

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ СХОДОМ БЕРЕГОВОГО ОПОЛЗНЯ

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Разработана математическая модель образования и распространения прерывных волн, вызванных сходом в воду берегового оползня. В ее основе лежат плановые уравнения двухслойной «мелкой жидкости» со специально введенным «сухим трением» в нижнем слое, что позволяет описывать одновременное движение оползневой и водной массы. Построена аппроксимирующая эти уравнения явная разностная схема, на базе которой создан численный алгоритм, позволяющий моделировать движение свободных границ как оползня, так и воды (в частности, распространение водной волны по сухому руслу, ее накат на берег и перетекание через преграды).

1. Математическая модель одновременного движения оползневой и водной массы. В настоящей работе сход берегового оползня и вызванное им одновременное волновое движение воды изучаются на основе математической модели первого приближения теории двухслойной «мелкой воды» [1, 2]. Использование такой математической модели для описания данного процесса связано со следующими предположениями.

1. Движение оползневой массы можно рассматривать как движение несжимаемой жидкости, при котором специфика движения оползня по сравнению с жидкостью учитывается в так называемом «сухом трении». Такой подход к изучению оползневых явлений предложен в [3].

2. Глубины оползня и воды во время движения остаются на порядок меньше линейных размеров соответственно оползня и озера, что позволяет использовать для описания движения каждого из них в отдельности одну из моделей теории мелкой воды [2, 4, 5]. В настоящей работе применяется первое приближение этой теории, связанное с предположением о гидростатичности давления (его линейной зависимости от глубины) и приводящее в однослойном случае к уравнениям Сен-Венана [4].

3. При входе оползня в воду и его движении под водой оползневая и водная массы смешиваются слабо, что позволяет использовать для описания их совместного движения первое приближение теории двухслойной «мелкой жидкости» [1, 2].

При сделанных предположениях плановые (пространственно-двумерные) дифференциальные уравнения совместного движения оползня и воды в декартовой системе координат (t, x, y) имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{q}) + gh \nabla z = \mathbf{f}; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{Q}) + gh\nabla(Z + \lambda h) = \mathbf{F}_ж - \lambda \mathbf{f} + \mathbf{F}_c, \quad (1.4)$$

где h — глубина воды; $z = Z + h$ — уровень воды; $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ — расход воды; $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{q}/h$ — средняя по вертикали скорость воды; $H, Z = z_d + H, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2), \mathbf{V} = (V_1, V_2) = \mathbf{Q}/H$ — то же для оползня; z_d — отметка дна озера или уровень берега; g — ускорение силы тяжести; $\lambda = r/R < 1$ — отношение плотности воды r к плотности оползня R ; \mathbf{f} — сила трения между водой и оползнем; $\mathbf{F}_ж$ и \mathbf{F}_c — силы «жидкого» и «сухого» трения оползня о дно.

Поскольку система (1.1)–(1.4) является пространственно-двумерной, то все входящие в нее функции зависят от трех независимых переменных: времени t и двух пространственных координат x и y . С учетом этого входящие в левые части уравнений (1.1)–(1.4) дифференциальные операторы $\operatorname{div}, \nabla$ и div на каждую скалярную $z(t, x, y)$ и векторные $\mathbf{q}(t, x, y) = (q_1, q_2), \mathbf{v}(t, x, y) = (v_1, v_2)$ функции действуют по следующим формулам:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}, \quad \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{q}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(v_1 q_1) + \frac{\partial}{\partial y}(v_2 q_1), \frac{\partial}{\partial x}(v_1 q_2) + \frac{\partial}{\partial y}(v_2 q_2) \right).$$

Вектор трения между водой и оползнем \mathbf{f} и вектор «жидкого трения» оползня о дно $\mathbf{F}_ж$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{f} = -kg(\mathbf{v} - \mathbf{V})|\mathbf{v} - \mathbf{V}|, \quad \mathbf{F}_ж = -Kg\mathbf{V}|\mathbf{V}|. \quad (1.5)$$

$$k = n^2/h^{1/3}, \quad K = N^2/H^{1/3}, \quad (1.6)$$

где k, K — определяемые по формулам Маннинга [4] коэффициенты трения; n — коэффициент шероховатости оползня; N — эффективный коэффициент шероховатости между оползнем и дном.

