

УДК 532.517.4: 621.1.016.4

**КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ  
ТУРБУЛЕНТНОСТИ, АЛГОРИТМОВ  
И СЕТОЧНЫХ СТРУКТУР ПРИ РАСЧЕТЕ  
ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В КАВЕРНЕ  
С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТОВ ПРОГРАММ  
VP2/3 И FLUENT.  
ЧАСТЬ 1. ВЛИЯНИЕ СХЕМНЫХ ФАКТОРОВ\***

С.А. ИСАЕВ<sup>1</sup>, П.А. БАРАНОВ<sup>1</sup>, Н.А. КУДРЯВЦЕВ<sup>1</sup>, Д.А. ЛЫСЕНКО<sup>1</sup>,  
А.Е. УСАЧОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации

<sup>2</sup>ГНЦ ЦАГИ им.Н.Е. Жуковского, Москва

На основе решения известной тестовой задачи о циркуляционном течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с подвижной границей проводится совместное тестирование специализированного (VP2/3) и универсального (FLUENT) пакетов прикладных программ гидродинамического и теплофизического профиля. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса решаются с помощью неявных факторизованных расчетных процедур. Дается анализ влияния на точность численных прогнозов типа сетки и схемных факторов.

**ВВЕДЕНИЕ**

Эволюция современных информационных технологий, предназначенных для численного моделирования физико-технических процессов, в частности, в энергетике и на транспорте [1], неразрывно связана со стремительным прогрессом вычислительных платформ, прежде всего персональных компьютеров, и развитием пакетов прикладных программ.

Конечно, удельный вес первой составляющей является преобладающим. На рис. 1 из [2] представлена зависимость скорости вычислений в мегафлопах для парка вычислительных машин от времени их ввода в эксплуатацию. Как отметил Роди в 2000 г., скорость суперкомпьютеров уже достигла отметки в 1 терафлоп и успешно разрабатываются машины с производительностью операций в 10 терафлопов. Но еще более важно, что сравнительно дешевые рабочие станции, а также еще более распространенные и доступные персональные компьютеры достигли скорости в нескольких сот мегафлопов, что делает реальными расчеты практических турбулентных течений с помощью решения уравнений Рейнольдса и моделирования крупных вихрей. Как видно на рис. 1, в логарифмических координатах производительность вычислительных систем в последние годы растет линейно. К тому же на рисунке представлена еще одна довольно оптимистичная зависимость  $V_c(t)$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 04-02-81005, 05-02-16184 и 05-01-00162).

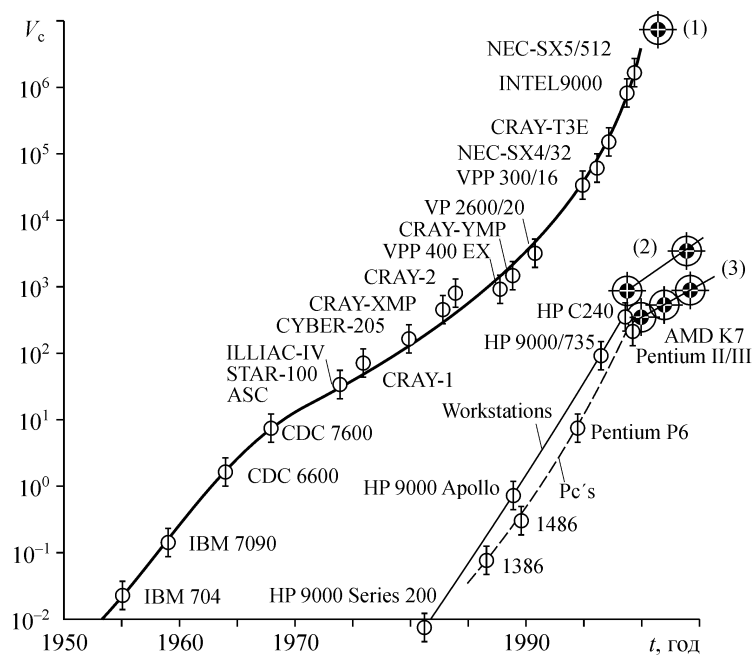


Рис. 1. Динамика увеличения скорости расчетов на вычислительных машинах различного класса.

1 — Earth Simulator/NEC, Rmax ~ 36Tflops, 2002 ([www.top500.org](http://www.top500.org)); 2 — Центр высокопроизводительных кластерных технологий, СПбГПУ, Rmax ~ 40Gflops, 2003; 16 CPUs, AMD Opteron 64x, 1.8Ghz; 3 — ОАО ЛМЗ, Rmax ~ G Mflops, кластер на базе Intel P4 Xeon 32x, 1,8GHz, 2003.

для многопроцессорных компьютеров с распараллеливанием операций. Сегодня кластеры считаются одними из самых экономичных, высокопроизводительных вычислительных систем. Таким образом, перспективы численного моделирования со стороны совершенствования расчетных платформ выглядят весьма привлекательными.

Также впечатляющими выглядят достижения в создании диагностических и прогностических комплексов, основанных на решении управляющих исходных уравнений сохранения. Всего за несколько десятилетий CFD — вычислительная гидродинамика (включая теплофизику и смежные дисциплины) проделала путь, сопоставимый со столетиями для классических областей знаний. Этим она обязана не только бурному прогрессу в компьютерной технике, но и развитию математических моделей (турбулентности, горения, радиационного теплообмена и др.), а также разработке эффективных численных методов. Сравнительно недавно (при жизни одного поколения — в конце 60-х — начале 70-х годов) информационной основой для расчетов служили написанные на одном из языков программирования (чаще всего на ФОРТРАНе) рабочие программы, которые запускались на средних и больших ЭВМ (типа БЭСМ4 и 6) в центрах коллективного пользования. Обработка результатов тогда практически осуществлялась вручную. Сегодня, на индустриальном этапе развития CFD [3], универсальные и специализированные пакеты прикладных программ представляют сложные многокомпонентные системы, как правило, написанные на объектно-ориентированных языках программирования и имеющие трехступенчатую структуру: генератор сетки — решатель — графический интерпретатор результатов. В пакеты входят каталоги математических моделей управляющих физических процессов, из элементов которых конструируется рассматриваемая задача. Пакеты ориентируются на определенную компьютерную платформу. Чаще всего это обычные персональные компьютеры (PC), правда, с увеличенными объемами оперативной памяти (512Мб и выше). Широкое

распространение РС сделало пакеты доступными десяткам тысяч пользователей во всех регионах мира. Многие практические и эксплуатационные проблемы стали разрешимыми благодаря пакетам. Однако время их решения в сложных случаях составляет недели и месяцы, что существенно ограничивает их использование в проектно-конструкторской деятельности. Как уже отмечалось, выход найден в распараллеливании вычислительных операций и адаптации пакетов под многопроцессорные (кластерные) системы. Их использование позволяет многократно повысить эффективность решения задач.

Широкое распространение пакетов, к сожалению, создает иллюзию того, что любые задачи могут быть решены. Этому в немалой степени способствуют сами производители пакетов, а также определенная неискушенность покупателей (большинство мощных пакетов являются товаром), ошибочно представляющих, что сами по себе пакеты разрешат все их проблемы и заменят дорогостоящие физические эксперименты. На самом деле используемые каталоги математических моделей далеки от совершенства, поскольку научные изыскания по ним не закончены. Более того, приемлемость математических моделей для решения сложных задач должна являться предметом отдельного исследования. Также не определены четко границы применения большинства моделей. Важный вопрос любого численного исследования — это оценка адекватности численных прогнозов. Чтобы ответить на него, надо произвести тестирование пакета на совокупности задач, как модельного плана, так и таких, для которых имеются надежные экспериментальные данные.

Одной из классических тестовых задач является численное моделирование турбулентного циркуляционного течения несжимаемой вязкой жидкости в квадратной каверне с подвижной границей. Ее решению при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 5 \times 10^4$ , соответствующем экспериментальному значению [4], посвящается данное методическое исследование, причем основное внимание уделяется сравнению численных прогнозов, полученных с помощью различных пакетов: специализированного VP2/3 [5] и универсального FLUENT [6] при использовании широкого спектра полуэмпирических моделей турбулентности и сеточных структур различного типа. Проведенный анализ позволяет выбрать приемлемые для инженерной практики модели турбулентности, инкорпорированные в разные пакеты.

#### КРАТКИЙ ГЕНЕЗИС ПРОБЛЕМЫ

Интерес к рассматриваемой тестовой задаче не случаен. Издавна (см., например, [7, 8]) она служит испытательным полигоном для апробации схем аппроксимации членов исходных уравнений, расчетных шаблонов, методов и процедур решения. По ней накоплен обширный объем вычислительной информации. В большей степени это касается ламинарного режима циркуляционного течения в каверне. Представляется целесообразным периодическое возвращение к решению данной задачи на различных уровнях развития компьютерных систем и программного обеспечения для верификации и анализа разрабатываемых вычислительных комплексов.

Опыт тестирования полуэмпирических моделей турбулентности на задачах отрывного обтекания тел охватывает период нескольких десятилетий. Начиная с шестидесятых годов, состоялись несколько стэнфордских конференций (см., например, [9]), на которых обсуждались тесты для анализа типовых турбулентных течений. Однако в основном они касались пограничных слоев. В 70-80-х годах был опубликован цикл работ по численному анализу отрывного обтекания кругового диска с использованием различных моделей турбулентности [10 – 12]. Выбор адекватной модели в этом цикле впервые соединился с оценкой влияния ошибок

дискретизации на точность численных прогнозов. Так, использование схем первого порядка аппроксимации не позволило установить в [10] существенного различия между моделями, поскольку вводимая численная диффузия оказалась намного больше диффузии, обусловленной турбулентным переносом.

