

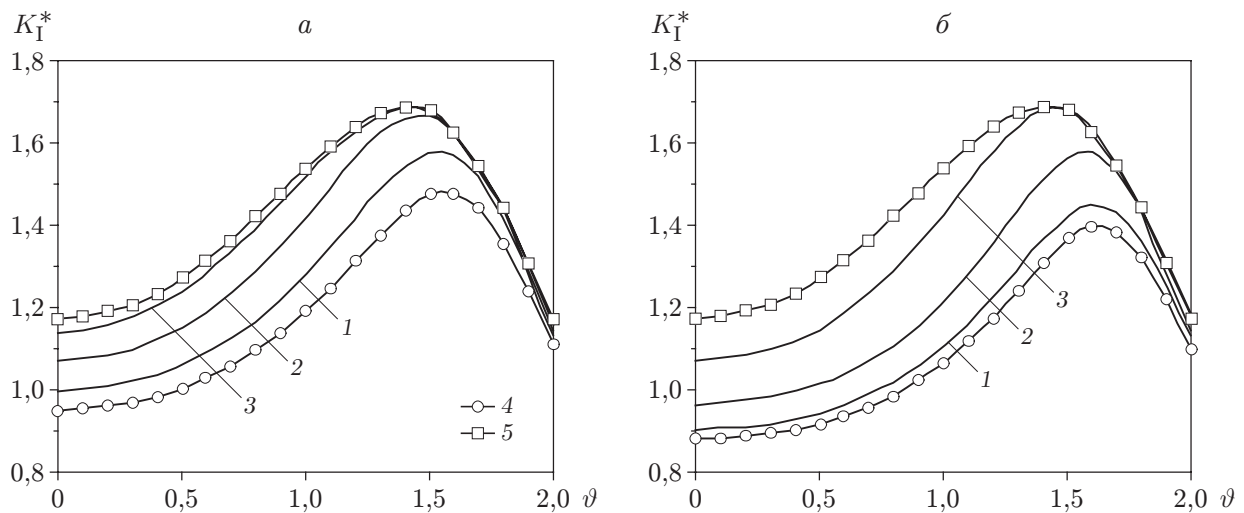


Рис. 2. Зависимость амплитуды нормированного КИН K_I^* от нормализованного волнового числа ϑ в ближайшей к прослойке точке контура трещины ($\varphi = 0$) при $G^* = 100$:
 а — $G = 2$; б — $G = 10$; 1 — $h = 0,005a$; 2 — $h = 0,025a$; 3 — $h = 0,15a$; 4 — идеально соединенные полупространства с трещиной; 5 — полупространство с трещиной при нулевых усилиях на его поверхности

материалов полупространств A , B и прослойки. Область трещины была разделена на 217 граничных элементов ($\Delta r = 0,1a$, $\Delta\varphi = \pi/12$). Дальнейшего сгущения сетки элементов не требовалось, поскольку относительная погрешность решения не превышала 1 %.

На рис. 2 представлена зависимость амплитуды нормированного КИН $K_I^* = |K_I|/K_I^s$ ($K_I^s = 2N_0\sqrt{a/\pi}$ — статический КИН для такой же трещины в однородном теле под действием усилий N_0) от нормализованного волнового числа $\vartheta = \omega_{2A}a$ в ближайшей к прослойке точке контура трещины. В рассмотренном частотном диапазоне общей закономерностью поведения КИН является его увеличение от статических значений, когда волновое число равно нулю, до максимальных с последующим монотонным убыванием (рис. 2). При наличии прослойки КИН больше, чем в биматериале с идеальным контактом полупространств. С увеличением толщины прослойки КИН увеличивается и при больших ее значениях приближается к КИН для трещины в полупространстве со свободной от усилий поверхностью. Этот верхний предел достигается быстрее при меньшем различии модулей упругости смежных полупространств. При достаточно больших волновых числах влияние неоднородности тела на КИН уменьшается. Аналогичный результат имеет место при удалении трещины от поверхности раздела, тогда КИН стремится к соответствующим значениям для трещины в однородном теле [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ехлаков А. В. Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 147–156.
2. Михаськив В. В., Сладек Я., Сладек В., Степанюк А. И. О концентрации напряжений возле эллиптической трещины на границе раздела упругих тел при установившихся колебаниях // Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 6. С. 81–89.
3. Станкевич В. З., Стасюк Б. М., Хай О. М. Решение динамической задачи о взаимодействии компланарных трещин в полупространстве с заземленной поверхностью посредством граничных интегральных уравнений // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 1. С. 153–159.
4. Lei J., Wang Y.S., Gross D. Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material: time-domain BEM analysis // Arch. Appl. Mech. 2003. V. 73, N 3/4. P. 225–240.
5. Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I. Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica. 2001. V. 36, N 4. P. 479–495.
6. Хай М. В., Степанюк А. И. О взаимодействии трещин в кусочно-однородном теле // Прикл. механика. 1992. Т. 28, № 12. С. 46–56.
7. Noda N. A., Kouyama T., Kinoshita Y. Stress intensity factors of inclined elliptical crack near a bimaterial interface // Engng Fract. Mech. 2006. V. 73, N 10. P. 1292–1320.
8. Xiao H. T., Yue Z. Q., Tham L. G., Chen Y. R. Stress intensity factors for penny-shaped cracks perpendicular to graded interfacial zone of bonded bi-materials // Engng Fract. Mech. 2005. V. 72, N 1. P. 121–143.
9. Boström A., Olsson P. A comparison of exact first order and spring boundary conditions for scattering by thin layers // J. Nondestructive Evaluat. 1992. V 11, N 3/4. P. 175–184.
10. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. Киев: Наук. думка, 1981.
11. Kit H. S., Khaj M. V., Mykhas'kiv V. V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Engng Fract. Mech. 1996. V. 55, N 3. P. 191–207.

12. **Zhang Ch., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z.** Time-harmonic analysis of a planar crack in an elastic half-space by BEM // Computational fluid and solid mechanics. Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 557–560.
13. **Mykhas'kiv V. V., Zhang Ch., Sladek J., Sladek V.** A frequency-domain BEM for 3D non-synchronous crack interaction analysis in elastic solids // Engng Anal. Bound. Elements. 2006. V. 30, N 3. P. 167–175.
14. **Zhang Ch.** On wave propagation in elastic solids with cracks / Ch. Zhang, D. Gross. Southampton: Comput. Mech. Publ., 1998.
15. **Шифрин Е. И.** Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.

*Поступила в редакцию 6/III 2007 г.,
в окончательном варианте — 19/VII 2007 г.*