Вектор \mathbf{F}_c «сухого трения» оползня о дно вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}_c = \begin{cases} -\gamma\theta P\mathbf{V}/|\mathbf{V}|, & \mathbf{V} \neq 0, \\ \theta P\Phi/|\Phi|, & \mathbf{V} = 0, \quad |\Phi| > \theta P, \\ \Phi, & \mathbf{V} = 0, \quad |\Phi| < \theta P; \end{cases} \quad (1.7)$$

$$P = (rgh + RgH)/R = g(H + \lambda h), \quad (1.8)$$

где P — удельное давление оползня на дно; $\Phi = gH\nabla(Z + \lambda h)$ — сила, действующая на единицу массы оползня в горизонтальном направлении;

$$\gamma = 1/(1 + a|\mathbf{V}|^2), \quad a = \text{const} > 0; \quad (1.9)$$

$\theta = \operatorname{tg}\beta$ — коэффициент «сухого трения» оползня о дно, β — так называемый [3] угол внутреннего трения в оползне (максимальный угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью, касательной к поверхности оползня, при котором первоначально неподвижный оползень еще остается неподвижным). Введение в (1.7) эмпирического множителя (1.9) связано с предположением о том, что с ростом скорости движения оползня влияние «сухого трения» быстро уменьшается и при достаточно больших скоростях движение оползня становится полностью подобным движению несжимаемой жидкости.

2. Моделирование разрывных решений. Поскольку система (1.1)–(1.4) допускает разрывные решения с прерывными волнами, то на них необходимо задавать соотношения, связывающие параметры течения по обе стороны от фронта волны. Классический способ получения полной системы таких соотношений (условий Гюгонио) предполагает наличие

полной системы базисных законов сохранения [6, 7], допускающей замыкающий закон сохранения, при помощи которого происходит отбор устойчивых разрывных решений [8]. В газовой динамике базисной системой является система законов сохранения массы, импульса и полной энергии, а замыкающим — закон сохранения энтропии [6, 7]. При расчете прерывных волн по уравнениям Сен-Венана первого приближения теории «мелкой воды» базисной принято считать [4, 7] систему законов сохранения массы и полного импульса, а замыкающим — закон сохранения полной энергии.

По аналогии с однослойным случаем в качестве базисных законов сохранения системы (1.1)–(1.4) возьмем законы сохранения массы в слоях (1.1), (1.3) и закон сохранения полного импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{Q} + \lambda \mathbf{q}) + \operatorname{div}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{Q} + \lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}) + \frac{g}{2} \nabla(H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda h H) = \mathbf{F}_ж + \mathbf{F}_c - g(H + \lambda h) \nabla z_0, \quad (2.1)$$

а в качестве замыкающего — закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} E = G, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} + \lambda \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + g(H^2 + \lambda h^2 + 2\lambda h H), \\ E &= [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} + 2gH(H + \lambda h)] \mathbf{V} + \lambda [\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + 2gh(h + H)] \mathbf{v}, \\ G &= 2[(\mathbf{F}_ж + \mathbf{F}_c) \cdot \mathbf{V} + \lambda \mathbf{f} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{v}) - g(\mathbf{Q} + \mathbf{q}) \cdot \nabla z_0] \end{aligned}$$

(в правых частях уравнений (2.1), (2.2) собраны величины, которые остаются непрерывными на поверхности разрыва и, следовательно, не влияют на условия Гюгонио). Однако система базисных законов сохранения (1.1), (1.3), (2.1) неполная — не хватает одного векторного или двух скалярных законов сохранения. Поэтому устойчивые разрывные решения системы (1.1)–(1.4) определим как предельные при $\mu \rightarrow 0$ решения системы, получаемой из (1.1)–(1.4) путем добавления в правые части уравнений импульсов в слоях (1.2), (1.4) искусственных вязкостей

$$\mathbf{w} = \mu [\operatorname{div}(c \nabla)] \mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = \mu [\operatorname{div}(C \nabla)] \mathbf{V}, \quad (2.3)$$

где c и C — положительно-определенные матрицы этих вязкостей (при этом вязкость \mathbf{w} добавляется в уравнение (1.2), а вязкость \mathbf{W} — в (1.4)).