Решение проблемы численной диффузии, связанной с ошибками аппроксимации конвективных членов уравнений переноса, стало одним из важнейших научных достижений CFD в 80-х годах. Как показано, например, в [11], при моделировании отрывных течений необходимым условием получения точного результата является применение схем с низкой искусственной вязкостью (противопоточных схем второго и более высокого порядка аппроксимации типа схемы с квадратичной интерполяцией Леонарда, схемы Агарвала и др.) для представления конвективных членов уравнений переноса. В то же время обнаружено, что схемы первого порядка дают ошибочные решения при высоких числах Рейнольдса даже при использовании многосеточных методов. В [12] на примере расчета турбулентного обтекания круглого диска при дискретизации конвективных членов по схеме Леонарда сопоставлены наиболее распространенные в тот период модели: стандартная и модифицированная с поправкой на влияние кривизны линий тока  $k-\epsilon$ -модели и алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений. При этом результаты численных прогнозов сравниваются между собой и с экспериментальными данными Кармоди.

Прогресс в области вычислительной техники и особенно широкое распространение персональных компьютеров в восьмидесятых и последующих годах обусловили создание универсальных пакетов прикладных программ первой волны, таких как PHOENIX, FLOW3D, FIDAP, и, далее, продвинутых информационных продуктов типа FLUENT, StarCD, CFX. В условиях возросших ресурсов компьютеров по памяти и быстродействию перестало быть необходимым требование решения уравнений Навье — Стокса в преобразованных переменных и преобладающим стало использование записи указанных уравнений в физических переменных: декартовы составляющие скорости — давление. К тому же оказалось возможным существенно (на порядок и более) увеличить число ячеек в расчетной области и значительно уменьшить величины пристеночных шагов.

Широкий диапазон применения пакетов программ прежде всего связан с возможностью интерпретации пространственного движения неоднородных сред в криволинейных областях сложной геометрии. Чаще всего с помощью пакетов рассматриваются конфигурации практических устройств в сочетании с соответствующими реальными режимными параметрами. При этом тестирование пакетов на относительно простых задачах сводится к минимуму и проводится от случая к случаю. В то же время, несмотря на наличие обстоятельных руководств по эксплуатации пакетов, их работоспособность представляется далеко не очевидной. Корректный выбор схемы аппроксимации и процедуры решения задачи, подбор сетки и назначение схемных параметров, оценка их влияния на решение, сходимость результатов по сеткам и многое другое, связанное с “кухней” вычислителя, подчас просто исключаются из рассмотрения. Редко встречаются исследования, выполненные с применением пакетов, в которых содержатся вышеуказанные детали. В [7, 8] подробно анализируются факторизованный расчетный алгоритм решения уравнений Рейнольдса, влияние схемных факторов и выбор моделей турбулентности в приложении к задачам циркуляционного движения в квадратной каверне и отрывного обтекания обращенной назад ступеньки в канале. При этом использованные вычислительные ресурсы были довольно ограниченными. Так, например, расчетная сетка для расчета течения в каверне содержала  $30 \times 30$  ячеек. Данная работа продолжает указанный цикл методических исследований. При этом

не только расширяется круг рассматриваемых моделей турбулентности, но и меняются подробные сетки, содержащие порядка 150 тысяч ячеек с пристеночными шагами порядка  $10^{-5}$ .

#### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОЛОГИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В ПАКЕТАХ VP2/3 И FLUENT

Использованный подход к решению уравнений Навье — Стокса и Рейнольдса, основанный на концепции расщепления по физическим процессам, сложился в 70-х–80-х годах прошлого века [7]. Конечно-объемная процедура, названная в руководстве к пакету FLUENT как раздельная (segregated) [6], подразумевает последовательное поблочное решение системы управляющих уравнений, описывающих движение вязкой среды. Она издавна используется в расчетной практике и ее широкое распространение обусловлено прежде всего легкостью формализации на языке программирования и адаптации к архитектуре ЭВМ с ограниченными ресурсами. Интересно отметить, что до сих пор ее применимость является предпочтительной по отношению к другому, неявному аналогу [6], хотя парк высокопроизводительных компьютеров изменился кардинальным образом.

Численное решение задачи о движении жидкой среды базируется на разбиении расчетной области, сконструированной сеткой с ячейками различной формы. Различают структурированные (упорядоченные, в частности, прямоугольные) и неструктурированные (чаще всего треугольные) сетки. Дискретизация уравнений Навье — Стокса связывается с их интегрированием по контрольному объему расчетной ячейки. В результате получается система нелинейных алгебраических векторных уравнений с общим числом, равным суммарному количеству расчетных ячеек, в частности,  $N \times N$  ячеек в случае структурированной сетки для квадратной каверны (см. ниже рис. 2, *a*). Каждое из уравнений представляет балансовое соотношение, в котором для однородной среды алгебраическая сумма нестационарного, конвективных, диффузионных и источникового членов равна нулю. Важный шаг в конструировании алгоритма связывается с линеаризацией уравнений. Общепринятый подход (см., например, [6, 13]), реализованный в ряде универсальных пакетов, в том числе в пакете FLUENT, базируется на замораживании коэффициентов и конструировании уравнений относительно неизвестных величин зависимых переменных в узлах выбранного расчетного шаблона. Для обеспечения сходимости такой подход требует дополнительных итераций и применения техники нижней релаксации. Его разрабатывали в первую очередь применительно к расчетам низкоскоростных потоков (см., например, С. Патанкара [14]).

Другой способ линеаризации, основанный на формулировке схемы в приращениях зависимых переменных, предложен в [7] и впоследствии применен в оригинальном специализированном пакете VP2/3. Этот способ давно известен и весьма продуктивен для конструирования устойчивых расчетных процедур (см., например, [15]). Однако в [7] он сочетается с методом управления вычислительным процессом, описанным, в частности, в [16] применительно к решению уравнения потенциала для моделирования трансзвуковых течений. В результате разработана эффективная вычислительная процедура глобальных итераций, одинаково пригодная для моделирования стационарных и нестационарных течений вязкой жидкости и апробированная для решения пространственных задач вихревой динамики в окрестности уединенных лунок на плоскости с использованием моноблочных криволинейных сеток в [17, 18]. Следует отметить, что в указанных работах расчеты проводились по рабочей программе, написанной на алгоритмическом языке ФОРТРАН, т. е. тогда еще фактически не существовало пакета прикладных программ в общепринятом смысле (как он описывается, например, в [5]).

Одна из первых версий пакета VP2/3 под названием UVP была создана для расчета двумерного обтекания толстого профиля и кругового цилиндра с вихревыми ячейками [5]. В ней нашла воплощение разрабатываемая с середины 90-х годов многоблочная вычислительная технология решения задач гидромеханики и теплофизики в многосвязных расчетных областях [19]. Помимо указанной задачи обтекания толстого профиля в единую оболочку двумерной версии пакета были включены также тестовые задачи ламинарного и турбулентного обтекания цилиндра и циркуляционного движения жидкости в прямоугольной каверне. Структура специализированного пакета, подобно универсальному аналогу, включает в себя блок подготовки исходной информации, в том числе генератор сеток, решатель с возможностью управления вычислительным процессом и его диагностикой (окном траекторий сходимости), интерпретатор численных результатов, предполагающий обработку как интегральных и экстремальных, локальных характеристик, так и полей зависимых переменных. Конечно, вышеупомянутый генератор сеток в специализированном комплексе настроен на рассматриваемые частные объекты, несмотря на то, что работа с метрикой универсальна, т. е. такой комплекс имеет очень много сходных черт с универсальным пакетом. Это, безусловно, касается решателя, в который загружается каталог дискретных и математических моделей, используемых для решения гораздо более широкого круга задач, чем тот, который содержится в перечне задач VP2/3. По мере совершенствования пакета в него включались трехмерные, нестационарные задачи движения неоднородных сред и теплообмена, в том числе, с естественной конвекцией. Некоторые из методических расчетов, касающихся численных исследований турбулентных течений и теплообмена с помощью VP2/3, представляются в цикле работ последних лет [20 – 30]. В их число входят решение двумерных задач стационарного и нестационарного обтекания кругового цилиндра, а также задач смерчевого теплообмена при пространственном обтекании уединенной лунки и пакета лунок на плоской стенке с учетом загромождения стенками канала. Чрезвычайно важно отметить, что успехи в прогнозировании характеристик турбулентных течений и теплообмена связаны с использованием модели переноса сдвиговых напряжений SST  $k-\omega$ , предложенной Ментером [31], и во многом содействуют ее верификации.

Один из самых употребительных подходов к решению уравнений Навье — Стокса является SIMPLEC — метод [5, 7, 13]. Из уравнения неразрывности выводится эллиптическое уравнение для коррекции давления. В отличие от исходного варианта SIMPLE C. Патанкара [14], предложенный Ван-Дурмалом и Рейтби вариант согласованной процедуры коррекции давления SIMPLEC обладает большей вычислительной устойчивостью и не требует малых величин коэффициентов релаксации. В то время как SIMPLEC является ядром алгоритма, реализованного в VP2/3, она не единственная процедура решения уравнений в пакете FLUENT. В нем также используется известная процедура расчета несжимаемых течений, построенная на концепции искусственной сжимаемости [13].

Выбор расчетного шаблона, а именно: взаимного расположения узлов, в которых определяются дискретные значения искомых параметров, играет важную роль при конструировании расчетного алгоритма. Во многом он обуславливается решением проблемы взаимосвязи и согласования полей скорости и давления. Известно [14], что применение так называемого центрированного шаблона, когда все переменные связываются с центрами расчетных ячеек, т. е. с одними и теми же узлами, в сочетании с центрально-разностными аппроксимациями градиента давления может приводить к пилообразным распределениям давления и скорости. Чтобы избежать их, вводится шахматный шаблон с разнесенными узлами, для которого при сохранении размещения дискретных величин давления и скалярных

переменных декартовы составляющие скорости определяются в центрах граней, расположенных для равномерных сеток посередине между центрами ячеек. Такой подход требует введения нескольких контрольных объемов для расчета зависимых переменных и, соответственно, увеличивает объем вычислительной работы по сравнению с выбором центрированного шаблона.

