

# КОНВЕКТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

*Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Т. П. Любимова*

(Пермь)

Рассматривается конвективная устойчивость неньютоновской (нелинейно-вязкой) жидкости в плоском вертикальном канале. Для случая кусочно-линейной и степенной реологических характеристик найдено решение нелинейной краевой задачи о плоскопараллельной стационарной конвекции. Обсуждается вопрос об устойчивости равновесия и стационарных движений.

1. В работах [1, 2] экспериментально исследовалось возникновение конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости. В [1] предпринята попытка с помощью энергетического метода оценить критическое число Рэлея для степенных жидкостей. Эту попытку следует считать неудачной. Если начальная вязкость равна нулю или бесконечности, как это имеет место в степенной модели, то конечное критическое число Рэлея, определяющее границу устойчивости относительно малых возмущений, отсутствует: равновесие по отношению к малым возмущениям либо устойчиво при всех числах Рэлея (псевдопластики), либо неустойчиво при сколь угодно малом числе Рэлея (дилатантные жидкости). Для суждения об устойчивости следует рассматривать конечно-амплитудные возмущения. Как отмечено в [3], энергетический метод в работе [1] применен некорректно.

В случае модели с конечной начальной вязкостью понятие критического числа Рэлея оправдано. Измерение критического градиента температуры в этом случае, как показано в [2], дает достаточно точный метод определения начальной вязкости.

Пусть плоский бесконечный слой неньютоновской жидкости, ограниченный вертикальными плоскостями  $x = \pm h$ , подогревается снизу. Рассмотрим стационарное плоскопараллельное конвективное движение, при котором отлична от нуля только вертикальная составляющая скорости. В этом случае (ось  $z$  направлена вертикально вверх)

$$(1.1) \quad v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x)$$

а распределения температуры  $T$ , напряжения  $\tau$  и давления  $p$  имеют вид

$$(1.2) \quad T = -Az + \theta(x), \quad \tau = \tau(x), \quad p = p(z)$$

Здесь  $A$  — постоянный вертикальный градиент температуры, соответствующий механическому равновесию.

Из уравнений конвекции, записанных в приближениях Буссинеска, получаются уравнения для функций  $v$ ,  $\theta$ ,  $\tau$ ,  $p$

$$(1.3) \quad \frac{1}{\rho} \tau' + g\beta\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + g\beta Az = C$$

$$\chi\theta'' + Av = 0$$

Здесь  $\rho$  — средняя плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta$  и  $\chi$  — коэффициенты теплового расширения и температуропроводности,  $C$  — постоянная разделения переменных. Штрих означает дифференцирование по  $x$ . К уравнениям (1.3) следует добавить реологическое соотношение, связывающее напряжение сдвига с градиентом скорости

$$(1.4) \quad \tau = \tau(v')$$

На границах канала скорость обращается в нуль, и поддерживается линейное по вертикали распределение температуры; кроме того, предполагается выполненным условие замкнутости конвективного течения, означающее равенство нулю расхода через любое сечение. Таким образом, имеем

$$(1.5) \quad v(\pm h) = \theta(\pm h) = 0, \quad \int_{-h}^h v dx = 0$$

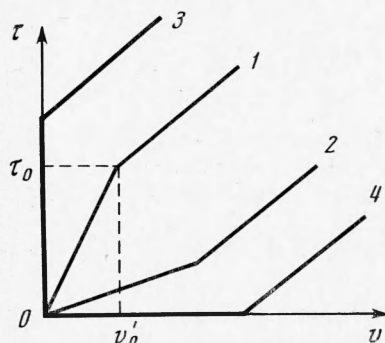
Далее рассматривается стационарное движение, соответствующее нижнему уровню неустойчивости равновесия. В этом движении профили скорости  $v$  и температуры  $\theta$  являются нечетными функциями относительно середины слоя  $x = 0$ ; постоянная разделения  $C = 0$ , условие замкнутости выполнено.