Получаемые таким образом предельные разрывные решения на линиях разрыва будут удовлетворять законам сохранения массы в слоях, закону сохранения полного импульса и в слабом смысле [8] энергетическому неравенству

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} E < 0, \quad (2.4)$$

обеспечивающему их устойчивость. При этом в силу неполноты базисных законов сохранения соотношения на линиях разрыва будут, вообще говоря, зависеть от конкретного вида коэффициентов искусственных вязкостей c и C , входящих в (2.3). Однако, как показали тестовые расчеты, эта зависимость достаточно слабая, и поэтому матрицы вязкостей c и C в приводимой ниже разностной схеме выбирались из чисто вычислительных соображений минимальности схемного размазывания фронта прерывной волны при одновременном сохранении монотонности ее профиля. В наибольшей степени этим требованиям удовлетворяют следующие матрицы коэффициентов:

$$c = \begin{pmatrix} |q_1| & |q_1|/2 \\ |q_2|/2 & |q_2| \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} |Q_1| & |Q_1|/2 \\ |Q_2|/2 & |Q_2| \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

при которых и проводились численные расчеты.

3. Задание начальной области решения, начальных и граничных условий. Система уравнений (1.1)–(1.4) решается в основной прямоугольной области

$$\Pi = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}, \quad (3.1)$$

в которой задаются отметки дна озера или уровень берега $Z_d(x, y)$, а также две (в общем случае многосвязные) подобласти $\Omega_b, \Omega_o \subseteq \Pi$, в первой из которых в начальный момент времени находится вода, а во второй — оползень. С учетом этого в области Ω_b задается начальное значение уровня воды $z_0(x, y)$, а в Ω_o — начальное значение уровня оползня $Z_0(x, y)$. Начальные значения глубин вычисляются по формулам

$$H_0(x, y) = Z_0(x, y) - z_d(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_o, \\ h_0(x, y) = \begin{cases} z_0(x, y) - z_d(x, y) & \forall (x, y) \in \Omega_b \setminus \Omega_o, \\ z_0(x, y) - Z_0(x, y) & \forall (x, y) \in \Omega_b \cap \Omega_o. \end{cases}$$

Начальная скорость воды считается нулевой, т. е. $v_0 = 0$, а оползня — постоянной, т. е. $V_0 = \text{const}$. На тех участках границ внутренних областей Ω_b и Ω_o , которые не пересекаются с границей основной области (3.1), ставятся условия непротекания

$$v \cdot n_b = 0, \quad V \cdot n_o = 0, \quad (3.2)$$

где n_b и n_o — векторы единичной нормали к границам $\partial\Omega_b$ и $\partial\Omega_o$. На участках этих границ, которые лежат на границе $\partial\Pi$ основной области (3.1), либо ставится условие непротекания (3.2), либо (в предположениях докритического вытекания из области и локальной одномерности этого вытекания) задается значение выходящего инварианта, приносимого на границу $\partial\Pi$ вдоль характеристики, приходящей из области Π .

4. Моделирование расчетной области. Система (1.1)–(1.4) решается конечно-разностным методом на неподвижной равномерной прямоугольной сетке. Основная расчетная область представляет собой прямоугольник (3.1), разбитый на некоторое число одинаковых прямоугольных ячеек (рис. 1) со сторонами Δ_1 по оси x и Δ_2 по оси y . Пусть этих ячеек $n_1 = X/\Delta_1$ по оси x и $n_2 = Y/\Delta_2$ по оси y (на рис. 1 $n_1 = 4, n_2 = 3$). Сеточные значения скалярных функций, входящих в систему (1.1)–(1.4), задаются в центрах этих ячеек, т. е. в точках с координатами

$$\{(i + 0,5)\Delta_1, (j + 0,5)\Delta_2\}; \quad 0 \leq i \leq n_1 - 1, \quad 0 \leq j \leq n_2 - 1 \} \quad (4.1)$$