Предложенный Рхи и Чоу (см., например, [5, 13]) регуляризатор в блоке правки давления позволяет решить проблему взаимосвязи давления и скорости на центрированном шаблоне. Однако, в отличие от исходного варианта (1983), скорректированные потоки задаются с коэффициентом, равным 0,1 (как установлено численными экспериментами в [5]). Такой подход стал общеупотребительным во всех пакетах, в том числе в VP2/3 и FLUENT, хотя в руководстве к последнему пакету введение указанного коэффициента не упоминается. Подобная процедура монотонизации поля давления для шаблона с расположением декартовых составляющих скорости в углах расчетных ячеек предлагается Ченом и основывается на осреднении дефекта массы в ячейке по дефектам массы в соседних ячейках [32]. Указанный шаблон выбран в предварительной версии VP2/3 – UVP.

Как ранее отмечалось, возникшая в восьмидесятых годах проблема искусственной диффузии, связанная с аппроксимацией конвективных членов уравнений переноса, была решена в основном за счет применения противопоточных схем второго порядка точности, в частности, схемы с квадратичной интерполяцией Леонарда. Именно эта схема, а точнее, ее одномерный вариант используется в пакетах VP2/3 и FLUENT при выполнении данного численного исследования.

Полученный в мировой практике опыт расчетов стационарных течений вязкой жидкости при высоких числах Рейнольдса с использованием схем дискретизации высокого порядка аппроксимации свидетельствует о затруднениях с вычислительной устойчивостью итерационного процесса [13], что является основанием для рекомендации в руководстве к пакету FLUENT [6] не игнорировать схемы дискретизации первого порядка точности, а также создавать начальные приближения путем предварительных расчетов при меньших числах Рейнольдса. В то же время, предложенный подход к конструированию расчетной процедуры в приращениях зависимых переменных [5], реализованный в VP2/3, практически не чувствителен к выбору схемы дискретизации конвективных членов в явной части уравнений. Следует добавить, что в VP2/3 для повышения устойчивости и скорости сходимости итераций в неявной части уравнений конвективные члены представляются с помощью противопоточной схемы с односторонними разностями, а коэффициент диффузионного переноса умножается на определенный численными экспериментами постоянный параметр OTL (как правило, больше единицы), что позволяет сгладить нефизические осцилляции [18]. В обоих пакетах для расчета составляющих скорости применяется коэффициент нижней релаксации (порядка 0,3).

Существенное значение для обеспечения высокой эффективности процесса вычисления имеет выбор метода решения алгебраических уравнений. В пакете VP2/3 для этой цели применяется процедура неполной матричной факторизации в варианте SIP Стоуна [7]. В проведенных исследованиях на основе FLUENT используется сочетание процедуры Гаусса — Зайделя и алгебраического многосеточного ускорителя (AMG) [6].

Трактовка турбулентных эффектов сводится к решению дополнительных дифференциальных уравнений переноса для турбулентных характеристик. Проблема искусственной диффузии при дискретизации указанных управляющих уравнений не стоит столь остро, как для уравнений количества движения. Одно время даже полагали [7], что можно ограничиться схемами низкого порядка аппроксимации для представления конвективных членов. Однако современное представление

о конструировании высокоточных расчетных алгоритмов несовместимо с использованием грубых методов с большими схемными погрешностями. Поэтому предлагается при дискретизации конвективных членов уравнений в блоке турбулентности применять схемы не ниже второго порядка аппроксимации [5]. Однако при этом надо принимать во внимание поведение распределений характеристик турбулентности, которое в отдельных зонах течения носит обвальный (скачкообразный) характер. По этой причине нежелательно использовать немонотонные схемы типа квадратичной противопоточной интерполяции, продуцирующей в зонах высоких градиентов ложные осцилляции. В расчетах сжимаемых течений со скачками уплотнения для отображения скачкообразно изменяющихся функций давно применяется схема TVD. Ее разновидность UMIST TVD, предложенная Лещинером, используется в пакете VP2/3 и в данной работе [5].

#### МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ (ОБЗОР И КРАТКИЙ АНАЛИЗ)

Следует признать (см., например, [2]), что подход Рейнольдса к трактовке турбулентности остается наиболее эффективным для проведения численных расчетов. Проблема замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса сводится к определению рейнольдсовых напряжений и, как правило, к записи дополнительных дифференциальных уравнений для характеристик турбулентности, причем одной из самых распространенных является гипотеза вихревой или турбулентной вязкости.

На основе анализа опыта двадцатипятилетних численных исследований отрывных течений несжимаемой и слабосжимаемой жидкости при числах Рейнольдса в диапазоне от  $10^4$  до  $10^6$  выделяются несколько важных этапов развития моделирования турбулентности. Начальный период расчетов из-за ограниченности вычислительных ресурсов характеризовался использованием упрощенных подходов к записи уравнений Рейнольдса в преобразованных переменных завихренность — функция тока и весьма экономных сеток в сочетании с двухпараметрической диссипативной моделью, известной как  $k$ – $\varepsilon$ -модель турбулентности Лаундера — Сполдинга [33, 34]. Как уже отмечалось ранее, следующим этапом стало устранение или значительное уменьшение влияния эффектов искусственной численной диффузии в расчетах циркуляционных течений. Именно тогда стало очевидно, что моделирование турбулентности неотделимо от проблем ее численной реализации. Следует подчеркнуть, что 70–80 годы были периодом широчайшего распространения  $k$ – $\varepsilon$ -модели, в основном ее высокорейнольдсовой версии. И до сих пор степень ее применения в практических расчетах достаточно высока. К концу 80-х годов получили развитие модифицированные версии  $k$ – $\varepsilon$ -модели, учитывающие низкорейнольдсовые эффекты, влияние кривизны линий тока, скорости вращения.

Созданные на современном индустриальном периоде развития CFD многофункциональные пакеты прикладных программ содержат обширные каталоги одно-, двух- и многопараметрических моделей турбулентности. Они включают сравнительно новые (последнего десятилетия) модели: SA (Спаларта-Аллмареса, 1992 [35]); SST  $k$ – $\omega$  (Ментера, 1993 [31]); V2F (Дурбина, 1995 [36]), а также модифицированные  $k$ – $\varepsilon$ -модели, такие как, например, RNG- $k$ – $\varepsilon$  [37] и Realisable- $k$ – $\varepsilon$  [38]. Все перечисленные модели тестируются на задаче о циркуляционном течении в квадратной каверне с подвижной границей при  $Re = 5 \times 10^4$  при использовании универсального пакета FLUENT. На основе специализированного пакета VP2/3 анализируются лишь две модели из представленного перечня: SA и SST  $k$ – $\omega$ -модели.



Целесообразно вкратце сопоставить выбранные модели турбулентности. Их более подробное описание можно найти в курсах лекций (см., например, [9, 39]) и в руководствах типа [6].

Модель SA принадлежит к типу однопараметрических моделей с одним дифференциальным уравнением для вихревой вязкости и не требующих расчета масштаба длины, отнесенного к локальной толщине сдвигового слоя. Модель была сконструирована специально для аэрокосмических исследований, для прогнозирования характеристик пристеночных течений и хорошо зарекомендовала себя при расчете пограничных слоев с положительным градиентом давления. Также она снискала популярность в приложении к турбомашинам. В оригинальной форме модель SA представляет низкорейнольдсовую модель, которая требует надлежащего разрешения пристеночной зоны пограничного слоя. В пакете FLUENT модель SA приспособлена для использования в сочетании с пристеночными функциями в случае применения относительно грубых сеток. Отмечается, что градиенты переносимой переменной в модели SA намного меньше, чем градиенты переносимых переменных для  $k-\omega$ - и  $k-\varepsilon$ -моделей, что делает SA менее чувствительной к численным ошибкам, когда у стенок используются неструктурированные сетки. Модель не вполне безупречна и, в частности, не может предсказать затухание однородной изотропной турбулентности.

Записанное в декартовых координатах  $x_i$  дифференциальное уравнение для определения коэффициента вихревой вязкости в сочетании с алгебраическими выражениями для вспомогательных функций и модельными константами формулируется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{v}u_i) = G_v + \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \rho\tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} - Y_v,$$

$$\mu_t = \rho\tilde{v}f_{v1}; \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\tilde{v}}{v}; \quad G_v = C_{b1}\rho\tilde{S}\tilde{v}; \quad \tilde{S} \equiv \bar{S} + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2},$$

скорректированный вариант:

$$\bar{S} \equiv \left| \Omega_{ij} \right| + C_{\text{prod}} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|); \quad |S_{ij}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

$$Y_v = C_{w1}\rho f_w \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2, \quad f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r \equiv \frac{\tilde{v}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2},$$

$$C_{\text{prod}} = 2,0, \quad C_{b1} = 0,1335, \quad C_{b2} = 0,622, \quad \sigma_{\tilde{v}} = \frac{2}{3}, \quad C_{v1} = 7,1,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_{\tilde{v}}}, \quad C_{w2} = 0,3, \quad C_{w3} = 2,0, \quad \kappa = 0,4187.$$

Важно отметить, что по умолчанию в пакете FLUENT используется стандартный вариант SA, в то время как скорректированный вариант, судя по предварительным исследованиям [40], представляется более предпочтительным для расчета отрывных течений.

