$\mathcal{AMS}$ subject classification: 90C05, 90C20, 90C25

Эффективный метод логарифмических барьеров без линейного поиска для выпуклого квадратичного программирования

С. Чагуб[1], Д. Бентерки[2]

[1]School of Mathematical Science & Institute of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China

[2]Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics, Setif-1 Ferhat Abbas University, 19000, Algeria

E-mails: chaghoubsoraya@yahoo.fr (Чагуб С.), djbenterki@univ-setif.dz (Бентерки Д.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 15, 2022.

Чагуб С., Бентерки Д. Эффективный метод логарифмических барьеров без линейного поиска для выпуклого квадратичного программирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 193–207.

В данной работе мы имеем дело с выпуклой квадратичной задачей с ограничениями в виде неравенств. Мы используем метод логарифмических барьеров, основанный на некоторых новых приближенных функциях. Эти функции имеют то преимущество, что они позволяют легко вычислять шаг смещения, не занимая много времени, в отличие от метода линейного поиска, который требует много времени и средств для определения шага смещения. Мы разработали реализацию с помощью MATLAB и провели численные тесты на некоторых примерах большого размера. Полученные численные результаты показывают точность и эффективность нашего подхода.

DOI: 10.15372/SJNM20220207

Ключевые слова: *квадратичное программирование, линейное программирование, методы внутренней точки, линейный поиск, приближенная функция.*

Chaghoub S., Benterki D. An efficient logarithmic barrier method without line search for convex quadratic programming // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 2. — P. 193–207.

In this work, we deal with a convex quadratic problem with inequality constraints. We use a logarithmic barrier method based on some new approximate functions. These functions have the advantage that they allow computing the displacement step easily and without consuming much time contrary to a line search method, which is time-consuming and expensive to identify the displacement step. We have developed an implementation with MATLAB and conducted numerical tests on some examples of considerable size. The obtained numerical results show the accuracy and efficiency of our approach.

Keywords: *quadratic programming, linear programming, interior point methods, line search, approximate function.*

1. Введение

Задачи выпуклого квадратичного программирования с линейными ограничениями, ввиду его важной роли, возникают в нескольких областях применений, таких как экономическое, социальное, общественное планирование и производство. Для решения этого класса задач было предложено несколько подходов и множество алгоритмов. Свойства задач квадратичного программирования имеют много общего с комбинаторными свойствами задач линейного программирования. Эти свойства позволяют разрабатывать алгоритмы, расширяющие симплекс-метод для решения квадратичных задач. Как и метод Вульфа [20], этот метод основан на принципе преобразования задачи в линейную, что позволяет применять симплекс-метод. Однако в этом методе мы должны добавить большое число искусственных переменных и ограничений. Доззи [11] также использовал симплекс-метод для примера в двух переменных. Гертнер и Шенхерр [13] представили метод, обеспечивающий точное решение; этот метод обобщает симплекс-метод и должен применяться к плотной задаче с небольшим числом переменных и ограничений. В 2009 г. Шихауи с соавторами [8] представили алгоритм для решения квадратичной функции в каноническом виде. Белаббачи с соавторами [2] предложили алгоритм, обеспечивающий точное решение без добавления переменных. В 2017 г. Белаббачи и Дейджббар [3] представили метод разделения и исключения на основе концентрических сфер и эллипсоидов.

Задачи выпуклого квадратичного программирования также изучались с точки зрения методов внутренней точки после того, как Кармаркар [23] представил эффективный полиномиальный алгоритм для линейного программирования. Ваидя [19] и Тсе [24] представили алгоритм внутренней точки, основанный на проективном преобразовании Кармаркара для выпуклого квадратичного программирования. В последнее время прямо-двойственные методы слежения за траекторией являются наиболее распространенными среди методов внутренней точки. В частности, прямо-двойственные методы внутренней точки через керн-функции являются одними из наиболее изученных (см., например, работу Баи с соавторами [1] в области линейной оптимизации, где они представили большой класс керн-функций). В 2020 г. Буджеллаль с соавторами [6] также предложили прямо-двойственный алгоритм внутренней точки на основе керн-функций. Они показали эффективность полученного алгоритма, выполнив несколько численных тестов.

Методы логарифмических барьеров внутренней точки через приближенные функции (мажорантная и минорантная функции) представляют собой класс методов внутренней точки, которые были введены Крузе и Мерихи [9] для решения полуопределенной задачи программирования. Они предложили несколько новых мажорантных функций и провели численные тесты, показывающие эффективность полученного алгоритма. На основании результатов [9] Мерихи и Бентерки [5] предложили подход с точки зрения логарифмического барьера с использованием некоторых новых мажорантных функций для линейного программирования. Учитывая результаты предыдущих работ, Чериф и Мерихи [7] предложили метод штрафа на основе новой мажорантной функции для нелинейного программирования. Кроме того, Леуми с соавторами (см. [15, 16]) представили некоторые новые минорантные функции для полуопределенного и линейного программирования.

