УДК 539.3+517.9

СИСТЕМЫ ФРИДРИХСА ДЛЯ СИСТЕМ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ И ВОЛНЫ СДВИГА В ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: chr01@rambler.ru

Получены эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы, вложенные в системы волновых уравнений. Исследованы групповые свойства некоторых найденных систем. С помощью эволюционных симметрических t-гиперболических по Фридрихсу систем описаны волны сдвига в трехмерной упругой среде.

Ключевые слова: эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы, эквивалентность, системы волновых уравнений, конформная инвариантность, волны сдвига в трехмерной упругой среде.

Введение. В работах [1, 2] с помощью кватернионов получена зависящая от восьми произвольных вещественных постоянных симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, которой удовлетворяют производные первого порядка по всем независимым переменным решения трехмерного волнового уравнения.

В настоящей работе с точностью до преобразований эквивалентности найдены эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы, для которых каждое их решение является решением системы волновых уравнений с двумя и тремя пространственными переменными. Показано, что такие эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы существуют, только если число уравнений в системе волновых уравнений четное. Для систем волновых уравнений с двумя пространственными переменными, состоящих из любого числа уравнений, и для систем волновых уравнений с тремя пространственными переменными, состоящих из двух, четырех или шести уравнений, перечислены все такие системы Фридрихса. Для систем волновых уравнений с тремя пространственными переменными, состоящих из восьми и более уравнений, установлено существование таких систем Фридрихса, и приведены некоторые из них. Для системы из работ [1, 2] получены условия, при которых она обладает указанным выше свойством. Полученные эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы использованы при исследовании волн сдвига в трехмерной упругой среде. В частности, показано, что вещественная эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, вложенная в систему четырех волновых уравнений с тремя пространственными переменными, равносильна системе волновых уравнений для скалярных потенциалов, описывающих волны сдвига. Найдены основные группы Ли преобразований, допускаемых использованными для описания волн сдвига эволюционными симметрическими t-гиперболическими по Фридрихсу системами. Получены некоторые частично инвариантные решения, наличие функционального произвола в которых допускает возможность их применения для решения краевых задач о распространении упругих волн сдвига.

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 103.

1. Постановка задачи. Пусть вещественные или комплекснозначные функции $v_j = v_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m;\ m \geqslant 1)$ вещественных переменных t, $x_1, \ldots, x_n$ ($n = 2$ или $n = 3$) удовлетворяют системе волновых уравнений

$$\partial_t^2 \boldsymbol{v} = \partial_{x_1}^2 \boldsymbol{v} + \ldots + \partial_{x_n}^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)^{\mathrm{т}}$; $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, x_1, \ldots, x_n)$ — заданная функция.

Рассматривается эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система

$$\partial_t \boldsymbol{u} = A_1 \partial_{x_1} \boldsymbol{u} + \ldots + A_n \partial_{x_n} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}, \tag{2}$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — постоянные эрмитовы матрицы; $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(t, x_1, \ldots, x_n)$; $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}$, $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — вещественные или комплекснозначные функции.

Определение. Система (2) называется вложенной в систему (1), если каждое решение $\boldsymbol{u}$ системы (2) является решением $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ системы (1).

Система (2), вложенная в систему (1), определена с точностью до следующих преобразований эквивалентности:

— линейной замены функций

$$\boldsymbol{u} = \Omega \boldsymbol{u}' \tag{3}$$

с произвольной унитарной матрицей Ω;

— перестановок k-го и j-го уравнений системы с одновременной перенумерацией функций u_k и u_j $(k, j = 1, \ldots, m)$;

— перенумерации независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$;

— отражения по любой из переменных t, $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$.

Системы (2), связанные указанными преобразованиями, называются эквивалентными.

В результате преобразования (3) матрицы и правая часть системы (2) преобразуются по формулам

$$A_k' = \Omega^* A_k \Omega \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad \boldsymbol{g}' = \Omega^* \boldsymbol{g}. \tag{4}$$

В настоящей работе приводится описание с точностью до преобразований эквивалентности систем (2), вложенных в систему (1). С помощью полученных результатов исследуются волны сдвига в трехмерной упругой среде.

2. Необходимое условие. Пусть система (2) вложена в систему (1). Тогда матрицы системы (2) удовлетворяют соотношениям

$$A_k^* = A_k, \quad A_k^2 = E_m, \quad A_k A_j + A_j A_k = O \qquad (k, j = 1, \ldots, n; \quad k \neq j) \tag{5}$$

(E_m — единичная матрица m-го порядка; O — нулевая матрица), а ее правая часть является частным решением системы

$$\partial_t \boldsymbol{g} + A_1\, \partial_{x_1} \boldsymbol{g} + \ldots + A_n\, \partial_{x_n} \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}. \tag{6}$$

С помощью преобразования эквивалентности унитарная матрица A_1 приводится к виду

$$A_1 = \begin{pmatrix} -E_p & O \\ O & E_{m-p} \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant p \leqslant m). \tag{7}$$