Стандартная модель  $k$ - $\varepsilon$  принадлежит к типу двухпараметрических моделей турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями переноса, записанных для масштабов скорости и длины соответственно. Модель давно стала своеобразной “рабочей лошадкой” в инженерных расчетах со времени ее разработки Лаундером и Сполдингом. Работоспособность, экономичность, приемлемая точность для широкого класса течений объясняют ее популярность для решения промышленных задач прогнозирования характеристик течения и теплообмена. Эта полуэмпирическая модель и вывод модельных уравнений базируются на феноменологических соображениях и эмпирике. Поскольку преимущества и недостатки  $k$ - $\varepsilon$ -модели хорошо известны, еще в 80-х годах выполнен ряд ее модификаций. Две из них, а именно:  $k$ - $\varepsilon$ -модели — RNG и Realizable — введены в каталог моделей FLUENT.

Первая из них, RNG  $k$ - $\varepsilon$ -модель, выводится на основе теории ренормализационных групп Яхота и Орзага. Ее отличительные признаки:

- 1) модель содержит в уравнении для  $\varepsilon$  дополнительный член, уточняющий прогнозирование течений с быстрыми деформациями;
- 2) RNG теория дает аналитическую формулу для турбулентного числа Прандтля в отличие от постоянной величины для стандартной  $k$ - $\varepsilon$ -модели;
- 3) в отличие от стандартного высокорейнольдсового аналога RNG теория позволяет принять во внимание низкорейнольдсовые эффекты.

Система дифференциальных уравнений RNG  $k$ - $\varepsilon$ -модели вместе с алгебраическими выражениями и модельными константами показаны ниже.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_k \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - \rho \varepsilon,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\varepsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon,$$

$$G_k = \mu_t S^2, \quad S \equiv |S_{ij}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}},$$

расчет  $d \left( \frac{\rho^2 k}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \right) = 1,72 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + Cv}} d\hat{v}; \quad \hat{v} = \mu_{\text{eff}} / \mu, \quad C_v \approx 100,$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = 0,0845;$$

расчет  $\left| \frac{\alpha - 1,3929}{\alpha_0 - 1,3929} \right|^{0,6321} \left| \frac{\alpha + 2,3929}{\alpha_0 + 2,3929} \right|^{0,3679} = \frac{\mu_{\text{mol}}}{\mu_{\text{eff}}}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \text{Re} \gg 1, \quad \alpha_k = \alpha_\varepsilon \approx 1,393,$

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}, \quad \eta \equiv Sk / \varepsilon, \quad \eta_0 = 4,38, \quad \beta = 0,012,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\varepsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon}^* \rho \frac{\varepsilon^2}{k},$$

$$C_{2\varepsilon}^* = C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3}, \quad C_{1\varepsilon} = 1,42, \quad C_{2\varepsilon} = 1,68.$$

Термин “Realizable  $k$ - $\varepsilon$ -модель” означает, что эта модель в отличие от высокорейнольдсового аналога удовлетворяет математическим ограничениям на нормальные напряжения, согласующимся с физикой турбулентных течений. Речь идет о том, чтобы избежать отрицательных величин вихревой вязкости для течений с высокими градиентами. Это достигается введением функциональной зависимости вместо константы  $C_\mu$  и, таким образом, корректируется формула для определения турбулентной вязкости.

Новое уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$  выводится из точного уравнения переноса среднеквадратических флуктуаций завихренности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 G_\varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}},$$

$$C_1 = \max \left[ 0,43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = S \frac{k}{\varepsilon}, \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s k U^* / \varepsilon},$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{ij}}, \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk} \omega_k, \quad \Omega_{ij} = \overline{\Omega_{ij}} - 2\varepsilon_{ijk} \omega_k,$$

$\overline{\Omega_{ij}}$  — осредненный тензор скоростей вращения,  $A_0 = 4,04$ ,  $A_s = \sqrt{6} \cos \phi$ ,

$$\phi = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \sqrt{6W} \right), \quad W = \frac{S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{S}, \quad C_{1\varepsilon} = 1,44, \quad C_2 = 1,9, \quad \sigma_k = 1,0, \quad \sigma_\varepsilon = 1,2.$$

Модель  $k$ - $\omega$ , хотя и существенно уступает по широте применения моделям типа  $k$ - $\varepsilon$ , является одной из первых дифференциальных полуэмпирических моделей турбулентности, предложенных в сороковых годах прошлого века. Еще в 1941 г. Колмогоров сформулировал вариант этой модели. Стандартная  $k$ - $\omega$ -модель Вилкокса [39] содержит модификации, учитывающие низкорейнольдсовые эффекты, влияние сжимаемости и распространение сдвиговых течений. Она обнаружила способность прогнозировать скорость распространения сдвиговых течений достаточно близко к экспериментально измеренной для свободных сдвиговых течений, в частности, дальних следов, слоев смещения, плоских, круговых и радиальных струй. Также она оказалась применимой к ограниченным стенками потокам.

Модель переноса сдвиговых напряжений (SST) Ментера (1993) имеет следующие характерные черты.

1. Стандартная  $k$ - $\omega$ -модель и преобразованная  $k$ - $\varepsilon$ -модель накладываются с помощью функции смещения и объединяются в одну модель. Функция смещения конструируется таким образом, что принимает единичное значение в пристеночной области, в которой активизируется стандартная  $k$ - $\omega$ -модель, и равняется нулю вдали от стенки, в которой активизируется преобразованная  $k$ - $\varepsilon$ -модель.

2. SST модель включает демпфированный член с перекрестными производными в уравнении для  $\omega$ .

3. При определении турбулентной вязкости принимается во внимание перенос турбулентных сдвиговых напряжений.

4. Модельные константы несколько отличаются от аналогичных значений в исходных моделях.

Как уже отмечалось, модель Ментера прошла длительную апробацию. Она детально описана в ряде работ [5, 26]. Здесь приводится ее краткое описание в исходном варианте. Отметим, что в этом виде она используется в пакете FLUENT [6].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega, \quad \Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k},$$

$$\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}, \quad \mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left( \frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{a_1 \omega} \right)}, \quad \Omega \equiv \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}},$$

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1 / \sigma_{k,1} + (1 - F_1) / \sigma_{k,2}}, \quad \sigma_\omega = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\omega,1} + (1 - F_1) / \sigma_{\omega,2}},$$

$$F_1 = \tanh \left( \Phi_1^4 \right), \quad \Phi_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2} \right],$$

$$D_\omega^+ = \max \left[ 2 \rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right],$$

$$F_2 = \tanh \left( \Phi_2^2 \right), \quad \Phi_2 = \max \left[ 2 \frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right], \quad G_k = \mu_t S^2, \quad G_\omega = \frac{\alpha}{\nu_t} G_k,$$

$$Y_k = \rho \beta^* k \omega, \quad Y_\omega = \rho \beta \omega^2, \quad D_\omega = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j},$$

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + \text{Re}_t / R\omega}{1 + \text{Re}_t / R\omega} \right), \quad \alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k} \right), \quad \text{Re}_t = \rho k / (\mu \omega),$$

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty,1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty,2}, \quad \alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}, \quad \beta_i = F_1 \beta_{i,1} + (1 - F_1) \beta_{i,2},$$

$$\alpha_{\infty,1} = \frac{\beta_{i,1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,1} \sqrt{\beta_\infty^*}}, \quad \alpha_{\infty,2} = \frac{\beta_{i,2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega,2} \sqrt{\beta_\infty^*}},$$

$$R_\omega = 2,95, R_k = 6, \sigma_{k,1} = 1,176, \sigma_{\omega,1} = 2,0, \sigma_{k,2} = 1,0, \sigma_{\omega,2} = 1,168,$$

$$a_1 = 0,31, \beta_{i,1} = 0,075, \beta_{i,2} = 0,0828, \beta_\infty^* = 0,09, \alpha_0 = \frac{1}{9}, \alpha_\infty^* = 1.$$

Сравнительно недавно Менгером внесены коррективы в модель SST  $k-\omega$ , сделанные на основе десятилетнего опыта ее эксплуатации [41]. Вместо модуля завихренности  $\Omega$  в выражении для вихревой вязкости используется инвариантная величина модуля тензора скоростей деформации  $S \equiv |S_{ij}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ . В ограничителе при определении члена, содержащего перекрестные производные, вместо значения степени 20 берется 10. Для сравнительного анализа пакетов в VP2/3, как и в FLUENT, используется базовая модель SST  $k-\omega$ , хотя следует отметить, что ее скорректированная версия также инкорпорирована в VP2/3.

Одной из последних новейших моделей является модель V2F, которая подобна стандартной модели  $k-\varepsilon$ , но включает пристеночную анизотропию турбулентности и нелинейные эффекты давления — напряжений. В целом это низкорейнольдсовая модель.