Основываясь на предыдущих работах, наша цель — оптимизация выпуклой квадратичной задачи при ограничениях в виде неравенства при использовании простого и эффективного подхода с точки зрения логарифмического барьера на основе новых приближенных функций (новых мажорантных и новых минорантных функций). Эти приближенные функции позволяют легко и быстро вычислять шаг смещения, что улучшает неудобный метод линейного поиска.

Остальная часть статьи состоит из пяти пунктов. В пункте 2 дана формулировка выпуклой квадратичной задачи и соответствующей возмущенной задачи и представлены результаты сходимости. В п. 3 представлено решение соответствующей возмущенной задачи и основной результат статьи при введении новых приближенных функций. Краткое описание алгоритма и численных тестов дано в п. 4. В п. 5 сформулированы выводы статьи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую выпуклую квадратичную задачу:

$$\begin{cases} \min q(x) = \dfrac{1}{2}x^t Q x + c^t x, \\ x \in D, \end{cases} \tag{PQ}$$

где Q — $\mathbb{R}^{n\times n}$ симметричная полуопределенная матрица, $c \in \mathbb{R}^n$ и $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, где $b \in \mathbb{R}^m$ и A есть $\mathbb{R}^{m\times n}$ матрица.

Мы делаем следующие предположения:

1. Матрица A имеет полный ранг системы строк ($\operatorname{rank}(A) = m < n$).
2. (PQ) удовлетворяет условию внутренней точки (УВТ), т. е. существует $x^0 \in \mathbb{R}^n$ такое, что
$$Ax^0 > b.$$
3. Множество оптимальных решений задачи (PQ) — непустое и ограниченное.

2.1. Предварительная информация

Напомним, что скалярное произведение $x, y \in \mathbb{R}^n$ задается следующим образом:

$$\langle x, y\rangle = x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

а евклидова норма y задается путем

$$\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Пусть (PQr) — возмущенная задача без ограничений, связанная с (PQ). Эта задача определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \min q_r(x), \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{PQr}$$

где $q_r : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ — барьерная функция, определяемая формулой:

$$q_r(x) = \begin{cases} q(x) - r\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \ln\langle e_i, Ax - b\rangle, & \text{если} \quad Ax - b > 0, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Причем $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^m$ и r — строго положительный параметр барьера.

Поскольку (PQ) выпукло и, согласно предположению (3), множество его решений является непустым и ограниченным. Тогда в соответствии с [7] строго выпуклая задача (PQr) допускает единственное оптимальное решение x_r^* для каждого $r > 0$. Решение задачи (PQ) возвращает нас к решению серии задач (PQr). Полученная последовательность x_r решения (PQr) должна сходиться к решению (PQ), когда r стремится к 0.

Ниже мы исследуем сходимость (PQr) к (PQ).

2.2. Сходимость возмущенной задачи $(\boldsymbol{PQr})$ к $(\boldsymbol{PQ})$

Пусть $r > 0$. Для всех $x \in D$ определим

$$\phi(x,r) = q_r(x) = \begin{cases} q(x) - r\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \ln\langle e_i, Ax-b\rangle, & \text{если } \ Ax-b>0, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть $r > 0$. Если x_r — оптимальное решение задачи (PQr), такое что $\lim_{r\to 0} x_r = x^*$, то x^* — оптимальное решение задачи (PQ).*

Доказательство. В соответствии с необходимыми и достаточными условиями и благодаря дифференцируемости выпуклой функции ϕ в точке (x_r, r), мы имеем

$$\nabla_x \phi(x_r, r) = \nabla q_r(x_r) = 0,$$

и для всех x после проверки $Ax - b > 0$ мы имеем

$$q(x) = \phi(x,0) \geq \phi(x_r, r) + \langle x - x_r, \nabla_x \phi(x_r, r)\rangle + (0 - r)\phi_r'(x_r, r).$$

Тогда

$$q(x) \geq q(x_r) - r\sum_{i=1}^{m} \ln\langle e_i, Ax-b\rangle + r\sum_{i=1}^{m} \ln\langle e_i, Ax-b\rangle = q(x_r).$$

Поэтому

$$\min_{x\in D} q(x) \geq q(x_r) \ \ \forall r > 0.$$

С другой стороны, мы имеем

$$\min_{x\in D} q(x) \leq q(x_r) \ \ \forall r > 0.$$

Следовательно,

$$\min_{x\in D} q(x) = \lim_{r\to 0} q(x_r) = q(x^*),$$

и заявленный результат получен. □

3. Решение возмущенной задачи

Поскольку задача (PQr) является строго выпуклой, то необходимые и достаточные условия оптимальности обеспечивают тот факт, что x_r является оптимальным решением (PQr) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет нелинейной системе

$$\nabla q_r(x_r) = 0.$$

Для решения приведенной выше системы мы предлагаем логарифмический метод внутренней точки, основанный на подходе Ньютона. Этот подход основан на построении серии внутренних точек, которые должны постепенно сходиться к оптимальному решению (PQ).