Сформулированная задача имеет тривиальное решение ( $v = \theta = \tau = 0$ ), соответствующее равновесию (устойчивому или неустойчивому в зависимости от соотношения между параметрами) подогреваемой снизу жидкости. При определенных условиях возможны нетривиальные решения, которые рассматриваются в дальнейшем.

В случае ньютоновской жидкости, когда связь (1.4) является линейной, нетривиальные решения существуют лишь при определенных значениях градиента температуры (числа Рэлея), образующих дискретный спектр (см. [4]). Эти характеристические значения градиента являются в то же время критическими с точки зрения устойчивости равновесия. Амплитуда характеристических движений оказывается неопределенной. В обсуждаемом случае неньютоновской жидкости зависимость напряжения от градиента скорости (1.4) нелинейна. Это приводит к качественным отличиям. Стационарные движения существуют не в изолированных точках спектра, а занимают некоторый интервал значений градиента температуры (числа Рэлея). Амплитуда движений в силу нелинейности краевой задачи оказывается определенной.

2. Рассмотрим жидкость с кусочно-линейной реологической характеристикой (фиг. 1). Зависимость  $\tau(v')$  имеет вид

$$(2.1) \quad \tau = \begin{cases} \mu_1 v', & -\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ \tau_0 + \mu_2(v' - v_0'), & \tau \geq \tau_0 \\ -\tau_0 + \mu_2(v' + v_0'), & \tau \leq -\tau_0 \end{cases}$$



Фиг. 1

Принятая характеристика содержит три независимых параметра — начальную и предельную вязкости  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и предельное касательное напря-

жение  $\tau_0$  ( $v_0' = \tau_0/\mu_1$ ). Постоянная на каждом из участков вязкость скачком меняется при  $\tau = \pm \tau_0$ . Кусочно-линейная характеристика может рассматриваться как аппроксимация для описания нелинейно-вязких жидкостей с конечными значениями начальной и предельной вязкости. Из (2.1) можно получить зависимости, соответствующие псевдопластическому ( $\mu_1 > \mu_2$ ) и дилатантному ( $\mu_1 < \mu_2$ ) поведению (кривые 1 и 2 на фиг. 1). В пределах получаются жидкость Бингама ( $\mu_1 = \infty$ , кривая 3) и предельный случай дилатантной жидкости с нулевой начальной вязкостью ( $\mu_1 = 0$ , кривая 4). Ньютоновской жидкости соответствует  $\mu_1 = \mu_2$ .

Имея в виду характеристику (2.1), запишем уравнения плоскопараллельной конвекции в безразмерной форме. Выберем единицы  $h$  — расстояния,  $\chi/h$  — скорости,  $Ah$  — температуры,  $\mu_2\chi/h^2$  — напряжения. Уравнения (1.3), реологическое соотношение (2.1) и граничные условия (1.5) запишутся тогда в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tau' + R\theta &= 0, & \theta'' + v &= 0 \\ \tau &= \begin{cases} \mu v', & |\tau| \leq B \\ B(1 - 1/\mu) \operatorname{sign} v' + v', & |\tau| \geq B \end{cases} \\ v(\pm 1) = \theta(\pm 1) &= 0, & \int_{-1}^1 v dx &= 0 \end{aligned}$$

Краевая задача (2.2) содержит три безразмерных параметра — число Рэлея  $R$ , определенное по вязкости  $\mu_2$ ; безразмерное предельное напряжение  $B$  и отношение вязкостей  $\mu$

$$(2.3) \quad R = \frac{\rho g \beta A h^4}{\mu_2 \chi}, \quad B = \frac{\tau_0 h^2}{\mu_2 \chi}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Основное стационарное движение соответствует нечетному относительно точки  $x=0$  решению задачи (2.2). Ввиду нечетности решения достаточно рассмотреть область  $0 \leq x \leq 1$ . В этой области можно выделить среднюю зону  $a \leq x \leq b$  (индекс 0) с малым градиентом скорости и вязкостью  $\mu_1$ ; зону  $0 \leq x \leq a$  (индекс 1), в которой  $\tau > \tau_0$ , а градиент скорости положителен и по величине больше предельного, и зону  $b \leq x \leq 1$  (индекс 2) с отрицательным градиентом скорости и  $\tau < -\tau_0$  (в зонах 1 и 2 имеет место вязкое течение с вязкостью  $\mu_2$ ).