Четырехпараметрическая модель V2F содержит четыре уравнения относительно четырех зависимых переменных:  $k$  и  $\varepsilon$ , масштаба скорости  $\overline{v^2}$  и эллиптической релаксационной функции  $f$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = P - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + S_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{C'_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + S_\varepsilon,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \overline{v^2} u_i) = \rho k f - 6 \rho \overline{v^2} \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j} \right] + S_{\overline{v^2}},$$

$$f - L^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = (C_1 - 1) \frac{2/3 - \overline{v^2}/k}{T} + C_2 \frac{P}{\rho k} + \frac{5 \overline{v^2}/k}{T} + S_f,$$

$$T = \min \left[ T', \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \frac{k^{3/2}}{v^2 C_\mu \sqrt{2S^2}} \right], \quad T' = \max \left[ \frac{k}{\varepsilon}, 6 \sqrt{\frac{v}{\varepsilon}} \right],$$

$$L = C_L \max \left[ L', C_\eta \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right], \quad L' = \min \left[ \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{k^{3/2}}{v^2 C_\mu \sqrt{2S^2}} \right], \quad \mu_t = \rho C_\mu \overline{v^2} T,$$

$$C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} \left( 1 + 0,45 \sqrt{k/v^2} \right), \quad \alpha = 0,6, \quad C_1 = 1,4, \quad C_2 = 0,3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,4, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,9,$$

$$C_\eta = 70, \quad C_\mu = 0,22, \quad C_L = 0,23, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3.$$

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Моделирование турбулентного циркуляционного течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с подвижной границей представляет одну из простейших по постановке задач. Решение задачи ищется в ограниченной стенками расчетной области, на которых задаются условия прилипания. Размер границы  $L$ , скорость ее перемещения  $U$ , плотность  $\rho$  и динамическая вязкость  $\mu$  жидкости, заполняющей квадратную полость, выбираются в качестве характерных параметров. Определенное по указанным параметрам число Рейнольдса  $Re$  принимается равным  $5 \times 10^4$ , которое соответствует экспериментальному значению [4].

Как известно [5], ламинарное возвратно-циркуляционное течение в каверне при высоких числах Рейнольдса характеризуется формированием разномасштабных структурных элементов: первичного, вторичных и третичных вихрей, весьма тонких пограничных слоев. Для их отображения с высокой точностью необходимы подробные расчетные сетки с мелкими пристеночными шагами (порядка  $Re^{-1}$ ). Принимая во внимание, что уравнения Рейнольдса замыкаются в основном уравнениями низкорейнольдсовых моделей турбулентности, целесообразно использовать для расчета турбулентного отрывного течения в каверне такие же густые сетки. На рис. 2 представлены выбранные сетки с количеством ячеек порядка 150 тысяч с размером пристеночного шага, равным  $10^{-5}$ . Рассматриваются структурированные ( $400 \times 400$ ) и треугольные, неструктурированные сетки. В последнем случае последовательно измельчающиеся по мере приближения к стенкам треугольные ячейки стыкуются прямоугольными пристеночными ячейками в прилегающих к стенкам слоях. В работе проведено детальное методическое исследование влияния структурированных сеток различной густоты на решение задачи с помощью VP2/3 и SST  $k-\omega$ -модели при варьировании количества ячеек  $N$  от 50 до 400, величины пристеночного шага  $\delta_m$  от  $10^{-5}$  до  $5 \times 10^{-4}$ . Особое внимание уделено оценке влияния максимального шага сетки  $\delta_m$ , изменяющегося в диапазоне от 0,0129 до 0,1564.

Опыт расчетов циркулирующего в квадратной каверне потока вязкой жидкости [4, 5, 7, 8] показывает, что в качестве исследуемых интегральных и локальных характеристик течения целесообразно выбрать, в первую очередь, максимальную величину функции тока  $\psi_m$ , распределение коэффициента трения  $C_f$  по дну, профили продольной  $u_{1/2}(y)$  и поперечной  $v_{1/2}(x)$  составляющих скорости, а также профиль турбулентной вязкости  $\mu_{t1/2}(y)$  в срединных сечениях каверны. Величина  $\psi_m$  характеризует расход жидкости, вовлекаемой в движение перемещением с постоянной скоростью  $U$  верхней границы. Этот параметр давно рассматривается как показатель точности численных прогнозов и служит для оценки приемлемости расчетных алгоритмов. Кроме того, представляют интерес вихревая структура и картина изолиний турбулентных характеристик течения в каверне. Все вышеуказанные объекты внимания данного исследования нашли отражение в методических экспериментах и в анализе выбранных моделей турбулентности.

При задании исходных данных, помимо набора определяющих параметров и схемных факторов требуется инициализировать поля зависимых переменных, т. е. присвоить им начальные фиксированные значения, либо использовать в качестве исходной информации рассчитанные поля из предыдущих вариантов. Как правило, фиксированные значения соответствуют внезапному движению с постоянной скоростью верхней границы каверны, т. е. состоянию покоящейся жидкости. А в качестве предварительных полей могут выступать рассчитанные поля для ламинарного режима течения (в этом случае характеристики турбулентности принимают по

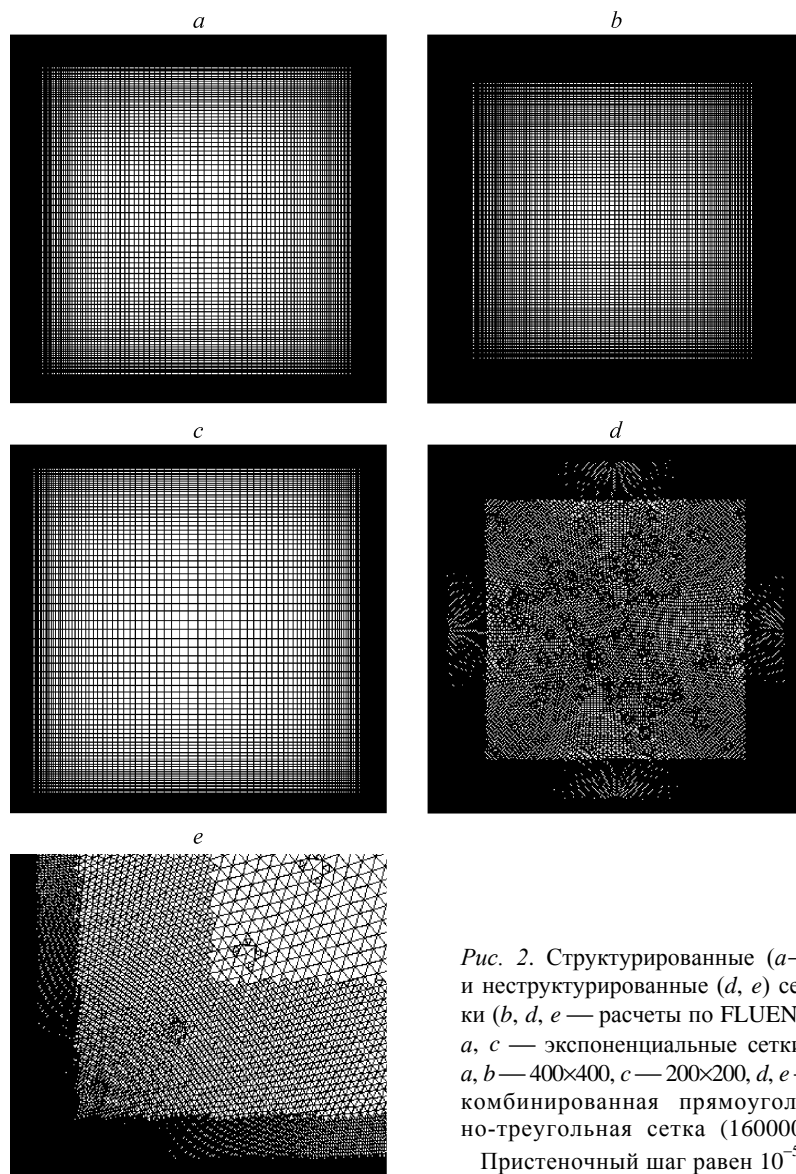


Рис. 2. Структурированные (*a–c*) и неструктурированные (*d, e*) сетки (*b, d, e* — расчеты по FLUENT, *a, c* — экспоненциальные сетки): *a, b* —  $400 \times 400$ , *c* —  $200 \times 200$ , *d, e* — комбинированная прямоугольно-треугольная сетка (160000). Пристеночный шаг равен  $10^{-5}$ .

всему полю фоновые значения) или аналогичные поля, полученные при использовании той или иной модели турбулентности.

**Оценка влияния схемных факторов.** Проведенное методическое исследование ориентируется в большей степени на анализ двух перспективных моделей турбулентности: SA и SST  $k-\omega$ . При этом значительный интерес вызывает сравнение, в частности, с целью их верификации, различных по назначению вычислительных комплексов — пакетов FLUENT и VP2/3 (аналогов экспериментальных установок), базирующихся на разных расчетных алгоритмах. Также важным элементом исследования представляется оценка влияния на решение задачи типа выбранной сетки и распределения сеточных узлов в расчетной области. Некоторые результаты проведенных тестовых расчетов приводятся на рис. 3 – 7 и в таблице.

Анализ траекторий сходимости итерационных процессов расчета с помощью пакета VP2/3 турбулентного отрывного течения в каверне с использованием скорректированной модели SA и зональной модели SST  $k-\omega$  демонстрирует

регрессивный характер поведения погрешностей локальных параметров потока и характеристик турбулентности с ростом итераций  $N_{it}$ , причем процесс достижения надлежащей точности растягивается на многие тысячи итераций. При этом не отмечается существенного различия в поведении траекторий для двух различных моделей.

Сравнительный анализ траекторий сходимости (рис. 3, *a–c*) обнаруживает интересную корреляцию зависимостей от номера итерационного шага  $N_{it}$ , максимальных погрешностей зависимых переменных  $Err(N_{it}) = \max \left[ f_{ij}^{N_{it}+1} - f_{ij}^{N_{it}} \right]$  (составляющих скорости, давления и энергии турбулентности) и максимальной величины функции тока  $\psi_m$ . Обычно достижение сходимости численного решения определяется критерием малости приращений зависимых переменных, т. е. упомянутых выше погрешностей в сравнении с заданной точностью. Показателем точности является выбранное малое число порядка  $10^{-5} - 10^{-4}$ . При эксплуатации пакетов (например, FLUENT) считается, что уровень  $10^{-4}$  представляется достаточным для прерывания счета. Однако, как следует из рис. 3, при таком уровне точности не достигается сходимости по осредненным параметрам потока, в частности, по  $\psi_m$ . Поведение кривых  $\psi_m(N_{it})$  на рис. 3, *c* иллюстрирует затяжной характер их выхода на асимптотику, что представляется вполне оправданным для задачи с отрывными зонами, в которой формирование циркуляционного течения происходит только за счет малого по величине (при высоких Re) напряжения трения на границе. В этой ситуации для достижения сходимости решения задачи необходимо не только повысить уровень точности до  $10^{-5}$ , но и выйти на установление интегральных характеристик (в рассматриваемом случае  $\psi_m$ ). Следует отметить, что для обеих выбранных моделей турбулентности процессы сходимости  $\psi_m(N_{it})$  оказываются весьма схожими.