Из уравнений (5) следует, что соответствующее разбиение матриц $A_2, \ldots, A_n$ имеет вид

$$A_k = \begin{pmatrix} O & B_k \\ B_k^* & O \end{pmatrix} \qquad (k = 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где матрицы B_k $(k = 2, \ldots, n)$ связаны соотношениями

$$B_k B_k^* = E_p, \qquad B_k^* B_k = E_{m-p}, \qquad B_k B_j^* + B_j B_k^* = O, \qquad B_k^* B_j + B_j^* B_k = O \\ (k, j = 2, \ldots, n; \qquad k \neq j). \tag{9}$$

Из соотношений (9) следует, что $m = 2p$. Следовательно, необходимое условие существования системы (2), вложенной в систему (1), выражает

Теорема 1. *Если для системы m волновых уравнений существует вложенная в нее эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, то m четно.*

3. Системы Фридрихса, вложенные в системы двумерных волновых уравнений. Пусть $n = 2$, $m = 2p$ $(p \geqslant 1)$. В результате преобразования эквивалентности (4) матрица A_1 приводится к виду (7), при этом матрица A_2 имеет вид (8). Система (2) с этими матрицами с помощью преобразования отражения по переменной x_1 и преобразования (3) с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} O & \omega \\ \omega & O \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где ω — унитарная матрица p-го порядка, приводится к системе (2) с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} -E_p & O \\ O & E_p \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} O & O & -E_q & O \\ O & O & O & E_{p-q} \\ -E_q & O & O & O \\ O & E_{p-q} & O & O \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant q \leqslant p). \tag{11}$$

Таким образом, при $n = 2$ получено полное описание систем (2), вложенных в систему (1):

Теорема 2. *Система m двумерных волновых уравнений имеет вложенные в нее эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы тогда и только тогда, когда m четно. Если $m = 2p$ $(p \geqslant 1)$, то с точностью до преобразований эквивалентности множество эволюционных симметрических t-гиперболических по Фридрихсу систем, вложенных в систему m двумерных волновых уравнений, состоит из систем* (2) *с матрицами* (11) *и правой частью, являющейся частным решением системы* (6).

4. Системы Фридрихса, вложенные в системы трехмерных волновых уравнений. Пусть $n = 3$, $m = 2p$ $(p \geqslant 1)$. Из анализа уравнений (9) следует, что случай $m = 2$ требует отдельного рассмотрения. Полное описание систем (2), вложенных в систему (1), при $m = 2$ дает

Теорема 3. *Любая эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, вложенная в систему двух трехмерных волновых уравнений, эквивалентна системе* (2) *с матрицами*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = i \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где a — любое комплексное число, такое что $|a| = 1$; i — мнимая единица. Правая часть этой системы является частным решением системы (6).

Если $p \geqslant 2$, то с помощью преобразований эквивалентности матрицы A_1, A_2 вложенной системы (2) приводятся к виду (11), а матрица A_3 определяется по формуле (8), где

$$B_3 = \begin{pmatrix} ib_1 & b_2 \\ b_2^* & ib_3 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

матрицы b_1, b_2, b_3 удовлетворяют соотношениям

$$b_1^* = b_1, \quad b_3^* = b_3, \quad b_1 b_2 = b_2 b_3, \quad b_2 b_2^* + b_1^2 = E_q, \quad b_2^* b_2 + b_3^2 = E_{p-q}. \tag{14}$$

Из анализа уравнений (14) следует, что случай $m = 4$ требует отдельного рассмотрения. Полное описание систем (2), вложенных в систему (1), при $m = 4$ дает

Теорема 4. *Любая эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, вложенная в систему четырех трехмерных волновых уравнений, эквивалентна либо системе* (2) *с матрицами*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$A_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

либо системе (2), *матрицы A_1, A_2 которой задаются формулами* (15), *а матрица A_3 имеет вид*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\beta & a \\ 0 & 0 & \bar{a} & i\beta \\ -i\beta & a & 0 & 0 \\ \bar{a} & -i\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где a — любое комплексное число, β — любое вещественное число, такие что $|a|^2 + \beta^2 = 1$. Правая часть каждой из этих систем является частным решением соответствующих систем (6).

Из формул (15)–(17) вытекает

Следствие. С точностью до преобразований эквивалентности существует только одна эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система с вещественными матрицами, вложенная в систему четырех трехмерных волновых уравнений. Матрицы A_1, A_2 этой системы определяются по формулам (15), а матрица A_3 имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Правая часть этой системы является частным решением соответствующей системы (6).