Подход Ньютона заключается в нахождении на каждой итерации вектора $x_{k+1} = x_k + d_k$, удовлетворяющего следующей линейной системе:

$$\nabla^2 q_r(x_r) d_k = -\nabla q_r(x_r). \tag{1}$$

В оставшейся части статьи мы рассматриваем x вместо x_r. К сожалению, этот подход не гарантирует, что каждая итерация x_{k+1}, сгенерированная алгоритмом, допустима, т. е. мы не можем гарантировать, что $A(x_k + d_k) > b$. Чтобы избежать этой трудности, мы введем на каждой итерации шаг смещения α_k, что может гарантировать допустимость $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

Для вычисления шага смещения α_k используются два подхода:

1. Методы линейного поиска: эти методы проверяют последовательность возможных значений α_k, останавливаясь для принятия одного из этих значений при выполнении некоторых условий. Идеальный выбор шага смещения — это глобальный минимизатор одномерной функции $\varphi(\cdot)$, определяемой путем

   $$\varphi(\alpha) = \min_{\alpha>0} q_r(x + \alpha d).$$

   Наиболее распространенными методами линейного поиска являются методы Вульфа, Гольдштейна–Армийо и Фибоначчи.

   Однако, в общем, методы линейного поиска являются слишком дорогими для определения шага смещения.

2. Приближенная функция (мажорантная или минорантная): сложный метод, введенный Крузе и Мерихи [9] для решения положительной полуопределенной задачи программирования. Цель метода — аппроксимация функции $\theta(\alpha)$, определяемой следующим образом:

   $$\theta(\alpha) = \frac{1}{r}(q_r(x + \alpha d) - q_r(x)).$$

   В отличие от метода линейного поиска, приближенная функция должна быть простой, и ее минимум должен вычисляться легко, что позволит без затруднений и за короткое время вычислить шаг смещения.

В следующей лемме мы даем простой вид функции $\theta(\alpha)$.

Лемма 2. *Для всех $\alpha \in [0, \tilde{\alpha}[$, где $\tilde{\alpha} = \min_{i \in I_-} \left\{\frac{-1}{y_i}\right\}$ и $I_- = \{i : y_i < 0\}$, функцию θ можно записать следующим образом:*

$$\theta(\alpha) = \alpha \left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \|y\|^2 \right) - \sum_{i=1}^{m} \ln(1 + \alpha y_i) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 d^t Q d - \alpha d^t Q d \right),$$

где $y_i = \dfrac{\langle e_i, Ad \rangle}{\langle e_i, Ax - b \rangle}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\theta(\alpha) &= \frac{1}{r}(q_r(x+\alpha d) - q_r(x)) \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}(x+\alpha d)^t Q(x+\alpha d) + c^t(x+\alpha d) - \frac{1}{2}x^t Qx - c^t x\right) - \sum_{i=1}^m \ln\left(1+\alpha\frac{\langle e_i, Ad\rangle}{\langle e_i, Ax-b\rangle}\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\alpha d^t Qx + \frac{1}{2}\alpha x^t Qd + \frac{1}{2}\alpha^2 d^t Qd + \alpha c^t d\right) - \sum_{i=1}^m \ln\left(1+\alpha\frac{\langle e_i, Ad\rangle}{\langle e_i, Ax-b\rangle}\right).\end{aligned}$$

Поскольку Q симметрично, $x^tQd = d^tQx$. Тогда

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{r}\left(\alpha d^t Qx + \frac{1}{2}\alpha^2 d^t Qd + \alpha c^t d\right) - \sum_{i=1}^m \ln\left(1+\alpha\frac{\langle e_i, Ad\rangle}{\langle e_i, Ax-b\rangle}\right).$$

Мы также имеем

$$\nabla q_r(x) = Qx + c - r\sum_{i=1}^m \frac{A^t e_i}{\langle e_i, Ax-b\rangle}$$

и

$$\nabla^2 q_r(x) = Q + r\sum_{i=1}^m \frac{A^t e_i (A^t e_i)^t}{(\langle e_i, Ax-b\rangle)^2},$$