(кружки на рис. 1). Значения векторных функций $f = (f_1, f_2)$ задаются на границах этих ячеек: первые компоненты f_1 — на серединах вертикальных сторон ячеек (крестики на рис. 1), т. е. в точках с координатами

$$\{(i\Delta_1, (j + 0,5)\Delta_2\}; \quad 0 \leq i \leq n_1, \quad 0 \leq j \leq n_2 - 1 \}, \quad (4.2)$$

вторые компоненты f_2 — на серединах горизонтальных сторон ячеек (треугольники на рис. 1), т. е. в точках с координатами

$$\{(i + 0,5)\Delta_1, j\Delta_2\}; \quad 0 \leq i \leq n_1 - 1, \quad 0 \leq j \leq n_2 \}. \quad (4.3)$$

Движение свободных границ жидкости и оползня внутри основной неподвижной расчетной области (3.1) моделируется на основе метода «фиктивных ячеек» [9]. При этом для воды и оползня вводятся вспомогательные массивы k_{ij}^n и K_{ij}^n , которые принимают всего два различных значения ± 1 в центре каждой расчетной ячейки:

$$\alpha_{ij} = \{(x, y) : i\Delta_1 \leq x \leq (i + 1)\Delta_1, j\Delta_2 \leq y \leq (j + 1)\Delta_2\} \subset \Pi.$$

С помощью этих массивов на каждом n -м временном слое формируются внутренние расчетные области

$$\Omega_b^n = \{\alpha_{ij} \subset \Pi : k_{ij}^n = 1\}, \quad \Omega_o^n = \{\alpha_{ij} \subset \Pi : K_{ij}^n = 1\}.$$

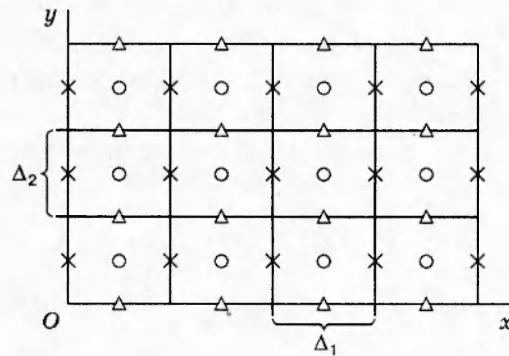


Рис. 1

Их изменение опишем на примере области Ω_B^n , в которой находится вода. Для этого введем малое число $\varepsilon > 0$ и зададим

$$h_{ij}^0 = h(0, (i + 0,5)\Delta_1, (j + 0,5)\Delta_2) = \varepsilon \quad \forall k_{ij}^0 = -1 \quad (\forall \alpha_{ij} \notin \Omega_B^0),$$

т. е. на берег в начальный момент времени искусственно «нальем ε -слой воды». Если в результате расчета в некоторой ячейке $\alpha_{ij} \subset \Omega_B^n$ оказалось, что $h_{ij}^{n+1} \leq \varepsilon$, то в ней полагается $h_{ij}^{n+1} = \varepsilon$. Если при этом в каждой ячейке, смежной с ячейкой α_{ij} (т. е. имеющей с ней общую сторону), оказалось, что $h^{n+1} = \varepsilon$ или $z^{n+1} \leq z_{ij}^{n+1}$, то такая ячейка α_{ij} на $(n + 1)$ -м временном слое становится «нерабочей» (или «фиктивной»), т. е. $\alpha_{ij} \notin \Omega_B^{n+1}$ ($k_{ij}^{n+1} = -1$). Наоборот, если в некоторой ячейке, смежной с «нерабочей» на n -м временном слое ячейкой $\alpha_{ij} \notin \Omega_B^n$ ($k_{ij}^n = -1$), оказалось, что одновременно и $h^{n+1} > \varepsilon$, и $z^{n+1} > z_{ij}^{n+1}$, то такая ячейка α_{ij} на $(n + 1)$ -м временном слое становится «рабочей», т. е. $\alpha_{ij} \subset \Omega_B^{n+1}$ ($k_{ij}^{n+1} = 1$).