Замечание. В работах [1, 2] приведена задаваемая двумя вещественными векторами $\boldsymbol{k} = (k_0, k_1, k_2, k_3)^{\text{т}}$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)^{\text{т}}$ симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система

$$A_0\, \partial_t \boldsymbol{U} + A_1\, \partial_{x_1} \boldsymbol{U} + A_2\, \partial_{x_2} \boldsymbol{U} + A_3\, \partial_{x_3} \boldsymbol{U} = f\boldsymbol{k} \tag{19}$$

с матрицами

$$A_0 = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_3 & k_2 & -k_1 & i\beta_0 \\ -i\beta_2 & k_3 & -i\beta_0 & -k_1 \end{pmatrix},$$

$$
A_2 = \begin{pmatrix} k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ -i\beta_3 & -k_2 & k_1 & -i\beta_0 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_1 & i\beta_0 & k_3 & -k_2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \\ i\beta_2 & -k_3 & i\beta_0 & k_1 \\ -i\beta_1 & -i\beta_0 & -k_3 & k_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},
$$

которой удовлетворяет вектор-функция $\boldsymbol{U} = (\partial_t u, -\partial_{x_1} u, -\partial_{x_2} u, -\partial_{x_3} u)^{\mathrm{т}}$, где $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$ — решение трехмерного волнового уравнения

$$
\partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u - \partial_{x_3}^2 u = f.
$$

Если $\boldsymbol{\beta} = \pm\boldsymbol{k}$, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq k_0^2$, то матрицы A_0, A_1, A_2, A_3 системы (19) являются невырожденными и справедливы соотношения

$$
A_0 A_j = A_j A_0, \qquad A_0^2 = A_j^2, \qquad A_l A_j + A_j A_l = O \qquad (j, l = 1, 2, 3; \quad j \neq l),
$$

из которых следует, что матрицы $A_0^{-1} A_j$ $(j = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условиям (5). Следовательно, при $\boldsymbol{\beta} = \pm\boldsymbol{k}$, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq k_0^2$ система (19), умноженная на A_0^{-1}, является эволюционной симметрической t-гиперболической по Фридрихсу системой, вложенной в соответствующую систему четырех трехмерных волновых уравнений и эквивалентной либо системе (2) с матрицами (15), (16), либо системе (2) с матрицами (15), (17).

При $m = 6$ полное описание систем (2), вложенных в систему (1), дает

Теорема 5. *Любая эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, вложенная в систему шести трехмерных волновых уравнений, эквивалентна системе* (2) *с матрицами*

$$
A_1 = \begin{pmatrix} -E_3 & O \\ O & E_3 \end{pmatrix}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} O & B_k \\ B_k^* & O \end{pmatrix} \qquad (k = 2, 3),
$$

$$
B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} i\gamma & a & b \\ \bar{a} & i\beta & c \\ \bar{b} & -\bar{c} & i\lambda \end{pmatrix},
$$

где β, γ, λ — любые вещественные числа, a, b, c — любые комплексные числа, такие что

$$
(\lambda + \beta - \gamma)^2 = 1, \qquad |a|^2 = (\beta + \lambda)(\lambda - \gamma) \geqslant 0, \qquad |b|^2 = (\beta + \lambda)(\beta - \gamma) \geqslant 0,
$$

$$
|c|^2 = (\beta - \gamma)(\lambda - \gamma) \geqslant 0, \qquad \bar{a}b = ic(\beta + \lambda).
$$

Правая часть этой системы является частным решением соответствующей системы (6).

При $m = 2p \geqslant 8$ всегда существует система (2), вложенная в систему (1). Это обусловлено тем, что система (14) всегда имеет хотя бы одно решение. Действительно, в качестве такого решения можно выбрать, например, нулевую матрицу b_2 и унитарные матрицы b_1, b_3 q-го и $(p - q)$-го порядков соответственно. Преобразованием эквивалентности (3) с матрицей (10), в которой

$$
\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & O \\ O & \omega_2 \end{pmatrix}
$$

(ω_1, ω_2 — произвольные унитарные матрицы q-го и $(p - q)$-го порядков соответственно), такая система (2) с матрицами (11), (13) приводится к системе (2), матрицы A_1, A_2 которой определяются формулами (11), а матрица A_3 имеет вид

$$A_3 = i \begin{pmatrix} O & O & O & O & -E_r & O & O & O \\ O & O & O & O & O & E_{q-r} & O & O \\ O & O & O & O & O & O & -E_s & O \\ O & O & O & O & O & O & O & E_{p-q-s} \\ E_r & O & O & O & O & O & O & O \\ O & -E_{q-r} & O & O & O & O & O & O \\ O & O & E_s & O & O & O & O & O \\ O & O & O & -E_{p-q-s} & O & O & O & O \end{pmatrix}$$

$$(0 \leqslant q \leqslant p, \qquad 0 \leqslant r \leqslant q, \qquad 0 \leqslant s \leqslant p-q).$$

При $m = 4k \geqslant 8$ можно указать еще одну систему (2), вложенную в систему (1). В этом случае решением системы (14) являются нулевые матрицы b_1, b_3 и унитарная матрица k-го порядка b_2. С помощью преобразования отражения по переменной x_2 и преобразования (3) с матрицей (10), в которой

$$\omega = \begin{pmatrix} O & \tau \\ \tau & O \end{pmatrix}$$

(τ — произвольная унитарная матрица k-го порядка), такая система (2) с матрицами (11), (13) приводится к системе (2), матрицы A_1, A_2 которой задаются формулами (11), где $p = 2k$, $q = k$, а матрица A_3 имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} O & O & O & O & O & O & -E_r & O \\ O & O & O & O & O & O & O & E_{k-r} \\ O & O & O & O & -E_r & O & O & O \\ O & O & O & O & O & E_{k-r} & O & O \\ O & O & -E_r & O & O & O & O & O \\ O & O & O & E_{k-r} & O & O & O & O \\ -E_r & O & O & O & O & O & O & O \\ O & E_{k-r} & O & O & O & O & O & O \end{pmatrix}$$

$$(0 \leqslant r \leqslant k).$$

5. Волны сдвига в трехмерной упругой среде. В подходящей системе координат уравнения Ламе классической теории упругости записываются следующим образом:

$$\partial_t^2 \boldsymbol{w} = \alpha_0 \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{w} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{w}.$$

Здесь $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ — вектор перемещений; t — время; $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; $\alpha_0 > 2$ — постоянная, характеризующая упругие свойства среды.