и из (1)

$$d^t\nabla q_r(x) = -d^t\nabla^2 q_r(x) d$$

мы получим

$$d^tQx + d^tc - rd^t\sum_{i=1}^m \frac{A^t e_i}{\langle e_i, Ax-b\rangle} = -d^tQd - r\sum_{i=1}^m \frac{\langle e_i, Ad\rangle^2}{\langle e_i, Ax-b\rangle^2}.$$

Тогда

$$d^tQx + d^tc = -d^tQd - r\sum_{i=1}^m \frac{\langle e_i, Ad\rangle^2}{\langle e_i, Ax-b\rangle^2} + rd^t\sum_{i=1}^m \frac{A^t e_i}{\langle e_i, Ax-b\rangle},$$

откуда

$$\begin{aligned}\theta(\alpha) &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 d^tQd + \alpha\left(-d^tQd - r\sum_{i=1}^m \frac{\langle e_i, Ad\rangle^2}{\langle e_i, Ax-b\rangle^2}\right) + rd^t\sum_{i=1}^m \frac{A^t e_i}{\langle e_i, Ax-b\rangle}\right) - \\ &\quad \sum_{i=1}^m \ln\left(1+\alpha\frac{\langle e_i, Ad\rangle}{\langle e_i, Ax-b\rangle}\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 d^tQd - \alpha d^tQd\right) + \alpha\left(\sum_{i=1}^m y_i - \|y\|^2\right) - \sum_{i=1}^m \ln(1+\alpha y_i),\end{aligned}$$

что является заявленным результатом. □

3.1. Монотонность q_r

Следующая лемма показывает, что функция q_r убывает от итерации k к следующей итерации $k+1$, что обеспечивает минимизацию функции.

Лемма 3. *Пусть x_k и x_{k+1} — две последовательные итерации. Мы имеем*

$$q_r(x_{k+1}) < q_r(x_k).$$

Доказательство. Пусть x_k и x_{k+1} — два допустимых решения, полученных на итерациях k и $k+1$ соответственно. Мы имеем

$$q_r(x_{k+1}) \simeq q_r(x_k) + \langle \nabla q_r(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle$$

и

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k.$$

Тогда, поскольку q_r выпукла, мы имеем

$$q_r(x_{k+1}) - q_r(x_k) \simeq \langle \nabla q_r(x_k), \alpha_k d_k \rangle \simeq -\alpha_k \langle \nabla^2 q_r(x_k) d_k, d_k \rangle < 0.$$

Следовательно,

$$q_r(x_{k+1}) < q_r(x_k),$$

что является заявленным результатом. □

Ниже мы приводим некоторые полезные неравенства, которые будут использоваться на протяжении всей статьи.

Пусть среднее $\overline{z}$ и стандартное отклонение σ_z статического ряда $z_1, z_2, \ldots, z_m$, m вещественных переменных задаются следующим образом: $\overline{z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m z_i$ и $\sigma_z^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (z_i - \overline{z})^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m z_i^2 - \overline{z}^2$ для $z_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Волкович [21] ввел следующие неравенства:

$$\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1} \le \min_i z_i \le \overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}},$$

$$\overline{z} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}} \le \max_i z_i \le \overline{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}.$$

Теорема 1 [9]. *Пусть $z_i > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ мы имеем*

$$(m-1)\ln\left(\overline{z} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) + \ln\left(\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1}\right) \le \sum_{i=1}^m \ln(z_i) \le \ln\left(\overline{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}\right) + (m-1)\ln\left(\overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right),$$

где $z_i = 1 + \alpha y_i$, $\overline{z} = 1 + \alpha\overline{y}$ и $\sigma_z = \alpha\sigma_y$.

Теперь представим ключевой результат статьи.

3.2. Новые приближенные функции для $\theta(\alpha)$

Пусть $\theta(\alpha) = \alpha\left(\sum_{i=1}^m y_i - \|y\|^2\right) - \sum_{i=1}^m \ln(1+\alpha y_i) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 d^t Q d - \alpha d^t Q d\right)$ определена на $\tilde{\alpha} = \min_{i \in I_-}\left\{\frac{-1}{y_i}\right\}$, так что $I_- = \{i : y_i < 0\}$. Следующая лемма вводит две новые приближенные функции для θ.