На каждом из участков можно записать общее решение уравнений (2.2). С учетом обращения в нуль скорости и температуры в точках  $x=0$  и  $x=1$  имеем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} v_1 &= D_1 \sin rx + D_2 \operatorname{sh} rx \\ \theta_1 &= r^{-2} (D_1 \sin rx - D_2 \operatorname{sh} rx) \\ \tau_1 &= B(1 - \mu^{-1}) + r(D_1 \cos rx + D_2 \operatorname{ch} rx) \\ v_2 &= C_1 \sin r(1-x) + C_2 \operatorname{sh} r(1-x) \\ \theta_2 &= r^{-2} [C_1 \sin r(1-x) - C_2 \operatorname{sh} r(1-x)] \\ \tau_2 &= -B(1 - \mu^{-1}) - r[C_1 \cos r(1-x) + C_2 \operatorname{ch} r(1-x)] \\ v_0 &= E_1 \sin sx + E_2 \cos sx + E_3 \operatorname{sh} sx + E_4 \operatorname{ch} sx \\ \theta_0 &= s^{-2} (E_1 \sin sx + E_2 \cos sx - E_3 \operatorname{sh} sx - E_4 \operatorname{ch} sx) \\ \tau_0 &= \mu s (E_1 \cos sx - E_2 \sin sx + E_3 \operatorname{ch} sx + E_4 \operatorname{sh} sx) \end{aligned}$$

где  $r = R^{1/4}$ ,  $s = (R/\mu)^{1/4}$ .

Для нахождения восьми произвольных постоянных и неизвестных параметров  $a$  и  $b$ , определяющих положения границ вязких зон, имеем условия сшивания в точках  $a$  и  $b$  (непрерывность скорости, температуры, теплового потока и напряжения), а также условия, определяющие положение границ зон

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v_1(a) &= v_0(a), \quad \theta_1(a) = \theta_0(a), \quad \theta_1'(a) = \theta_0'(a) \\ \tau_1(a) &= \tau_0(a), \quad \tau_0(a) = B \\ v_0(b) &= v_2(b), \quad \theta_0(b) = \theta_2(b), \quad \theta_0'(b) = \theta_2'(b) \\ \tau_0(b) &= \tau_2(b), \quad \tau_0(b) = -B \end{aligned}$$

Из анализа соотношений (2.5) следует, что все профили симметричны относительно точки  $x = 1/2$ , в частности  $a = 1-b$ . Постоянные, входящие в (2.4), равны

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{B}{\mu r \delta \cos ra} [2\mu^{3/4} + (1 + \sqrt{\mu}) \operatorname{th} ra \operatorname{th} \varphi + (1 - \sqrt{\mu}) \operatorname{th} ra \operatorname{tg} \varphi] \\ D_2 &= \frac{B}{\mu r \delta \operatorname{ch} ra} [-2\mu^{3/4} + (1 + \sqrt{\mu}) \operatorname{tg} ra \operatorname{tg} \varphi + (1 - \sqrt{\mu}) \operatorname{tg} ra \operatorname{th} \varphi] \\ E_1 &= \frac{B \sin s/2}{\mu r \delta \cos \varphi} [2 \operatorname{tg} ra \operatorname{th} ra \operatorname{th} \varphi + \mu^{1/4} (1 + \sqrt{\mu}) \operatorname{tg} ra + \\ &\quad + \mu^{1/4} (1 - \sqrt{\mu}) \operatorname{th} ra] \\ E_3 &= \frac{B \operatorname{sh} s/2}{\mu r \delta \operatorname{ch} \varphi} [-2 \operatorname{tg} ra \operatorname{th} ra \operatorname{tg} \varphi + \mu^{1/4} (1 + \sqrt{\mu}) \operatorname{th} ra + \\ &\quad + \mu^{1/4} (1 - \sqrt{\mu}) \operatorname{tg} ra] \\ E_2 &= \operatorname{ctg} \frac{s}{2} E_1, \quad E_4 = -\operatorname{cth} \frac{s}{2} E_3, \quad C_1 = D_1, \quad C_2 = D_2 \\ \delta &= (1 + \sqrt{\mu}) (\operatorname{tg} ra \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{th} ra \operatorname{th} \varphi) + \\ &\quad + (1 - \sqrt{\mu}) (\operatorname{th} ra \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} ra \operatorname{th} \varphi) \\ \varphi &= s (1/2 - a) \end{aligned}$$