Соленоидальная составляющая вектора перемещений

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{x}) \tag{20}$$

определяется векторным потенциалом $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{x})$ и описывает волны сдвига в трехмерной упругой среде. Распространение таких волн происходит без изменения объема упругих элементов, меняется лишь их форма. Векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$ можно выбрать следующим образом [3]:

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_1(t, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e} + \operatorname{rot} [\psi_2(t, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}]. \tag{21}$$

Здесь $\boldsymbol{e} = (1,0,0)$ — орт оси Ox; $\psi_1 = \psi_1(t,\boldsymbol{x})$, $\psi_2 = \psi_2(t,\boldsymbol{x})$ — скалярные поперечные потенциалы, удовлетворяющие системе двух трехмерных волновых уравнений:

$$\partial_t^2\psi_1 = \partial_x^2\psi_1 + \partial_y^2\psi_1 + \partial_z^2\psi_1, \qquad \partial_t^2\psi_2 = \partial_x^2\psi_2 + \partial_y^2\psi_2 + \partial_z^2\psi_2. \tag{22}$$

В силу теоремы 3 из формул (12) следует, что множество эволюционных симметрических t-гиперболических по Фридрихсу систем, вложенных в систему двух трехмерных волновых уравнений, с точностью до преобразований эквивалентности состоит из систем

$$\partial_t u_1 = -\partial_x u_1 + a\,\partial_y u_2 + ia\,\partial_z u_2, \qquad \partial_t u_2 = \partial_x u_2 + \bar{a}\,\partial_y u_1 - i\bar{a}\,\partial_z u_1, \tag{23}$$

где $a = \alpha + i\beta$ ($\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2 = 1$). Решения этой системы являются решениями системы (22) и определяют волны сдвига в трехмерной упругой среде.

Для того чтобы установить более точную связь между системами (22) и (23), необходимо рассмотреть отдельно случаи, когда независимые и зависимые переменные t, x, y, z, u_1, u_2 являются вещественными или комплексными.

Пусть $t,x,y,z,u_1,u_2 \in \mathbb{R}$. В результате выделения вещественной и мнимой частей в системе (23) и замены переменных

$$\xi = -\alpha y + \beta z, \qquad \eta = -\beta y - \alpha z \tag{24}$$

эта система преобразуется к виду

$$\partial_t u_1 = -\partial_x u_1 - \partial_\xi u_2, \qquad \partial_t u_2 = \partial_x u_2 - \partial_\xi u_1, \tag{25}$$

где $u_j = u_j(t,x,\xi)$ ($j = 1,2$).

В силу теоремы 2 система (25) есть не что иное, как единственная с точностью до преобразований эквивалентности эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, вложенная в систему двух двумерных волновых уравнений. Следовательно, при вещественных независимых и зависимых переменных система (23) редуцируется к эволюционной симметрической t-гиперболической по Фридрихсу системе, вложенной в систему двух двумерных волновых уравнений. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом случае выделение вещественной и мнимой частей в системе (23) приводит к фактор-системе для инвариантного относительно группы $G_1\langle \alpha\,\partial_z + \beta\,\partial_y\rangle$ решения этой системы. В результате замены переменных

$$\tau = (x+t)/2, \qquad \zeta = (x-t)/2 \tag{26}$$

система (25) принимает вид

$$\partial_\tau u_1 + \partial_\xi u_2 = 0, \qquad \partial_\zeta u_2 - \partial_\xi u_1 = 0. \tag{27}$$

Знание основной группы Ли преобразований, допускаемых системой дифференциальных уравнений, позволяет эффективно описать множество ее решений [4]. Так как на пространстве $\mathbb{C}^2$ не существует линейной формы, значение которой в каждой точке является корнем характеристического уравнения системы (27), то ее основная группа линейно-автономна [5]. Вычисления, выполненные с использованием этого свойства, показывают, что основная группа системы (27) (как и для всех рассматриваемых в настоящей работе систем, речь идет о фактор-группе по нормальному делителю, обусловленному линейностью системы) порождается 10 операторами

$$\begin{gathered}
\partial_\tau, \quad \partial_\xi, \quad \partial_\zeta, \quad \tau\,\partial_\tau - \zeta\,\partial_\zeta + u_1\,\partial_{u_1}, \quad 2\tau\,\partial_\tau + \xi\,\partial_\xi - u_2\,\partial_{u_2}, \quad \xi\,\partial_\tau - u_2\,\partial_{u_1},\\
2\tau\,\partial_\xi + \xi\,\partial_\zeta - u_1\,\partial_{u_2}, \qquad u_1\,\partial_{u_1} + u_2\,\partial_{u_2},\\
4\tau^2\,\partial_\tau + 4\tau\xi\,\partial_\xi + \xi^2\,\partial_\zeta + 2\tau u_1\,\partial_{u_1} - 2(\xi u_1 + \tau u_2)\,\partial_{u_2},\\
\xi^2\,\partial_\tau - 2(\xi u_2 + \zeta u_1)\,\partial_{u_1} - \zeta u_2\,\partial_{u_2}.
\end{gathered}$$