Лемма 4. *Для всех* $\alpha \in [0, \overline{\alpha}[\cap [0, \tilde{\alpha}[$, *где* $\overline{\alpha} = \sup\{\alpha, 1 + \alpha\beta > 0\}$, *мы имеем*

$$\theta_{\mathrm{Min}}(\alpha) \leq \theta(\alpha),$$

и для всех $\alpha \in [0, \hat{\alpha}[\cap [0, \tilde{\alpha}[$, *где* $\hat{\alpha} = \sup\{\alpha, 1 + \alpha\lambda > 0\}$, *мы имеем*

$$\theta(\alpha) \leq \theta_{\mathrm{Maj}}(\alpha),$$

где

$$\theta_{\mathrm{Min}}(\alpha) = \delta\alpha - (m-1)\ln(1+\beta\alpha) - \ln(1+\gamma\alpha) - \frac{1}{r}\overline{\alpha} d^t Q d$$

и

$$\theta_{\mathrm{Maj}}(\alpha) = \alpha\mu - (m-1)\ln(1+\alpha\lambda) - \ln(1+\alpha\rho) + \frac{1}{2r}\hat{\alpha}^2 d^t Q d$$

при

$$\begin{cases} \delta & = m\overline{y} - \|y\|^2, \\ \beta & = \overline{y} - \dfrac{\sigma y}{\sqrt{m-1}}, \\ \gamma & = m\overline{y} + \sigma_y\sqrt{m-1} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \mu & = m\overline{y} - \|y\|^2, \\ \rho & = \overline{y} + \dfrac{\sigma y}{\sqrt{m-1}}, \\ \lambda & = \overline{y} - \sigma_y\sqrt{m-1}. \end{cases}$$

Доказательство.

1. Начнем с доказательства $\theta(\alpha) \geq \theta_{\mathrm{Min}}(\alpha)$.

   Из теоремы 1 мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \ln z_i \leq \ln(\overline{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}) + (m-1)\ln\left(\overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right).$$

   Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) \leq \ln(\overline{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}) + (m-1)\ln\left(\overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right)$$

   и

$$-\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) \geq -\ln(\overline{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}) - (m-1)\ln\left(\overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right).$$

   Следовательно,

$$-\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) + \alpha\left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \|y\|^2\right) \geq -(m-1)\ln\left(\overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) + \alpha\sum_{i=1}^{m} y_i - \ln(\overline{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}) - \alpha\|y\|^2. \tag{2}$$

   Мы также имеем

$$\frac{1}{2}\alpha^2 d^t Q d \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}[\cap [0, \tilde{\alpha}[\tag{3}$$

   и

$$-\alpha d^tQd \geq -\overline{\alpha} d^tQd \quad \forall \alpha \in [0, \overline{\alpha}[\cap [0, \tilde{\alpha}[\,. \tag{4}$$

Суммируя (2), (3) и (4), получим

$$-\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) + \alpha\left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \|y\|^2\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 d^tQd - \alpha d^tQd\right)$$

$$\geq -\ln\left(\bar{z} + \sigma_z\sqrt{m-1}\right) - (m-1)\ln\left(\bar{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) + \alpha\left(\sum_{i=1}^{m} y_i - \|y\|^2\right) - \frac{1}{r}\bar{\alpha} d^tQd$$

$$= \delta\alpha - (m-1)\ln(1+\beta\alpha) - \ln(1+\gamma\alpha) - \frac{1}{r}\bar{\alpha} d^tQd = \theta_{\mathrm{Min}}(\alpha).$$

Поэтому

$$\theta(\alpha) \geq \theta_{\mathrm{Min}}(\alpha).$$

2. Теперь докажем, что $\theta(\alpha) \leq \theta_{\mathrm{Maj}}(\alpha)$.

Из теоремы 1 имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \ln z_i \geq (m-1)\ln\left(\overline{z} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) + \ln(\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1}).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) \geq (m-1)\ln\left(\overline{z} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) + \ln(\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1})$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) + \alpha\|y\|^2 \geq (m-1)\ln\left(\overline{z} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) + \ln(\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1}) + \alpha\|y\|^2.$$

Это дает

$$-\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) - \alpha\|y\|^2 + m\alpha\overline{y} \leq -(m-1)\ln\left(\overline{z} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) - \ln\left(\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1}\right) - \alpha\|y\|^2 + m\alpha\overline{y}. \tag{5}$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2}\alpha^2 d^tQd \leq \frac{1}{2}\hat{\alpha}^2 d^tQd \quad \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}[\cap [0, \tilde{\alpha}[\tag{6}$$

и

$$-\alpha d^tQd \leq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}[\cap [0, \tilde{\alpha}[\,. \tag{7}$$

Суммируя (5), (6) и (7), получим

$$-\sum_{i=1}^{m} \ln(1+\alpha y_i) - \alpha\|y\|^2 + m\alpha\overline{y} + \frac{1}{2r}\alpha^2 d^tQd - \frac{1}{r}\alpha d^tQd \leq -(m-1)\ln\left(\overline{z} - \frac{\sigma_z}{\sqrt{m-1}}\right) - \alpha\|y\|^2$$

$$- \ln\left(\overline{z} - \sigma_z\sqrt{m-1}\right) + m\alpha\overline{y} + \frac{1}{2r}\hat{\alpha}^2 d^tQd$$

$$= \alpha\mu - (n-1)\ln(1+\alpha\lambda) - \ln(1+\alpha\rho) + \frac{1}{2r}\hat{\alpha}^2 d^tQd = \theta_{\mathrm{Maj}}(\alpha).$$