Изменение внутренней расчетной области Ω_0^n , в которой находится оползень, происходит аналогично.

5. Разностная схема. В качестве разностной схемы, аппроксимирующей систему (1.1)–(1.4), выбран аналог известной в газовой динамике схемы «крест» [10], при записи которой использованы следующие сокращенные обозначения, частично заимствованные из [11]: $f = f_{ij}^n$, где индекс n означает n -й временной слой, а пара индексов (i, j) означает узел (4.1) для скалярных величин, узел (4.2) для первой компоненты, узел (4.3) для второй компоненты векторных величин и, наконец, узел $\{(i\Delta_1, j\Delta_2); 0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2\}$ для вспомогательных величин u и U , определяемых по формулам

$$u = q_1(y)q_2(x)/h^*, \quad U = Q_1(y)Q_2(x)/H^*,$$

в которых $f(x) = (f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n)/2$, $f(y) = (f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n)/2$, $f^* = (f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n + f_{i,j-1}^n + f_{i-1,j-1}^n)/4$.

Для конечно-разностных отношений используются следующие сокращения: $f_t = (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)/\tau_n$, $f_{t-} = (f_{i,j}^b - f_{i,j}^n)/\tau_n$, $f_{t+} = (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^b)/\tau_n$, $f_{\bar{x}} = (f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n)/\Delta_1$, $f_{\bar{x}} = (f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n)/\Delta_1$, $f_{2x} = (f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n)/(2\Delta_1)$, $f_y = (f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n)/\Delta_2$, $f_{\bar{y}} = (f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n)/\Delta_2$, $f_{2y} = (f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n)/(2\Delta_2)$, где τ_n — шаг схемы по времени на n -м временном слое; $f_{i,j}^b$ — вспомогательное значение сеточной функции $f_{i,j}^n$.

Вычисления на каждом новом $(n + 1)$ -м временном слое происходят в четыре этапа.

На первом этапе по явной схеме вычисляются глубины $h_{i,j}^{n+1}$, $H_{i,j}^{n+1}$ и уровни $z_{i,j}^{n+1}$, $z_{i,j}^{n+1}$

$$h_t + q_{1x} + q_{2y} = 0, \quad H_t + Q_{1x} + Q_{2y} = 0, \quad Z^+ = x_d + H^+, \quad z^+ = Z^+ + h^+,$$

где $f^+ = f_{i,j}^{n+1}$. При записи следующих трех этапов приведены разностные уравнения только для x -компонент скоростей и расходов (уравнения для y -компонент записываются аналогично). Поэтому нижний индекс 1 при записи первых компонент расходов, скоростей и вязкостей для краткости опущен.

На втором этапе по полуявной схеме вычисляются вспомогательные значения расходов $q_{i,j}^b$ и $Q_{i,j}^b$ без учета трения:

$$q_{t-} + (qv)_{2x} + u_y + gh_{(x)}^+ Z_{\bar{x}}^+ = w, \quad Q_{t-} + (QV)_{2x} + U_y + gH_{(x)}^+ (Z^+ + \lambda h^+)_{\bar{x}} = W,$$

где w и W — линейные искусственные вязкости, которые с учетом (2.3), (2.5) определяются по формулам

$$w = C_1 \Delta_1 \left[(|q_{(x)}|v_{\bar{x}})_x + \left(\frac{1}{2} |q_{(y)}|v_{\bar{y}} \right)_y \right], \quad W = C_2 \Delta_1 \left[(|Q_{(x)}|V_{\bar{x}})_x + \left(\frac{1}{2} |Q_{(y)}|V_{\bar{y}} \right)_y \right]$$

($C_1, C_2 = \text{const}$).