Из инфинитезимальной формулы производства решений [4] следует, что если решением системы (27) является пара функций (u_1, u_2), то решениями этой системы являются и следующие пары функций:

$$
\begin{gathered}
u_1' = \tau\,\partial_\tau u_1 - \zeta\,\partial_\zeta u_1 - u_1, \quad u_2' = \tau\,\partial_\tau u_2 - \zeta\,\partial_\zeta u_2;\\
u_1' = 2\tau\,\partial_\tau u_1 + \xi\,\partial_\xi u_1, \quad u_2' = 2\tau\,\partial_\tau u_2 + \xi\,\partial_\xi u_2 + u_2;\\
u_1' = \xi\,\partial_\tau u_1 + u_2, \quad u_2' = \xi\,\partial_\tau u_2;\\
u_1' = 2\tau\,\partial_\xi u_1 + \xi\,\partial_\zeta u_1, \quad u_2' = 2\tau\,\partial_\xi u_2 + \xi\,\partial_\zeta u_2 + u_1;\\
u_1' = 4\tau^2\,\partial_\tau u_1 + 4\tau\xi\,\partial_\xi u_1 + \xi^2\,\partial_\zeta u_1 - 2\tau u_1, \quad u_2' = 4\tau^2\,\partial_\tau u_2 + 4\tau\xi\,\partial_\xi u_2 + \xi^2\,\partial_\zeta u_2 + 2(\xi u_1 + \tau u_2);\\
u_1' = \xi^2\,\partial_\tau u_1 + 2(\xi u_2 + \zeta u_1), \quad u_2' = \xi^2\,\partial_\tau u_2 + \zeta u_2.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Ниже приведены примеры точных решений системы (27), имеющих функциональный произвол.

Пример 1. Параметрическое представление простых волн с параметром $\lambda = \lambda(\tau, \xi, \zeta)$ имеет вид

$$
u_1 = u_1(\lambda), \qquad u_2 = u_2(\lambda). \tag{29}
$$

Подставляя (29) в (27), можно установить, что $u_1(\lambda)$, $u_2(\lambda)$ — произвольные функции, а параметр волны определяется неявно уравнением

$$
\lambda = \Phi(\tau u_2'^2(\lambda) - \xi u_1'(\lambda) u_2'(\lambda) - \zeta u_1'^2(\lambda)), \tag{30}
$$

где Φ — произвольная функция; штрих обозначает производную по λ.

Пример 2. Уравнение наименьшего инвариантного многообразия, содержащего частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 1 на подгруппе, порождаемой операторами ∂_τ, ∂_ξ, имеет вид

$$
u_1 = u_1(u_2, \zeta). \tag{31}
$$

После подстановки (31) в (27) и исследования полученной системы на совместность можно показать, что искомое нередуцируемое частично инвариантное решение [4] определяется по формулам

$$
u_1 = f(u_2) + g(\zeta), \qquad u_2 = h(\tau - \xi f'(u_2) - \zeta f'^2(u_2)) \tag{32}
$$

и зависит от трех произвольных функций f, g, h.

Пусть $u_1 = w_1 + i w_2$, $u_2 = w_4 + i w_3$; $t, x, y, z, w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$. Выделив вещественную и мнимую части в системе (23) и выполнив замену переменных по формулам (24), можно получить систему

$$
\begin{aligned}
\partial_t w_1 &= -\partial_x w_1 - \partial_\xi w_4 + \partial_\eta w_3, &\qquad \partial_t w_2 &= -\partial_x w_2 - \partial_\xi w_3 - \partial_\eta w_4,\\
\partial_t w_3 &= \partial_x w_3 - \partial_\xi w_2 + \partial_\eta w_1, &\qquad \partial_t w_4 &= \partial_x w_4 - \partial_\xi w_1 - \partial_\eta w_2.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Система (33) представляет собой систему (2) с матрицами (15), (18) (см. следствие из теоремы 4). Таким образом, в случае вещественных независимых переменных и комплексных функций система (23) совпадает с единственной с точностью до преобразований эквивалентности эволюционной симметрической t-гиперболической по Фридрихсу системой с вещественными матрицами, вложенной в систему четырех трехмерных волновых уравнений.