Следовательно,

$$\theta(\alpha) \leq \theta_{\mathrm{Maj}}(\alpha).$$

3.2.1. Минимизация приближенных функций

Функции θ_{Min} и θ_{Maj} хорошо определены и выпуклы на $[0, \overline{\alpha}[$ и $[0, \hat{\alpha}[$ соответственно. Тогда они имеют глобальный минимум. Минимумы θ_{Min} и θ_{Maj} достигаются, когда $\theta'_{\text{Min}}(\alpha) = 0$ и $\theta'_{\text{Maj}}(\alpha) = 0$ соответственно. Следовательно, для нахождения минимума двух функций: θ_{Min} и θ_{Maj}, вернемся к решению двух уравнений: $\theta'_{\text{Min}}(\alpha) = 0$ и $\theta'_{\text{Maj}}(\alpha) = 0$ соответственно.

Решение $\theta'_{\text{Min}}(\alpha) = 0$ — это корни уравнения

$$\alpha^2 + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{m}{\delta}\right)\alpha - \frac{\|y\|^2}{\gamma\delta\beta} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет два следующих корня:

$$\alpha_1^* = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \alpha_2^* = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2},$$

где $\Delta = b^2 - 4c$, $b = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{m}{\delta}$ и $c = -\frac{\|y\|^2}{\gamma\delta\beta}$.

Теперь вычислим корни уравнения $\theta'_{\text{Maj}}(\alpha) = 0$.

Решение последнего уравнения $\theta'_{\text{Maj}}(\alpha) = 0$ эквивалентно решению следующего полиномиального уравнения второй степени:

$$\alpha^2 + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\lambda} - \frac{m}{\mu}\right)\alpha - \frac{\|y\|^2}{\rho\lambda\mu} = 0. \tag{9}$$

Приведенное выше уравнение (9) имеет два следующих корня:

$$\ddot{\alpha}_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2}, \qquad \ddot{\alpha}_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2},$$

где $\Delta_1 = b_1^2 - 4c_1$, $b_1 = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\lambda} - \frac{m}{\mu}$ и $c_1 = -\frac{\|y\|^2}{\rho\lambda\mu}$. Однако только α_1^* принадлежит $[0, \overline{\alpha}[$ и $\ddot{\alpha}_1$ принадлежит $[0, \hat{\alpha}[$. Следовательно, глобальные минимумы функций θ_{Min} и θ_{Maj} достигнуты в точках α_1^* и $\ddot{\alpha}_1$ соответственно.

Теперь мы можем описать алгоритм логарифмического барьера для решения квадратичной задачи (PQ).

4. Описание алгоритма и численные результаты

Данные. Квадратичная задача (PQ) и ее система неравенств $Ax \geq b$, строго допустимое решение x_0 (PQ), $r > 0$, заданная точность ε, $k = 0$.
Результат. Оптимальное решение x^* для (PQ).

Начать алгоритм

- Пока $\|\nabla q_r(x_k)\| > \varepsilon$ выполнить:
  1. Решить линейную систему (1) $\nabla^2 q_r(x_k) d_k = -\nabla q_r(x_k)$.
  2. Вычислить шаг смещения α_k.
  3. Положить $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ и $k = k + 1$.
  4. Взять $r = \rho$r, $0 < \rho < 1$.
- Конец цикла.

Закончить алгоритм

4.1. Численные тесты

Чтобы оценить эффективность нашего алгоритма на основе наших приближенных функций, мы провели сравнительные численные тесты между нашими новыми двумя приближенными функциями (минорантной функцией и мажорантной функцией) методом линейного поиска Вульфа.

Введем обозначения: $ex(m, n)$ (пример из m ограничений и n переменных), метод LS (подход, использующий метод линейного поиска Вульфа), метод MinF (подход, использующий минорантную функцию), метод MajF (подход, использующий мажорантную функцию), Itr (число итераций, необходимых для поиска оптимального решения для (PQ)), time (время выполнения в секундах).

4.1.1. Примеры с фиксированным размером

Следующие примеры с фиксированным размером случайно генерируются в MATLAB.

Таблица 1. Пример с фиксированным размером

$ex(m, n)$	метод MajF		метод MinF		метод LS	
	Itr	время, (с)	Itr	время, (с)	Itr	время, (с)
$ex1(2, 4)$	2	0.014	1	0.007	7	0.087
$ex2(3, 5)$	7	0.024	6	0.019	13	0.089
$ex3(3, 6)$	11	0.043	7	0.061	19	0.103
$ex4(5, 7)$	13	0.065	10	0.048	28	0.173
$ex5(6, 10)$	16	0.076	12	0.041	29	0.222

4.1.2. Примеры с переменным размером

Следующие примеры с переменным размером взяты из литературы. В таблицах 2–5 мы приводим результаты, полученные с использованием метода приближенной функции и метода линейного поиска для вычисления шага смещения в алгоритме.