На третьем этапе по неявной схеме вычисляются окончательные значения расходов $q_{i,j}^{n+1}$ и $Q_{i,j}^{n+1}$ с учетом трения:

$$q_{t+} = f^+, \quad Q_{t+} = F_{\bar{x}}^+ - \lambda f^+ + F_{\bar{c}}^+, \quad (5.1)$$

где согласно (1.5)–(1.8)

$$f^+ = -kg(q^+/h_{(x)}^+ - Q^+/H_{(x)}^+)|\mathbf{v} - \mathbf{V}|, \quad F_{\bar{x}}^+ = -KgQ^+|\mathbf{V}|/H_{(x)}^+, \quad (5.2)$$

$$F_{\bar{c}}^+ = \gamma\theta g(H^+ + \lambda h^+)Q^+/(H_{(x)}^+|\mathbf{V}|), \quad \mathbf{V} \neq 0.$$

Уравнения (5.1) с учетом (5.2) в каждом узле i, j представляют собой систему из двух уравнений относительно двух неизвестных q^+ и Q^+ , в результате решения которой находятся значения расходов на $(n+1)$ -м временном слое.

На последнем, четвертом этапе вычисляются скорости $v_{i,j}^{n+1}$ и $\bar{v}_{i,j}^{n+1}$ по формулам

$$v^+ = q^+/h_{(x)}^+, \quad V^+ = Q^+/H_{(x)}^+$$

и определяется новый шаг по времени

$$\tau_{n+1} = A\Delta / \max_{i,j} \max(\sqrt{gh^+} + |\mathbf{v}^+|, \sqrt{gH^+} + |\mathbf{V}^+|), \quad (5.3)$$

где $A = \text{const} < 1/2$ — коэффициент запаса; $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$.

Приведенная выше разностная схема с учетом «неявного» введения трения (5.1) устойчива по Куранту (5.3) в линейном приближении. Она допускает явную реализацию и со вторым порядком по пространству аппроксимирует законы сохранения массы в слоях (1.1), (1.3). В отсутствие искусственной вязкости ($\mathbf{w} = \mathbf{W} = 0$) она со вторым порядком по пространству аппроксимирует также и законы сохранения импульса (1.2), (1.4).

Предложенная схема является почти консервативной в том смысле, что она консервативным образом [12] аппроксимирует законы сохранения массы в слоях (1.1), (1.3), закон сохранения полного импульса (2.1), а также с точностью до $o(\Delta)$ удовлетворяет разностному аналогу энергетического неравенства (2.4). В силу этого ее предельные разрывные решения на ударных волнах удовлетворяют законам сохранения массы в слоях и полного импульса, а также устойчивы в смысле выполнения энергетического неравенства (2.4).

Необходимо также отметить, что построенная схема является одной из наиболее эффективных простейших схем первого порядка аппроксимации для сквозного расчета разрывных решений системы (1.1)–(1.4). При оптимальном выборе коэффициентов искусственных вязкостей C_1 и C_2 она размывает разрывы на 3–4 пространственных интервала

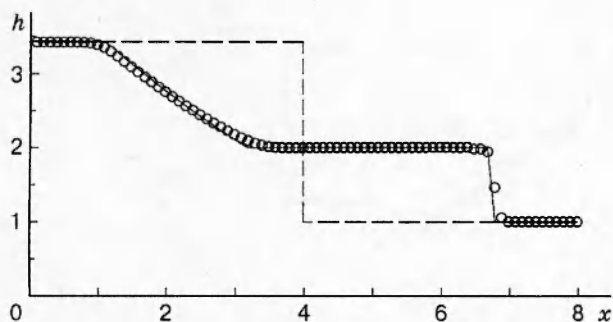


Рис. 2

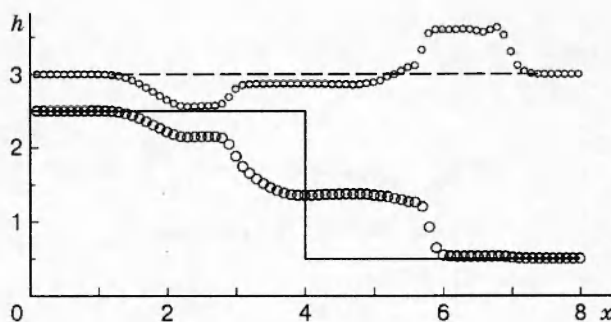


Рис. 3

без заметных численных осцилляций. Основным ее недостатком (как и любой другой схемы первого порядка аппроксимации) является зависимость ширины размазывания фронта прерывной волны от ее интенсивности (эта ширина убывает пропорционально росту интенсивности волны). Поэтому для каждого конкретного расчета оптимальный коэффициент вязкости будет своим, и его необходимо выбирать специально.