Связь между системами (22) и (33) устанавливает

Теорема 6. *Система* (33) *равносильна системе* (22) *в следующем смысле:* 1) *для любого решения* $(w_1, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{т}}$ *системы* (33) *пара функций* $\psi_1 = w_k$, $\psi_2 = w_j$ $(k, j = 1, 2, 3, 4;\ k \neq j)$ *является решением системы* (22); 2) *для любого решения* (ψ_1, ψ_2) *системы* (22) *найдутся функции* ψ_3, ψ_4, *такие что вектор-функция, компонентами которой служат различные перестановки функций* ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, *является решением системы* (33). *Система* (33), *так же как и система* (22), *является конформно-инвариантной.*

Доказательство. В силу следствия из теоремы 4 для любого решения $(w_1, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{т}}$ системы (33) каждая пара функций $\psi_1 = w_k$, $\psi_2 = w_j$ $(k, j = 1, 2, 3, 4;$ $k \neq j)$ является решением системы (22).

Пусть (ψ_1, ψ_2) — решение системы (22). Это решение необходимо достроить до решения системы (33). Ниже приведен один из способов такого построения, другие построения проводятся аналогично. В систему (33) подставляется ψ_1 вместо w_1 и ψ_2 вместо w_4. Из первого и четвертого уравнений системы (33) следует

$$w_2 = f_1(t, x, \xi, \eta) + \varphi_1(t, x, \xi), \qquad w_3 = f_2(t, x, \xi, \eta) + \varphi_2(t, x, \xi),$$

где функции f_1, f_2 определяются по формулам

$$f_1 = \int (\partial_x \psi_2 - (\partial_t + \partial_\xi)\psi_1)\, d\eta, \qquad f_2 = \int ((\partial_t + \partial_x)\psi_1 + \partial_\xi \psi_2)\, d\eta,$$

φ_1, φ_2 — новые неизвестные функции. Подставляя эти выражения во второе и третье уравнения системы (33), можно получить эволюционную симметрическую t-гиперболическую по Фридрихсу систему

$$\begin{aligned}(\partial_t + \partial_x)\varphi_1 + \partial_\xi \varphi_2 &= -(\partial_t + \partial_x) f_1 - \partial_\xi f_2 - \partial_\eta \psi_2,\\ (\partial_t - \partial_x)\varphi_2 + \partial_\xi \varphi_1 &= -(\partial_t - \partial_x) f_2 - \partial_\xi f_1 + \partial_\eta \psi_1,\end{aligned}$$

существование решений которой обеспечено в силу достаточной гладкости правой части [6].

Осталось установить конформную инвариантность системы (33). Основная группа системы (33) по той же причине, что и основная группа системы (27), линейно-автономна. Она является 17-параметрической, и ее алгебра Ли состоит из операторов

$$\lambda_0 \partial_t + \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_\xi + \lambda_3 \partial_\eta + \mu_1 \partial_{w_1} + \mu_2 \partial_{w_2} + \mu_3 \partial_{w_3} + \mu_4 \partial_{w_4}. \tag{34}$$

Здесь векторы $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^{\mathrm{т}}$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^{\mathrm{т}}$ имеют вид

$$\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{y}) - A_4 \boldsymbol{b}_1 + A_5 \boldsymbol{y} + b_2 \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}_3, \quad \boldsymbol{\mu} = [A_0 - (1/2)\, \partial_t\, (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_3 + \lambda_3 A_2)]\boldsymbol{w}, \tag{35}$$

$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_3$ — произвольные постоянные векторы из $\mathbb{R}^4$; b_2 — произвольная вещественная постоянная; $\boldsymbol{y} = (t, x, \xi, \eta)^{\mathrm{т}}$; $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{т}}$; A_1, A_2, A_3 — матрицы системы (33), задаваемые формулами (15), (18); A_0, A_4, A_5 — матрицы вида

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 + \alpha & -(\varphi_1 + \beta) & -\varphi_2 & -\varphi_3 \\ \varphi_1 + \beta & \varphi_0 + \alpha & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_0 + \alpha & -(\varphi_1 - \beta) \\ \varphi_3 & -\varphi_2 & \varphi_1 - \beta & \varphi_0 + \alpha \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & 0 & c_4 & c_5 \\ c_2 & -c_4 & 0 & c_6 \\ c_3 & -c_5 & -c_6 & 0 \end{pmatrix},$$

$\rho = x^2 + \xi^2 + \eta^2 - t^2$; $\varphi_0 = -(3/8)(\partial_t\lambda_0 + \partial_x\lambda_1 + \partial_\xi\lambda_2 + \partial_\eta\lambda_3)$; $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{\text{т}} = (1/2)\operatorname{rot}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^{\text{т}}$; c_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$, α, β — произвольные вещественные постоянные.

При $\alpha = \beta = 0$ алгебра Ли операторов (34) с координатами (35) изоморфна алгебре Ли группы конформных преобразований четырехмерного пространства Минковского. Теорема доказана.

Таким образом, волны сдвига в трехмерной упругой среде полностью определяются формулами (20), (21), в которых $\psi_1 = w_k$, $\psi_2 = w_j$ $(k, j = 1, 2, 3, 4;\ k \neq j)$; $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^{\text{т}}$ — решение эволюционной симметрической t-гиперболической по Фридрихсу конформно-инвариантной системы (33).