Пример 1. Для $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $n = 2m$,

$$A\,[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = i + m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$c[i] = -1, \quad c[i+m] = 0, \quad b[i] = 2.$$

Для $i, j = 1, \dots, n$

$$Q\,[i, j] = \begin{cases} 2j - 1, & i > j, \\ 2i - 1, & i < j, \\ i(i+1) - 1, & i = j. \end{cases}$$

Таблица 2. Пример 1 с переменным размером

$ex(m,n)$	метод MajF		метод MinF		метод LS	
	Itr	время, (c)	Itr	время, (c)	Itr	время, (c)
$(300, 600)$	8	4.111	5	1.914	26	22.524
$(400, 800)$	10	31.642	7	20.041	35	97.103
$(600, 1200)$	17	64.093	12	48.761	23	89.412
$(1000, 2000)$	27	87.141	21	61.031	33	113.310
$(1500, 3000)$	34	238.492	28	169.313	40	1905.021

Пример 2. Для $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $n = 2m$,

$$A[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = i + m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$c[j] = j, \quad b[i] = \frac{i+1}{2}.$$

$$\begin{cases} Q[1,1] = 1, & \\ Q[i,i] = i^2 + 1, & i = 2, \dots, n, \\ Q[i,i-1] = Q[i-1,i] = i, & i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Таблица 3. Пример 2 с переменным размером

$ex(m,n)$	метод MajF		метод MinF		метод LS	
	Itr	время, (c)	Itr	время, (c)	Itr	время, (c)
$(300, 600)$	15	6.012	11	3.007	38	22.524
$(400, 800)$	29	37.722	19	29.917	34	49.003
$(600, 1200)$	33	50.112	24	32.716	23	89.412
$(1000, 2000)$	39	81.417	31	69.114	66	148.621
$(1500, 3000)$	68	281.178	59	201.614	101	2453.923

Пример 3. Для $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $n = 2m$.

$$A[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = i + m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$c[j] = \frac{j+1}{2}, \quad b[i] = 4.$$

$$\begin{cases} Q[1,1] = Q[n,n] = 1, & \\ Q[i,i] = 4, & i = 2, \dots, n-1, \\ Q[i,i-1] = A[i-1,i] = 1, & i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Таблица 4. Пример 3 с переменным размером

$ex(m,n)$	метод MajF		метод MinF		метод LS	
	Itr	время, (c)	Itr	время, (c)	Itr	время, (c)
$(300, 600)$	11	4.161	9	2.649	21	34.322
$(400, 800)$	17	59.003	13	48.123	31	172.325
$(600, 1200)$	30	89.103	26	32.716	53	503.443
$(1000, 2000)$	36	141.731	31	133.947	67	2033.500
$(1500, 3000)$	51	301.912	46	287.516	132	3121.113

Пример 4. Для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $n = 2m$,

$$A\,[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = i + m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$c[j] = 2j, \quad b[i] = i^2,$$

$$Q\,[i,j] = \frac{1}{i+j} \quad \text{для} \quad i,j = 1, \ldots, n.$$

Таблица 5. Пример 4 с переменным размером

$ex(m,n)$	метод MajF		метод MinF		метод LS	
	Itr	время, (с)	Itr	время, (с)	Itr	время, (с)
$(300, 600)$	6	5.942	4	4.013	16	29.123
$(400, 800)$	10	20.036	8	17.301	27	84.150
$(600, 1200)$	31	61.912	26	54.036	55	153.922
$(1000, 2000)$	35	170.066	31	148.066	68	2213.114
$(1500, 3000)$	50	286.541	44	221.197	124	3121.113

4.1.3. Комментарии

Наши численные результаты показывают, что метод мажорантных и минорантных функций более эффективен, чем линейный поиск, с точки зрения количества итераций и времени, необходимого для вычисления оптимального решения. Поэтому число итераций и время вычисления при приближенных подходах значительно меньше, чем при использовании метода линейного поиска. Мы также можем заметить, что метод минорантной функции более эффективен, чем метод мажорантной функции.

5. Выводы

В данной статье представлен метод логарифмических барьеров, основанный на новых мажорантных и минорантных функциях, для решения выпуклой квадратичной задачи с ограничениями в виде неравенств. Эти две новые приближенные функции позволяют выполнять шаги смещения простым легким и менее затратным способом, чем линейный поиск. Численные результаты показывают эффективность метода мажорантных и минорантных функций по сравнению с методом линейного поиска. Рассмотрение некоторых других новых мажорантных и минорантных функций представляется интересной темой для изучения в будущем.