На рис. 3, *d* сводятся кривые сходимости  $\psi_m(N_{it})$ , полученные с использованием различных пакетов, сеточных структур и моделей турбулентности. Несмотря на то, что все кривые выходят на асимптотические значения, приведенные в таблице, отмечается их значительный разброс. Некоторое преимущество в эффективности численных расчетов с помощью пакета FLUENT можно объяснить использованием алгебраического многосеточного ускорителя.

Влияние на решение задачи схемных факторов проводится с помощью пакета VP2/3 на основе зональной модели SST  $k-\omega$ . Проведено несколько серий расчетов циркуляционного турбулентного течения в квадратной каверне со ступенчатым увеличением количества ячеек (50×50, 100×100, 150×150, 200×200, 300×300, 400×400). При этом размеры пристеночного шага  $\delta$  либо фиксируются на низком уровне порядка  $0,5 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-5}$  (в этом случае центр вихря покрывается весьма разреженной сеткой), либо для подробных сеток ( $N$  порядка 200–300) параметр  $\delta$  варьируется в широких пределах — до  $5 \times 10^{-4}$  (плотность узлов в центральной зоне каверны возрастает, а величина максимального шага сетки  $\delta_m$  существенно уменьшается). Оценка приемлемости выбранных сеток для корректного прогноза характеристик отрывного течения проводится на основе сравнительного анализа распределения коэффициента трения на дне каверны, максимальных величин функции тока и скорости возвратного потока в первичном вихре, а также минимальных величин функции тока в наиболее крупном вторичном угловом вихре.

Как следует из рис. 4, *a, b*, распределения коэффициента трения по дну каверны довольно близки, начиная с сетки 100×100.  $C_f(x)$  для  $N = 50$  заметно отличаются от других аналогичных кривых, но при этом максимальный шаг в центральной зоне оказывается явно завышенным (порядка 0,15).



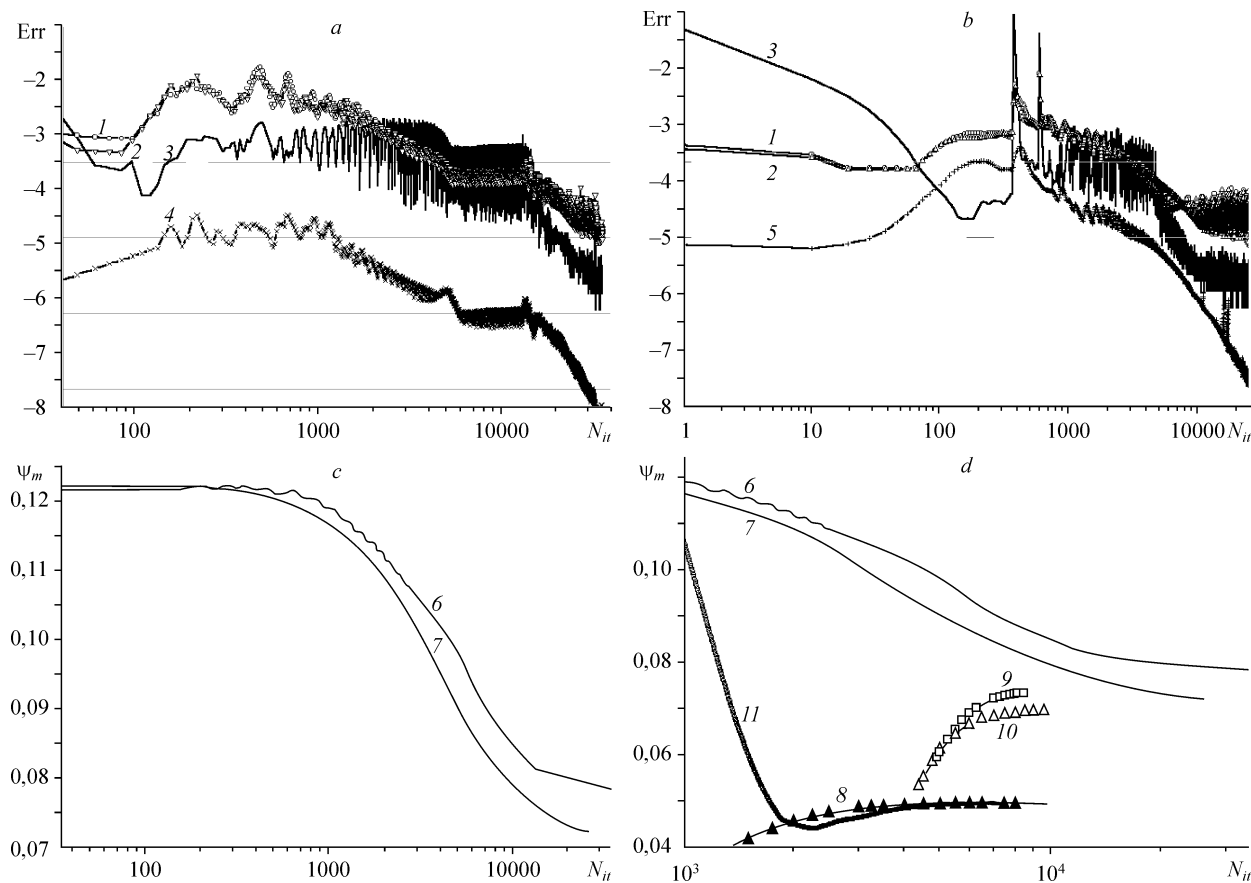


Рис. 3. Анализ сходимости итерационного процесса решения задачи с помощью моделей SA (a, b; кривые 8, 11) и  $k-\omega$  SST (b; кривые 7, 9, 10).

a, b — графики зависимости погрешностей составляющих скорости (1, 2), давления (3), вихревой вязкости (4), энергии турбулентности (5), а также максимальной функции тока (c, d) от числа итераций. 1–7 — VP2/3, 8–11 — FLUENT, 9, 11 — структурированные, 8, 10 — неструктурированные сетки, 8, 11 — SA без поправки.

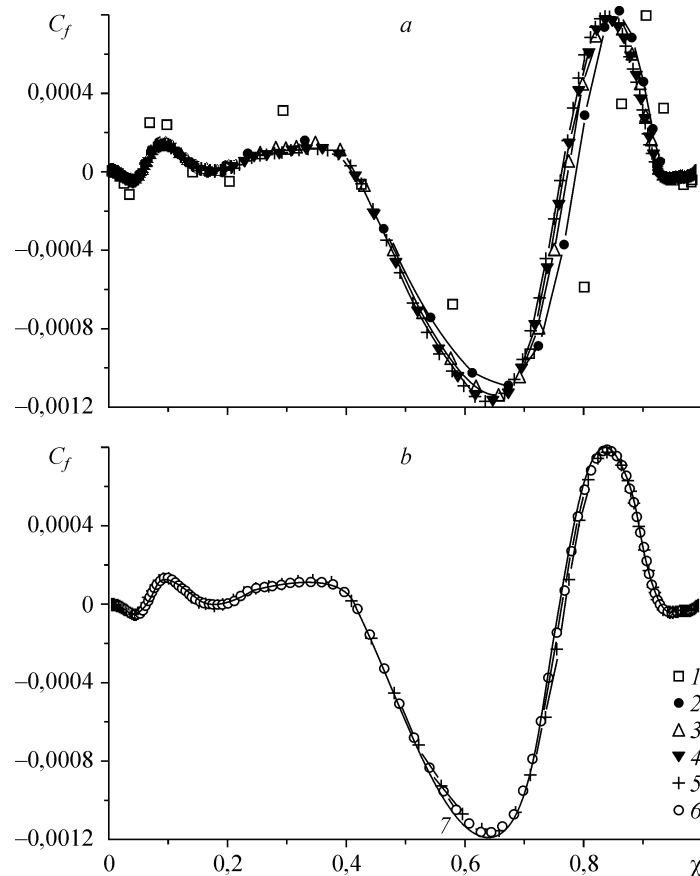


Рис. 4. Тестирование SST  $k-\omega$ -модели (VP2/3) на различных структурированных сетках.  $C_f(x)$  по дну каверны:  $N = 50$  (1), 100 (2), 150 (3), 200 (4), 300 (5), 400 (6) при фиксированном  $\delta = 2 \times 10^{-5}$ ,  $N = 400$  (7);  $\delta = 10^{-5}$ .

Увеличение  $N$  при фиксированном  $\delta$  приводит к постепенному насыщению ячейками центральной части каверны, а также повышает их плотность в зонах угловых вихрей. Как следствие (рис. 5), экстремальные характеристики отрывного течения характеризуются с ростом  $N$  близким к асимптотическому характером поведения. В то же время увеличение  $\delta$  при фиксированном  $N$  приводит к перераспределению узлов сетки в расчетной области с постепенным насыщением центральной части. Как видно на рис. 6, влияние  $\delta$  на выбранные характеристики невелико. Интересно отметить хорошую корреляцию результатов, построенных в зависимости от максимального шага сетки  $\delta_m$ . Представленные на рис. 7 данные концентрируются вблизи одной кривой.