Для получения точных решений системы (33) целесообразно перейти к комплексным переменным. Система (33) состоит из четырех уравнений для четырех неизвестных функций w_1, w_2, w_3, w_4. Введение комплексных зависимых и независимых переменных

$$\begin{gathered} u_1 = w_1 + iw_2, \qquad u_2 = w_4 + iw_3, \\ \tau = (x+t)/2, \qquad p = (\xi - i\eta)/2, \qquad q = (\xi + i\eta)/2, \qquad \zeta = (x-t)/2 \end{gathered} \tag{36}$$

позволяет записать систему (33) в более компактной форме

$$\partial_\tau u_1 + \partial_p u_2 = 0, \qquad \partial_q u_1 - \partial_\zeta u_2 = 0, \tag{37}$$

где $\partial_\tau = \partial_x + \partial_t$, $\partial_p = \partial_\xi + i\,\partial_\eta$, $\partial_q = \partial_\xi - i\,\partial_\eta$, $\partial_\zeta = \partial_x - \partial_t$ — операторы формального дифференцирования.

В дальнейшем предполагается, что в системе (37) величины τ, p, q, ζ — независимые комплексные переменные, а u_1, u_2 — комплексные функции этих переменных.

Основная группа Ли преобразований пространства $\mathbb{C}^6(\tau, p, q, \zeta, u_1, u_2)$ системы (37) линейно-автономна и порождается следующими 16 операторами:

$$\begin{gathered} \partial_\tau, \quad \partial_p, \quad \partial_q, \quad \partial_\zeta, \quad \tau\,\partial_\tau + p\,\partial_p + q\,\partial_q + \zeta\,\partial_\zeta, \quad q\,\partial_\tau - \zeta\,\partial_p, \\ \tau\,\partial_q - p\,\partial_\zeta, \quad \tau\,\partial_\tau - \zeta\,\partial_\zeta + u_1\,\partial_{u_1}, \quad p\,\partial_p + \zeta\,\partial_\zeta + u_2\,\partial_{u_2}, \\ p\,\partial_\tau - \zeta\,\partial_q + u_2\,\partial_{u_1}, \quad \tau\,\partial_p - q\,\partial_\zeta + u_1\,\partial_{u_2}, \quad u_1\,\partial_{u_1} + u_2\,\partial_{u_2}, \quad M\,\partial_{\boldsymbol{y}} + N\,\partial_{\boldsymbol{u}}, \end{gathered}$$

где $\boldsymbol{y} = (\tau, p, q, \zeta)^{\text{т}}$; $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\text{т}}$; M, N — матрицы, имеющие вид

$$M = \begin{pmatrix} \tau^2 & \tau p & \tau q & \tau\zeta \\ \tau p & p^2 & -\tau\zeta & p\zeta \\ \tau q & -\tau\zeta & q^2 & q\zeta \\ -pq & p\zeta & q\zeta & \zeta^2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} -\tau u_1 & pu_1 - 2\tau u_2 \\ -2pu_1 + \tau u_2 & -pu_2 \\ -qu_1 & -\zeta u_1 - 2qu_2 \\ -2\zeta u_1 - 2qu_2 & -\zeta u_2 \end{pmatrix}.$$

Из инфинитезимальной формулы производства решений следует, что если решением системы (37) является пара функций (u_1, u_2), то решениями этой системы являются и следующие пары функций:

$$\begin{gathered} u_1' = \tau\,\partial_\tau u_1 + p\,\partial_p u_1 + q\,\partial_q u_1 + \zeta\,\partial_\zeta u_1, \qquad u_2' = \tau\,\partial_\tau u_2 + p\,\partial_p u_2 + q\,\partial_q u_2 + \zeta\,\partial_\zeta u_2; \\ u_1' = q\,\partial_\tau u_1 - \zeta\,\partial_p u_1, \qquad u_2' = q\,\partial_\tau u_2 - \zeta\,\partial_p u_2; \\ u_1' = \tau\,\partial_q u_1 - p\,\partial_\zeta u_1, \qquad u_2' = \tau\,\partial_q u_2 - p\,\partial_\zeta u_2; \\ u_1' = \tau\,\partial_\tau u_1 - \zeta\,\partial_\zeta u_1 - u_1, \qquad u_2' = \tau\,\partial_\tau u_2 - \zeta\,\partial_\zeta u_2; \\ u_1' = p\,\partial_p u_1 + \zeta\,\partial_\zeta u_1, \qquad u_2' = p\,\partial_p u_2 + \zeta\,\partial_\zeta u_2 - u_2; \\ u_1' = p\,\partial_\tau u_1 - \zeta\,\partial_q u_1 - u_2, \qquad u_2' = p\,\partial_\tau u_2 - \zeta\,\partial_q u_2; \\ u_1' = \tau\,\partial_p u_1 - q\,\partial_\zeta u_1, \qquad u_2' = \tau\,\partial_p u_2 - q\,\partial_\zeta u_2 - u_1; \end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
u_1' &= \tau^2\,\partial_\tau u_1 + \tau p\,\partial_p u_1 + \tau q\,\partial_q u_1 + \tau\zeta\,\partial_\zeta u_1 + \tau u_1,\\
u_2' &= \tau^2\,\partial_\tau u_2 + \tau p\,\partial_p u_2 + \tau q\,\partial_q u_2 + \tau\zeta\,\partial_\zeta u_2 - p u_1 + 2\tau u_2;\\
u_1' &= \tau p\,\partial_\tau u_1 + p^2\,\partial_p u_1 - \tau\zeta\,\partial_q u_1 + p\zeta\,\partial_\zeta u_1 + 2p u_1 - \tau u_2,\\
u_2' &= \tau p\,\partial_\tau u_2 + p^2\,\partial_p u_2 - \tau\zeta\,\partial_q u_2 + p\zeta\,\partial_\zeta u_2 + p u_2;\\
u_1' &= \tau q\,\partial_\tau u_1 - \tau\zeta\,\partial_p u_1 + q^2\,\partial_q u_1 + q\zeta\,\partial_\zeta u_1 + q u_1,\\
u_2' &= \tau q\,\partial_\tau u_2 - \tau\zeta\,\partial_p u_2 + q^2\,\partial_q u_2 + q\zeta\,\partial_\zeta u_2 + \zeta u_1 + 2q u_2;\\
u_1' &= -pq\,\partial_\tau u_1 + p\zeta\,\partial_p u_1 + q\zeta\,\partial_q u_1 + \zeta^2\,\partial_\zeta u_1 + 2\zeta u_1 + 2q u_2,\\
u_2' &= -pq\,\partial_\tau u_2 + p\zeta\,\partial_p u_2 + q\zeta\,\partial_q u_2 + \zeta^2\,\partial_\zeta u_2 + \zeta u_2.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Комплексную систему (37) удобно использовать для получения точных решений системы (33). Если (u_1, u_2) — решение системы (37), то из него с использованием формул (36) можно найти решение системы (33).