Благодарности. Авторы хотели бы поблагодарить рецензентов за полезные комментарии и предложения, которые помогли улучшить качество статьи.

Литература

1. **Bai Y., El Ghami M., Roos C.** A comparative study of kernel functions for primal-dual interior point algorithms in linear optimization // SIAM J. Optim. — 2005. — Vol. 15, № 1. — P. 101–128.
2. **Belabbaci A., Djebbar B., Mokhtari A.** Optimization of a strictly concave quadratic form // Proc. 4th Intern. Conf. on Applied Operational Research, Bangkok, Thailand. — 2012. — P. 16–20.

3. **Belabbaci A., Djebbar B.** Algorithm and separating method for the optimization of quadratic functions // Int. J. Computing Science and Mathematics. — 2017. — Vol. 8, № 2. — P. 183–192.

4. **Ben-Daya M., Al-Sultan K.S.** A new penalty function algorithm for convex quadratic programming // European J. of Operational Research. — 1997. — Vol. 101, № 1. — P. 155–163.

5. **Benterki D., Crouzeix J.P., Merikhi B.** A numerical feasible interior point method for linear semidefinite programs // RAIRO-Operations Research. — 2007. — Vol. 41. — P. 49–59.

6. **Boudjellal N., Roumili H., Benterki D.** A primal-dual interior point algorithm for convex quadratic programming based on a new parametric kernel function // Optimization. — 2020. — doi:10.1080/02331934.2020.1751156.

7. **Cherif L.B., Merikhi B.** A penalty method for nonlinear programming // RAIRO-Operations Research. — 2019. — Vol. 53. — P. 29–38.

8. **Chikhaoui A., Djebbar B., Belabbaci A., Mokhtari A.** Optimization of a quadratic function under its canonical form // Asian J. of Applied Sciences. — 2009. — Vol. 2, № 6. — P. 499–510.

9. **Crouzeix J.P., Merikhi B.** A logarithm barrier method for semi-definite programming // RAIRO-Operations Research. — 2008. — Vol. 42. — P. 123–139.

10. **Dikin I.I.** Iterative solution of problems of linear and quadratic programming // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1967. — Vol. 174. — P. 747–748.

11. **Dozzi M.** Méthodes non linéaires et stochastiques de la recherche opérationnelle. — http://iecl.univ-lorraine.fr Marco.Dozzi.

12. **Frank M., Wolfe P.** An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. — 1956. — Vol. 3, № 1-2. — P. 95–110.

13. **Gärtner B., Schönherr S.** Smallest Enclosing Circles – An Exact and Generic Implementation in C++. — 2016. — ftp://ftp.inf.fu-berlin.de/pub/reports/tr-b-98-05.ps.gz.

14. **Karmarkar N.K.** A new polynomial-time algorithm for linear programming // Proc. 16^{th} Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Combinatorica. — 1984. — Vol. 4. — P. 373–395.

15. **Leulmi A., Leulmi S.** Logarithmic barrier method via minorant function for linear programming // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2019. — Vol. 12, № 2. — P. 191–201.

16. **Leulmi A., Merikhi B., Benterki D.** Study of a logarithmic barrier approach for linear semidefinite programming // J. of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2018. — Vol. 11, № 3. — P. 300–312.

17. **Menniche L., Benterki D.** A logarithmic barrier approach for linear programming // J. of Computational and Applied Mathematics. — Elsevier, 2017. — Vol. 312. — P. 267–275.

18. **Roos C., Terlaky T., Vial J.P.** Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach. — Chichester: Wiley, 1997.

19. **Vaidya P.M.** An algorithm for linear programming which requires $O(((m+n)n^2+(m+n)^{1.5}n)L)$ arithmetic operations // Proc. 19th Annual ACM Symposium Theory of Computing. — 1987. — P. 29–38.

20. **Wolfe P.** The simplex method for quadratic programming // Econometrica: J. of the Econometric Society. — 1959. — Vol. 27, № 3. — P. 382–398.

21. **Wolkowicz H., Styan G.P.H.** Bounds for eigenvalues using traces // Linear Algebra and Appl. — 1980. — № 29. — P. 471–506.

22. **Wright S.J.** Primal-dual Interior-point Methods. — SIAM, 1997.

23. **Ye Y., Tse E.** An extension of Karmarkar's projective algorithm for convex quadratic programming // Mathematical Programming. — 1989. — Vol. 44. — P. 157–179.
24. **Ye Y., Tse E.** A Polynomial Algorithm for Convex Quadratic Programming. — Stanford University, 1986.

Поступила в редакцию 13 марта 2021 г.
После исправления 15 июля 2021 г.
Принята к печати 27 января 2022 г.