В качестве вывода из методических расчетов можно отметить, что  $\psi_m$  и  $u_m$  попадают соответственно в 4–5 % и 3,5 % — интервалы отклонения от асимптотических значений, начиная с  $N = 200$ , а также в диапазонах изменения  $\delta$  от  $5 \times 10^{-6}$  до  $3 \times 10^{-4}$  и  $\delta_m$  от 0,01 до 0,05. В результате для сравнительного анализа моделей турбулентности выбираются подробные сетки с количеством ячеек  $400 \times 400$  и с пристеночным шагом  $10^{-5}$ .

Асимптотические максимальные величины функции тока для различных алгоритмов, моделей турбулентности и типов расчетных сеток сведены в таблицу. Все приведенные данные отчетливо разбиваются на две группы. В первой, соответствующей

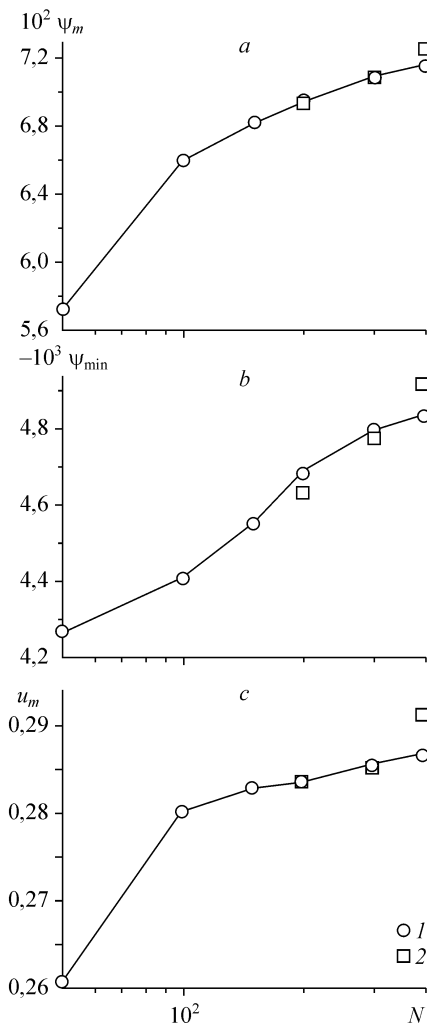


Рис. 5. Влияние количества расчетных ячеек при фиксированном  $\delta = 2 \times 10^{-5}$  на экстремальные характеристики крупномасштабных вихрей в каверне  $\psi_m(a)$ ,  $\psi_{\min}(b)$  и  $u_m(c)$ .  
 $\delta = 2 \times 10^{-5}$  (1),  $10^{-5}$  (2).

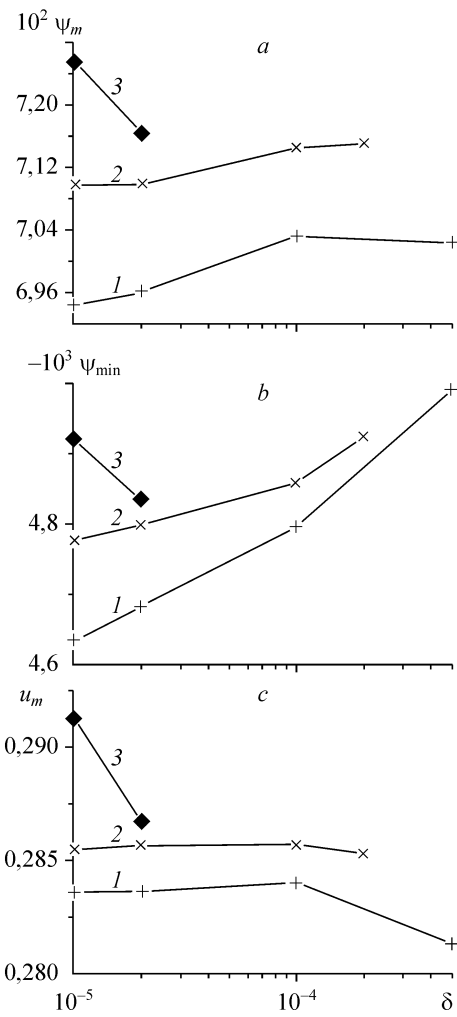


Рис. 6. Влияние пристеночного шага сетки при различном количестве ячеек ( $N = 200$  (1), 300 (2), 400 (3)) на экстремальные характеристики крупномасштабных вихрей в каверне  $\psi_m(a)$ ,  $\psi_{\min}(b)$  и  $u_m(c)$ .

величине  $\psi_m$  порядка 0,05, оказываются все разновидности модели  $k-\varepsilon$ , а также традиционная модель SA (без коррекции). Следует подчеркнуть, что для моделей первой группы практически не обнаруживается влияния типа сетки на результаты численных прогнозов. Во вторую группу входят данные, соответствующие величине  $\psi_m$  порядка 0,075. Им отвечают скорректированная модель SA, модель Ментера и, в некоторой степени, многопараметрическая модель V2F. Для моделей второй группы отмечается разброс численных прогнозов для различных сеток, хотя он укладывается в 5–10 %. Для разных моделей (SA и SST  $k-\omega$ ) наблюдается тенденция к занижению  $\psi_m$  при использовании неструктурированной треугольной сетки. В то же время численные результаты, полученные с помощью VP2/3 и FLUENT, оказываются весьма близкими, что позволяет рассчитывать на надежность

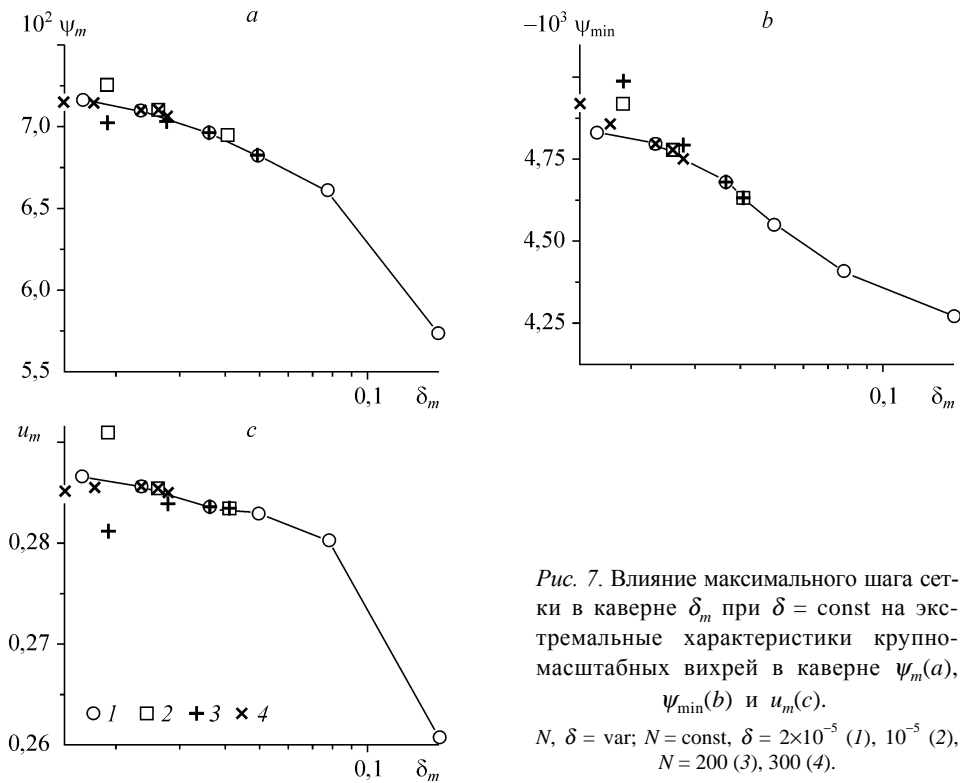


Рис. 7. Влияние максимального шага сетки в каверне  $\delta_m$  при  $\delta = \text{const}$  на экстремальные характеристики крупномасштабных вихрей в каверне  $\psi_m(a)$ ,  $\psi_{\min}(b)$  и  $u_m(c)$ .  
 $N$ ,  $\delta = \text{var}$ ;  $N = \text{const}$ ,  $\delta = 2 \times 10^{-5}$  (1),  $10^{-5}$  (2),  $N = 200$  (3),  $300$  (4).

сделанных ими численных прогнозов отрывных турбулентных течений. Следует отметить некоторое завышение  $\psi_m$ , определенной с помощью модели V2F. Можно ожидать, что оно обуславливается заниженной турбулизацией циркуляционного течения. Интересно сопоставить уровень  $\psi_m$ , полученный для ламинарного режима, с оценками по турбулентным моделям. Как видно из таблицы, турбулизация отрывного течения в каверне при высоких числах Рейнольдса приводит к уменьшению расхода примерно в 1,5 раза.