Ниже приведены два примера частично инвариантных решений системы (37).

Пример 3. Параметрическое представление простых волн с комплексным параметром $\lambda = \lambda(\tau, p, q, \zeta)$ имеет вид

$$u_1 = u_1(\lambda), \qquad u_2 = u_2(\lambda). \tag{39}$$

Подстановка (39) в (37) и анализ полученной системы показывают, что $u_1(\lambda)$, $u_2(\lambda)$ являются произвольными аналитическими функциями, а параметр волны определяется неявно уравнением

$$\lambda = \Phi(\tau u_2'(\lambda) - p u_1'(\lambda), q u_2'(\lambda) + \zeta u_1'(\lambda)), \tag{40}$$

где Φ — произвольная аналитическая функция; штрих обозначает производную по λ.

Для получения соответствующего решения системы (33) в качестве параметра удобно выбрать $\lambda = u_2$. Переход к вещественным переменным по формулам (36) дает двойную волну системы (33)

$$w_1 = f(w_3, w_4), \qquad w_2 = g(w_3, w_4),$$

где f, g — произвольные функции, удовлетворяющие условиям Коши — Римана

$$\partial_{w_4} f = \partial_{w_3} g, \qquad \partial_{w_3} f = -\partial_{w_4} g,$$

параметрические функции w_3, w_4 определяются неявно уравнением (40) с параметром $\lambda = w_4 + i w_3$.

Пример 4. Уравнение наименьшего инвариантного многообразия, содержащего частично инвариантное решение ранга 3 и дефекта 1 на подгруппе, порождаемой операторами ∂_τ, ∂_q, записывается в виде

$$u_1 = h(u_2, p, \zeta). \tag{41}$$

Подстановка (41) в (37) дает систему уравнений, из анализа которой на совместность с использованием теоремы о редукции [4] следует, что все искомые нередуцируемые частично инвариантные решения содержатся среди решений вида

$$u_1 = f(u_2) + g(p, \zeta), \qquad u_2 = \Phi(\tau - p f'(u_2), q + \zeta f'(u_2)) \tag{42}$$

или

$$u_1 = \partial_p f(u_2, p) + g(p, \zeta), \qquad u_2 = \Phi(\tau - \partial_q f(u_2, p)) \tag{43}$$

(f, g, Φ — произвольные аналитические функции). Переход к вещественным переменным по формулам (36) дает точные решения системы (33).

В силу формул (20), (21), (24), (26), (29)–(32), (36), (37), (39)–(43) точные решения, приведенные в примерах 1–4, определяют с функциональным произволом волны сдвига в трехмерной упругой среде. Наличие функционального произвола и формулы (28), (38), вытекающие из групповых свойств соответствующих систем, допускают возможность применения этих решений при исследовании краевых задач о распространении упругих волн сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гордиенко В. М.** Системы Фридрихса для трехмерного волнового уравнения // Тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. С. Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений". Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. С. 126.
2. **Гордиенко В. М.** Применение кватернионов в теории волнового уравнения // Всерос. конф., приуроч. к 80-летию акад. С. К. Годунова, "Математика в приложениях". Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2009. С. 90–91.
3. **Поручиков В. Б.** Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Чиркунов Ю. А.** Условия линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 5. С. 605–607.
6. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 25/VIII 2009 г.,
в окончательном варианте — 16/XI 2009 г.