Соотношение, определяющее параметр  $a$  как функцию  $R$  и  $\mu$ , имеет вид

$$(2.6) \quad (1 + \sqrt{\mu})^2 (\operatorname{tg} ra \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{th} ra \operatorname{th} \varphi) + (1 - \sqrt{\mu})^2 (\operatorname{tg} ra \operatorname{th} \varphi - \operatorname{th} ra \operatorname{tg} \varphi) + 4\mu^{1/4} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{th} \varphi \operatorname{tg} ra \operatorname{th} ra - 4\mu^{3/4} = 0$$

Приведем формулу для максимальной скорости потока

$$(2.7) \quad \begin{aligned} v_m = v_0 \left( \frac{1}{2} \right) &= \frac{B}{\mu r \delta \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi} [2 \operatorname{tg} ra \operatorname{th} ra (\operatorname{sh} \varphi + \sin \varphi) + \\ &\quad + \mu^{1/4} (1 + \sqrt{\mu}) (\operatorname{tg} ra \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{th} ra \cos \varphi) + \mu^{1/4} (1 - \sqrt{\mu}) \times \\ &\quad \times (\operatorname{th} ra \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{tg} ra \cos \varphi)] \end{aligned}$$

3. Результаты численного решения трансцендентного уравнения (2.6) представлены на фиг. 2, где изображено семейство кривых  $a(r)$  для различных значений отношения вязкостей  $\mu$ . На фиг. 3 и 4 приведена зависимость амплитуды скорости от  $r$ . Цифры около кривых 0, 1, 2, ..., 11 соответствуют значениям  $\mu = 0, 10^{-4}, 10^{-2}, 0.1, 0.5, 1, 1.2, 2, 4, 8, 16, \infty$ .

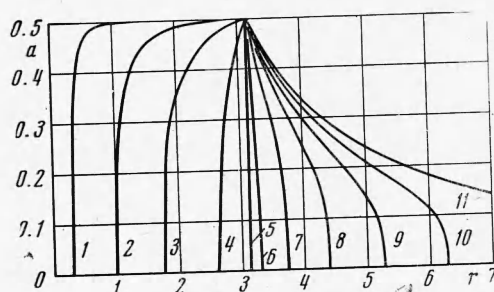
Рассмотрим псевдопластические жидкости ( $\mu = \mu_1 / \mu_2 > 1$ ). Анализ соотношений (2.6), (2.7) показывает, что в этом случае нетривиальное решение, соответствующее плоскопараллельной конвекции, существует в ограниченном промежутке чисел Рэлея  $\pi^4 < R < \mu \pi^4$ , т. е.  $\pi < r < \mu^{1/4} \pi$ .

Точка  $r = \mu^{1/4}\pi$  является критической в смысле устойчивости равновесия относительно малых возмущений. Малым возмущениям равновесия соответствуют малые  $v'$ , т. е. малые напряжения  $\tau$ . Такие возмущения развиваются так же, как в ньютоновской жидкости с коэффициентом вязкости  $\mu_1$  (начальный участок реологической кривой). Кризис равновесия относительно этих возмущений определяется условием  $\rho g B A h^4 / \mu_1 \chi = \pi^4$ .