6. Тестовые расчеты. В данном пункте приведены тестовые расчеты пространственно-одномерных течений по разностной схеме, предложенной выше. В первом примере (рис. 2) рассматривается течение однослойной жидкости, а во втором и третьем (рис. 3 и 4) — двухслойной. В первых двух примерах течение происходит над горизонтальным дном без учета трения. Во всех расчетах полагалось $\Delta = 0,1$; $A = 0,4$; $g = 10$.

На рис. 2 на момент времени $T = 0,5$ приведены результаты расчета классической тестовой задачи о разрушении плотины [4], т. е. задачи распада начального разрыва глыбины

$$h(0, x) = \begin{cases} 3,4122 & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 1 & \text{при } 4 < x \leq 8 \end{cases} \quad (6.1)$$

в покоящейся воде, в результате точного решения которой получается прерывная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью, и волна понижения. Это точное решение показано на рис. 2 сплошной линией, соответствующее ему разностное решение — кружками. Штриховой линией показана начальная поверхность воды, задаваемая функцией (6.1).

На рис. 3 на момент времени $T = 0,5$ приведены результаты расчета задачи распада начального разрыва границы раздела слоев покоящейся жидкости

$$z(0, x) = 3, \quad q(0, x) = Q(0, x) = 0, \quad Z(0, x) = \begin{cases} 2,5 & \text{при } 0 \leq x \leq 4, \\ 0,5 & \text{при } 4 < x \leq 8. \end{cases} \quad (6.2)$$

Крупными кружками изображена получаемая граница раздела слоев, а мелкими — свободная поверхность верхнего слоя. В расчете полагалось $\lambda = 0,3$; $C_1 = 1$; $C_2 = 0,3$. Сплошной линией показана начальная граница раздела слоев (6.2) двухслойной жидкости, а штриховой — невозмущенная поверхность верхнего слоя.

На рис. 3 видно, что в результате численного решения этой задачи в верхнем слое образуются две бегущие в разных направлениях волны: волна повышения, распространяющаяся вправо, и волна понижения, распространяющаяся влево. Эти волны имеют приблизительно равные амплитуды и скорости.

На рис. 4 для трех последовательных моментов времени приведены результаты расчета, моделирующего в одномерной постановке сход в воду берегового оползня, образование и распространение возникающей при этом прерывной водной волны, а также ее накат на