**Влияние выбранных модели и типа сетки, а также пакета программ на максимальную величину функции тока в первичном вихре**

Пакет прикладных программ	Модель турбулентности, тип сетки	Максимальная величина функции тока
FLUENT	RNG $k-\varepsilon$ (структурированная)	0,0528
	RNG $k-\varepsilon$ (неструктурированная)	0,0528
	Realizable $k-\varepsilon$ (структурированная)	0,0552
	SA (структурированная)	0,0500
	SA скорректированная (структурированная)	0,0827
	SA (неструктурированная)	0,0497
	SA скорректированная (неструктурированная)	0,0749
	SST $k-\omega$ (структурированная)	0,0738
	SST $k-\omega$ (неструктурированная)	0,0700
VP2/3	V2F(структурированная)	0,0888
	Ламинарный режим (структурированная)	0,1230
	SA скорректированная (структурированная)	0,0784
	SST $k-\omega$ (структурированная)	0,0724

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

<p><math>L</math> — длина стороны квадратной области, м,</p> <p><math>x, y</math> — горизонтальная и вертикальная координаты, м,</p> <p><math>\rho, \mu, U</math> — плотность, кг/м<sup>3</sup>, вязкость, Па·с и скорость движения границы, м/с,</p> <p><math>C_f</math> — коэффициент трения, безразмерный по скоростному напору, в долях <math>\rho U^2/2</math>,</p> <p>ERR — погрешности параметров потока,</p> <p><math>u, v</math> — декартовы составляющие скорости, соответствующие <math>x, y</math>, в долях <math>U</math>,</p> <p><math>p</math> — статическое давление, в долях удвоенного скоростного напора <math>\rho U^2</math>,</p> <p><math>k</math> — энергия турбулентных пульсаций, в долях <math>U^2</math>,</p>	<p><math>\varepsilon</math> — скорость диссипации турбулентной энергии, в долях <math>U^3/L</math>,</p> <p><math>\omega</math> — удельная скорость диссипации турбулентной энергии, в долях <math>U/L</math>,</p> <p>Re — число Рейнольдса, <math>Re = \rho UL/\mu</math>,</p> <p><math>\psi</math> — функция тока, в долях <math>UL</math>,</p> <p>Nit — номер итерационного шага;</p> <p><math>N</math> — число ячеек вдоль стороны квадрата.</p> <p>Нижние индексы:</p> <p>1/2 — параметры в срединном сечении каверны,</p> <p><math>t</math> — турбулентные параметры,</p> <p>m, min — максимальная и минимальная величины.</p>
--	---

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев С.А., Пышный И.А., Снегирев А.Ю., Усачов А.Е., Харченко В.Б. Многоблочные вычислительные технологии решения фундаментальных, прикладных и эксплуатационных задач энергетики и транспорта // Научный Вестник Академии гражданской авиации. Серия: Проблемы безопасности полетов и эксплуатации воздушного транспорта / Под ред. Г.А. Крыжановского и Е.А. Кулева. — 2003. — № 1. — С. 50–58.
2. Rodi W. Simulation of turbulence in practical flow calculations // Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona. — 2000. — 22 p.
3. Gosman A.D. Developments in industrial computational fluid dynamics // Trans. IChemE. — 1998. — Vol. 76, Pt. A, No. 2. — P. 153–161.
4. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Колльмана. — М.: Мир, 1984. — 464 с.
5. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки / Под ред. А.В. Ермишина и С.А. Исаева. — М.: МГУ, 2003. — 360 с.
6. Fluent Inc. Fluent 6.1 users guide, Lebanon, 2003.
7. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. — Л.: Судостроение, 1989. — 256 с.
8. Исаев С.А., Усачов А.Е. Численное моделирование отрывных течений в задачах внутренней аэродинамики // Промышленная аэродинамика. — М.: Машиностроение, — 1991. — вып.4 (36). — С. 43–75.
9. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений / Учебное пособие. СПб: БГТУ, 2001. — 107 с.
10. Pope S.B., Whitelaw J.H. The calculation of near-wake flows // J. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 73, Pt. 1. — P. 9–32.
11. Исаев С.А. О влиянии аппроксимационной вязкости при расчете турбулентных течений с циркуляционными зонами // Инж.-физ. журн. — 1985. — Т. 48, № 6. — С. 918–921.
12. Исаев С.А. Тестирование дифференциальных моделей турбулентности при расчете отрывных течений // Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. — 1989. — № 4. — С. 57–62.
13. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin, Heidelberg. — 1999. — 389 p.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
15. Дорфман Л.А. Численные методы в газодинамике турбомашин. — Л.: Энергия, 1974. — 272 с.
16. Численные методы в динамике жидкостей / Под ред. Г. Вирца, Ж. Смодерена. — М.: Мир, 1981. — 407 с.
17. Исаев С.А., Леонтьев А.И., Усачов А.Е. Методологические аспекты численного моделирования динамики вихревых структур и теплообмена в вязких турбулентных течениях // Известия РАН. Энергетика. — 1996. — № 4. — С. 140–148.
18. Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Судаков А.Г. Численное моделирование турбулентного обтекания потоком несжимаемой вязкой жидкости тел криволинейной формы при наличии подвижного экрана // Инж.-физ. журн. — 1998. — Т. 71, № 4. — С. 618–631.
19. Исаев С.А. Численное моделирование пространственных отрывных течений // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках: Труды XII Школы-семинара молодых ученых и специалистов по руководством академика РАН А.И.Леонтьева. — М.: МЭИ. — 1999. — С. 17–20.
20. Исаев С.А., Гувернюк С.В., Зубин М.А., Пригородов Ю.С. Численное и физическое моделирование низкоскоростного воздушного потока в канале с круговой вихревой ячейкой // Инж.-физ. журн. — 2000. — Т. 73, № 2. — С. 220–227.

21. **Исаев С.А., Пригородов Ю.С., Судаков А.Г.** Численный анализ эффективности вихревых ячеек при ламинарном и турбулентном обтекании кругового цилиндра со встроенными вращающимися телами // Известия АН. Сер. Мех. жидк. и газа. — 2000. — № 4. — С. 88–96.
22. **Исаев С.А., Баранов П.А., Гувернюк С.В., Зубин М.А.** Численное и физическое моделирование турбулентного течения в расширяющемся канале с вихревой ячейкой // Инж.-физ. журн. — 2002. — Т. 75, № 2. — С. 3–8.
23. **Исаев С.А., Леонтьев А.И., Метов Х.Т., Харченко В.Б.** Моделирование влияния вязкости на смерчевой теплообмен при турбулентном обтекании неглубокой лунки на плоскости // Там же. — 2002. — Т. 75, № 4. — С. 98–104.
24. **Isaev S.A., Zhdanov V.L., Niemann H.-J.** Numerical study of the bleeding effect on the aerodynamic characteristics of a circular cylinder // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. — 2002. — Vol. 90, Iss. 11. — P. 1217–1226.
25. **Исаев С.А., Леонтьев А.И., Баранов П.А., Пышный И.А., Усачов А.Е.** Численный анализ вихревой интенсификации теплообмена в канале с пакетом глубоких сферических лунок на одной из стенок // Докл. РАН. — 2002. — Т. 386, № 5. — С. 1–3.
26. **Баранов П.А., Исаев С.А., Леонтьев А.И., Митяков А.В., Митяков В.Ю., Сапожников С.З.** Физическое и численное моделирование вихревого теплообмена при турбулентном обтекании сферической лунки на плоскости // Теплофизика и аэромеханика. — 2002. — Т. 9, № 4. — С. 521–532.
27. **Isaev S.A., Leontiev A.I., Zhdanov V.L.** Simulation of tornado-like heat transfer at the flow passing a relief with dimples // Heat Transfer 2002, Proc. of the Twelfth Int. Heat Transfer Conf., Grenoble, 2002. — P. 735–738.
28. **Банкер Р., Беленький М.Я., Готовский М.А., Исаев С.А., Фокин Б.С.** Экспериментальное и расчетное исследование гидродинамики и теплоотдачи в плоском канале переменной ширины для случаев гладкой и интенсифицированной поверхности // Тр. Тр. Росс. национ. конф. по теплообмену. Т. 6. Интенсификация теплообмена. Радиационный и сложный теплообмен. — М.: МЭИ. — 2002. — С. 37–40.
29. **Исаев С.А., Леонтьев А.И., Митяков А.В., Пышный И.А.** Интенсификация смерчевого турбулентного теплообмена в асимметричных лунках на плоской стенке // Инж.-физ. журн. — 2003. — Т. 76, № 2. — С. 31–34.
30. **Исаев С.А.** Разработка многоблочных вычислительных технологий для решения задач вихревой аэромеханики и теплофизики // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Тр. XIV Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. Т. 1. — М.: МЭИ, 2003. — С. 13–16.
31. **Menter F.R.** Zonal two equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. — 1993. — № 93-2906. — 21 p.
32. **Chen Y.S.** A numerical method for three-dimensional incompressible flows using nonorthogonal body-fitted coordinate systems // AIAA Paper. — 1986, No. 1654. — 9 p.
33. **Lauder B.E., Spalding D.B.** The numerical computation of turbulent flow // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1974. — Vol. 3, No. 2. — P. 269–289.
34. **Lauder B.E., Spalding D.B.** Mathematical models of turbulence. London: Academic Press. 1972.
35. **Spalart P.R., Allmaras S.R.** A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. — 1992, No. 92-0439. — 22 p.
36. **Durbin P.A.** Separated flow computations with the  $k-\epsilon-v^2$ -model // AIAA J. — 1995. — Vol. 33, No. 4. — P. 659–664.
37. **Yakhot V., Orszag S.A.** Renormalization group analysis of turbulence: 1. Basic theory // J. Scientific Computing. — 1986. — Vol. 1, No. 1. — P. 1–51.
38. **Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J.** A new  $k-\epsilon$  eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows — model development and validation // Computers Fluids. — 1995. — Vol. 24, No. 3. — P. 227–238.
39. **Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.** Ten years of industrial experience with the SST turbulence model / Turbulence, Heat and Mass Transfer 4. Ed. K.Hajalic, Y.Nogano, M.Tummers. Begell House, Inc. — 2003. — 8 p.
40. **Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Лысенко Д.А., Усачов А.Е.** Ретроспективный анализ полуэмпирических дифференциальных моделей турбулентности для расчета отрывных течений // Модели и методы аэродинамики. Материалы Третьей международной школы-семинара. — М.: МЦНМО. — 2003. — С. 54–55.
41. **Wilcox D.C.** Turbulence modeling for CFD. La Canada, California: DCW Industries, Inc., 1998. — 537 p.

*Статья поступила в редакцию 15 февраля 2005 г.*