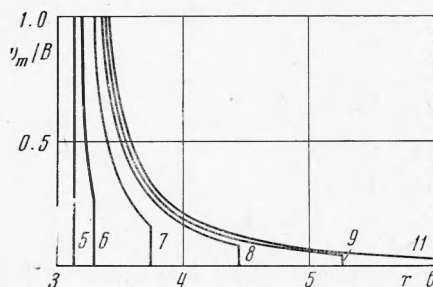
Переходя к параметрам  $R$  и  $\mu$ , запишем это условие в виде  $R/\mu = \pi^4$ , т. е.  $r = \mu^{1/4}\pi$ . При  $r < \mu^{1/4}\pi$  равновесие устойчиво относительно малых возмущений; при  $r > \mu^{1/4}\pi$  равновесие неустойчиво.

В области  $\pi < r < \mu^{1/4}\pi$  кроме равновесия имеется также нетривиальное конечно-амплитудное решение с определенными значениями параметров  $a$  и  $v_m$ . При увеличении  $r$  в этой области параметр  $a$ , как видно из фиг. 2, монотонно убывает от  $1/2$  до 0.

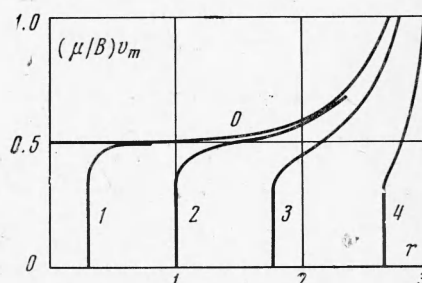
Амплитуда  $v_m$  пропорциональна безразмерному предельному напряжению  $B$ . С увеличением  $r$  в области  $\pi < r < \mu^{1/4}\pi$  амплитуда  $v_m$  убывает от бесконечности до некоторого конечного значения  $B/\mu$ ; в точке  $r = \mu^{1/4}\pi$  амплитуда испытывает скачок.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из (2.6), (2.7) можно получить асимптотические формулы для  $a$  и  $v_m$ . Вблизи нижней критической точки  $r = \pi$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\pi(\mu-1)}(r - \pi) + \dots, \quad v_m = \frac{B(\mu-1)}{\pi\mu(r-\pi)} + \dots$$

Вблизи верхней критической точки  $r = \mu^{1/4}\pi$

$$a \cong \left[ \frac{6}{\pi^2(\mu-1)} \left( 1 - \frac{r}{\mu^{1/4}\pi} \right) \right]^{1/2}$$

Найденное конечно-амплитудное стационарное решение является неустойчивым. При  $r < \mu^{1/4}\pi$  равновесие устойчиво относительно малых возмущений. Если внести в равновесие возмущение конечной амплитуды, выходящее достаточно далеко за пределы начального участка реологической кривой, то в течении образуются слои с меньшей вязкостью  $\mu_2$ . Это означает понижение эффективной вязкости системы, в результате чего возмущение достаточно большой амплитуды окажется нарастающим. Если



амплитуда меньше  $v_m$ , определяемого формулой (2.7), то возмущение затухает; если амплитуда превышает  $v_m$ , то такое возмущение неограниченно нарастает.

Итак, в случае  $\mu > 1$  равновесие устойчиво по отношению к малым возмущениям при  $r < \mu^{1/4}\pi$  и неустойчиво при  $r > \mu^{1/4}\pi$ . В области  $\pi < r < \mu^{1/4}\pi$  равновесие неустойчиво относительно конечных возмущений, амплитуда которых больше  $v_m$  («жесткое» возбуждение). При  $r < \pi$  равновесие устойчиво по отношению к возмущениям любой амплитуды.

При  $\mu > 1$  устойчивые стационарные движения конечной амплитуды отсутствуют. Это связано со спецификой геометрии решаемой задачи — рассматриваются плоскопараллельные движения в бесконечном слое. В этом случае нелинейные конвективные члены в уравнениях движения и теплопроводности  $(v\nabla)v$  и  $v\nabla\theta$  тождественно исчезают, а нелинейность, связанная с реологической кривой  $\tau(v')$ , имеет при  $\mu > 1$  дестабилизирующий характер.