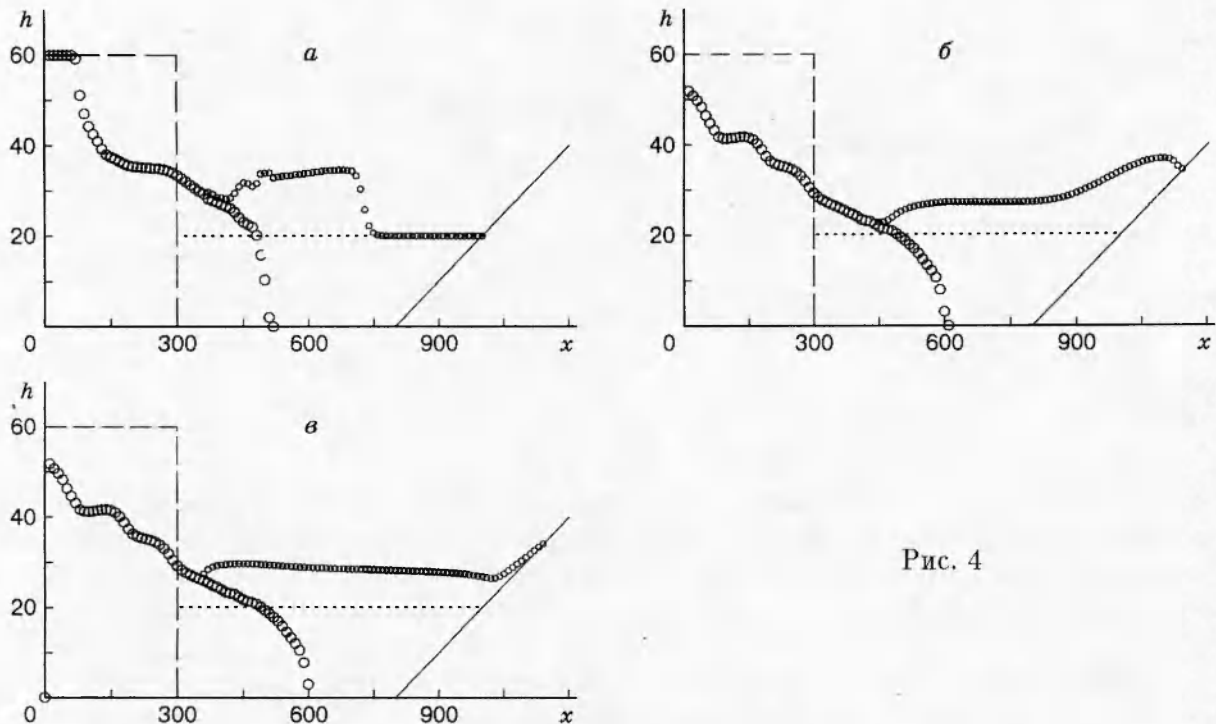


Рис. 4

противоположный наклонный берег. Сплошной линией изображено дно, штриховой — начальное положение оползня, пунктирной — начальное положение свободной поверхности воды. Крупными кружками показана расчетная поверхность оползня, а мелкими — расчетная свободная поверхность воды. Масштаб на рис. 4 дан в метрах, причем он различен по разным осям: по оси Ox он приблизительно в 13 раз мельче, чем по оси Oh . В этом расчете полагалось $\lambda = 0,3$; $n = N = 0,25$; $a = 0,2$; $\theta = 0,3$; $C_1 = 7,5$; $C_2 = 15$.

На рис. 4,а при $T = 20$ с показан начальный этап входа оползня в воду и образование прерывной водной волны, на рис. 4,б при $T = 60$ с изображен момент максимального заплеска водной волны на противоположный наклонный берег, на рис. 4,в при $T = 100$ с водная волна, отразившись от наклонного берега в правой части рисунка, начинает натекать на неподвижную к этому времени поверхность сошедшего оползня. При этом учет «сухого трения» (1.7) ($\theta \neq 0$) приводит к тому, что к моменту установления поверхность оползня не является горизонтальной.

В заключение отметим, что в [13, 14] изложенный в данной работе численный алгоритм был применен для планового расчета формирования, распространения и перелива через Усойский завал прерывной водной волны, возникающей при сходе берегового оползня в Сарезское озеро (Таджикистан).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Модели двухслойной «мелкой воды» // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
2. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. Григорян С. С., Нилов Н. Н., Остроумов А. В., Федоренко В. С. Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов // Инж. геология. 1983. № 6. С. 61–72.
4. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

5. **Атавин А. А., Шугрин С. М.** О дифференциальных уравнениях теории «мелкой воды» // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 70. С. 25–53.
6. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.
8. **Лак Р. Д.** Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1972.
9. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982.
10. **Трошиев В. Е.** О дивергентности схемы «крест» численного решения уравнений газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1970. Т. 1, № 5. С. 79–91.
11. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
12. **Остапенко В. В.** Об эквивалентных определениях понятия консервативности для конечно-разностных схем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1114–1128.
13. **Остапенко В. В.** Численное моделирование волновых течений в Сарезском озере, вызванных катастрофическим обрушением берегового оползня // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1994. Т. 3. С. 116–125.
14. **Ostapenko V. V.** Numerical modeling of wave flows in Sares lake caused by hazardous sliding of lakeside landslide // Proc. Intern. Conf. AMCA-95, Novosibirsk, 20–24 June, 1995. Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. P. 212–217.

Поступила в редакцию 31/VII 1997 г.