При увеличении  $\mu$  число Рэлея, определяющее верхнюю критическую точку, возрастает и стремится к бесконечности при  $\mu \rightarrow \infty$ . Этот предельный случай соответствует жидкости Бингама ( $\mu_1 = \infty$ ,  $\mu_2$  конечно). Равновесие при всех  $R$  устойчиво относительно малых возмущений. Возможно лишь жесткое возбуждение конвекции при  $R > \pi^4$ ; критическая амплитуда определяется значением

$$v_m = \frac{24B}{r^3(1-2a)^2} \frac{1}{3(\operatorname{tg} ra + \operatorname{th} ra) + r(1-2a)}$$

Граница вязкой и пластической зон течения  $a$  находится из уравнения

$$r(1-2a)(\operatorname{tg} ra - \operatorname{th} ra) - 4 = 0$$

Эти формулы получаются из (2.6), (2.7) в пределе  $\mu \rightarrow \infty$  и совпадают с полученными ранее [5].

4. Рассмотрим случай дилатантной жидкости ( $\mu = \mu_1/\mu_2 < 1$ ). Граница зон  $a$  и стационарная амплитуда  $v_m$  в зависимости от числа Рэлея представлены на фиг. 2 и 4. Как и в псевдопластическом случае, точка  $r = \mu^{1/4}\pi$  является критической в смысле устойчивости равновесия относительно малых возмущений; при  $r > \mu^{1/4}\pi$  равновесие неустойчиво. Стационарное движение конечной амплитуды существует в промежутке  $\mu^{1/4}\pi < r < \pi$ . В точке  $r = \mu^{1/4}\pi$  скачком возникает стационарное движение с амплитудой  $v_m = B/\pi\mu$ , и с увеличением  $r$  амплитуда  $v_m$  монотонно возрастает, стремясь к бесконечности при  $r \rightarrow \pi$ . Асимптотические формулы (3.1), (3.2) сохраняются и в случае  $\mu < 1$ .

В случае  $\mu < 1$  стационарное плоскопараллельное движение конечной амплитуды в области  $\mu^{1/4}\pi < r < \pi$  является устойчивым. Малые возмущения равновесия в этой области нарастают, и при достижении предельного напряжения в течении возникают слои с большей вязкостью. Повышение эффективной вязкости системы приводит к стабилизации возмущений и установлению стационарной амплитуды  $v_m$ . При  $r > \pi$  устойчивого стационарного плоскопараллельного движения быть не может, поскольку при таких числах Рэлея малые возмущения равновесия неограниченно возрастают даже в случае ньютоновской жидкости с большей вязкостью  $\mu_2$ .

Случай предельной дилатантной характеристики (кривая 4 на фиг. 1) получается при  $\mu \rightarrow 0$  и  $B \rightarrow 0$  (отношение  $B/\mu$ , представляющее собой безразмерное значение предельного градиента скорости  $v_0'$ , остается конечным). Из общих формул (2.6), (2.7) получаем

$$a = \frac{1}{2}, \quad v_m = \frac{B}{2\mu r} \left( \operatorname{tg} \frac{r}{2} + \operatorname{th} \frac{r}{2} \right)$$

В этом предельном случае равновесие неустойчиво при сколь угодно малом градиенте температуры, и устойчивое стационарное движение существует в области  $0 < r < \pi$ .

5. Рассмотрим жидкость, поведение которой соответствует степенному реологическому закону

$$(5.1) \quad \tau = k |v'|^n \operatorname{sign} v'$$

где  $n$  — показатель,  $k$  — коэффициент консистентности. Для определения стационарного плоскопараллельного движения в слое степенной жидкости следует решать задачу (1.3) — (1.5) с реологическим законом (5.1).

Выберем единицы  $h$  — расстояния,  $(\chi/h) R^{1/(n-1)}$  — скорости,  $AhR^{1/(n-1)}$  — температуры, где  $R = \rho g \beta A h^{2n+2} / k \chi^n$  — модифицированное число Рэлея.

В безразмерных переменных задача принимает вид

$$(5.2) \quad [|v'|^n \operatorname{sign} v']' + \theta = 0, \quad \theta' + v = 0$$

$$v(\pm 1) = \theta(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^1 v dx = 0$$

Эта задача не содержит числа Рэлея  $R$ ; единственным параметром, определяющим решение, служит показатель  $n$ .

Для численного решения уравнения сводились к системе четырех уравнений первого порядка. Эта система интегрировалась от точки  $x = 0$  до  $x = 1$  (имеется в виду нечетное решение). Недостающие граничные условия на левом конце определялись подбором, пока не удавалось с достаточной точностью удовлетворить граничным условиям на правом конце. При численном интегрировании использовались методы Рунге — Кутты и «предиктор-корректор». В результате находились распределения  $v(x)$  и  $\theta(x)$  для различных значений  $n$ . На профилях скорости в случае  $n < 1$  имеется характерное для псевдопластиков плато; при  $n > 1$  образуются углы возле точки  $x = 1/2$ . Эти профили близки к найденным в [6] для случая течения степенной жидкости в канале, подогреваемом сбоку.

Численное интегрирование системы (5.2) позволяет определить максимальную безразмерную скорость, зависящую от  $n$ . Расчеты приводят к эмпирической зависимости  $v_m \sim \pi^{-4/(n-1)}$ . С учетом выбранных единиц максимальная размерная скорость может быть представлена в виде

$$v_m = c \frac{\chi}{h} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{1/(n-1)}$$

Здесь  $R_0 = \pi^4$  — критическое число Рэлея в случае ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ), а коэффициент  $c$  — медленно меняющаяся функция  $n$ . В интервале  $1/3 \leq n \leq 2$  с достаточной точностью  $c = 0.34$ .

В случае  $n < 1$  (псевдопластики) амплитуда скорости стационарного движения  $v_m$  монотонно убывает с ростом  $R$  от бесконечности до нуля; при разных  $n$  получается семейство гипербол разных порядков (аналог кривых на фиг. 3). Отличие от случая кусочно-линейной характеристики состоит в том, что равновесие устойчиво по отношению к малым возмущениям при всех  $R$ . Это объясняется бесконечной начальной вязкостью степенного псевдопластика. При всех  $R$  имеется, однако, неустойчивость по отношению к конечным возмущениям, превышающим по величине  $v_m$ . Стационарный режим со скоростью  $v_m$ , как и в случае кусочно-линейной характеристики, неустойчив.

При  $n > 1$  (дилатантные жидкости) равновесие неустойчиво по отношению к малым возмущениям при всех  $R$ , начиная со сколь угодно малых (нулевая начальная вязкость). Стационарный плоскопараллельный ре-

жим со скоростью  $v_m$  устойчив. Скорость  $v_m$  монотонно растет от нуля по мере увеличения  $R$ ; кривые  $v_m(R)$  для  $n > 1$  представляют собой семейство парабол разного порядка (аналог кривых на фиг. 4).

Авторы благодарны Д. В. Любимову за помощь в проведении расчетов.

Поступила 6 II 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Chi Tien, Hun Sheng Tsuei, Zu Shung Sun.* Thermal instability of a horizontal layer of non-newtonian fluid heated from below. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 1969, vol. 12, No. 9.
2. *Liang S. F., Acrivos A.* Experiments on buoyancy driven convection in non-newtonian fluid. *Rheol. acta*, 1970, vol. 9, No. 3.
3. *Wankat P. C.* Note on thermal instability of a horizontal layer of non-newtonian fluid heated from below. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 1970, vol. 13, No. 9.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной устойчивости жидкости Бингама. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 1.
6. Семакин И. Г. Стационарная конвекция неньютоновской жидкости в вертикальном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.