

ВОЛНА РАЗРУШЕНИЯ В ЦЕПОЧКЕ

Л. И. Слепян, Л. В. Троянкина

(Ленинград, Новосибирск)

Известны различные формулировки задачи о распространении волны разрушения (волны дробления) в упругом хрупком теле (см. [1—4] и библиографию, к ним). Каждый из предложенных вариантов теории такого процесса основан на какой-либо гипотезе, например: о скорости волны разрушения [2—5], об интенсивности упругого предвестника [6] или об энергии разрушения [7, 8]. Введение дополнительного соотношения необходимо для замыкания системы уравнений динамики сплошной упруго-хрупкой среды. Однако без привлечения данных о структуре фронта разрушения подобное соотношение нельзя обосновать. Это обстоятельство отличает волны разрушения от «обычных» нелинейных волн, макропараметры которых определяются независимо от структуры фронта [8].

Указанное принципиальное затруднение можно устранить, если обратиться к среде со структурой, что и делается ниже. В качестве простейшей модели среды со структурой взята прямолинейная цепочка: каждая из составляющих ее единичных масс взаимодействует с двумя соседними массами с помощью линейно-упругих безынерционных связей (расстояние между массами и жесткости связей также приняты за единицы измерения, при этом за единицу скорости принимается скорость длинных волн в неповрежденной цепочке). При некотором напряжении связи $\sigma = \sigma_* \ll 1$ происходит ее частичное разрушение: жесткость связи принимает (положительное) значение $\alpha^2 < 1$. В отличие от постановки той же задачи в рамках сплошной среды [5—8] здесь надобность во введении каких-либо дополнительных гипотез не возникает.

Рассматривается стационарная задача, для решения которой используются те же методы, что и при исследовании динамики трещины в решетке [9]. Учет структуры в рассматриваемой задаче приводит, по существу, к тому же следствию, что и в [9]: обнаруживаются высокочастотные волны, уносящие часть энергии от фронта разрушения (эффект, аналогичный повышению температуры [7]). В динамике одиночной трещины структура среды определяет макроскопический критерий разрушения и, следовательно, влияет на макропараметры поля скоростей и напряжений. Так и при распространении волны разрушения микроструктура определяет макропараметры процесса (длинноволновое приближение) — отношения σ_1/σ_* , σ_2/σ_* , где $\sigma_1 = \text{const}$ — осредненное напряжение в упругом предвестнике, $\sigma_2 = \text{const}$ — осредненное напряжение за фронтом разрушения. Подтверждаются высказанные ранее предположения [8] о том, что $\sigma_1 < \sigma_*$ и что разрушение может происходить и в том случае, когда $\sigma_2 < \sigma_*$ ($\sigma_{1,2} > 0$). Последний вывод может показаться странным, если его рассматривать, оставаясь в рамках сплошной среды без структуры. Здесь же он очевиден: полные напряжения за фронтом разрушения (с учетом высокочастотных волн) превышают осредненное значение.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Полагаем, что скорости u и ускорения a являются функциями одной переменной $\tau = x - vt$, где $x = 0, \pm 1, \dots$ — лагранжевы координаты масс, $v = \text{const} > 0$ — скорость фронта разрушения, t — время. Заметим, что подобным образом нельзя определить перемещения, которые из-за наличия упругого предвестника зависят еще и от x .

В случае неповрежденных связей для произвольной массы справедливо уравнение движения $a(\tau) = Q(\tau) - Q(\tau - 1) + R(\tau)$, где $Q(\tau)$ — увеличение расстояния между данной массой и соседней массой справа (координата $x + 1$); $R(\tau)$ — внешняя сила, действующая на данную массу. Далее, $\partial^2 Q(\tau)/\partial t^2 = v^2 Q''(\tau) = a(\tau + 1) - a(\tau)$, где штрих означает производную по аргументу. Отсюда получаем следующее уравнение «в напряжениях» (для неповрежденной решетки напряжение $\sigma(\tau) = Q(\tau)$):

$$(1.1) \quad v^2 Q''(\tau) + 2Q(\tau) - Q(\tau - 1) - Q(\tau + 1) = \\ = P(\tau) = R(\tau + 1) - R(\tau).$$

Пусть (частичное) разрушение связи происходит при $\tau = 0$ ($t = x/v$), после чего (при $\tau < 0$) $\sigma = \alpha^2 Q$. Чтобы учесть это, достаточно для $\tau < 0$ компенсировать в (1.1) напряжения $(1 - \alpha^2)Q$ с помощью внешних сил, положив

$$P(\tau) = P_0(\tau) + (1 - \alpha^2)[2Q_-(\tau) - Q_-(\tau - 1) - Q_-(\tau + 1)],$$

$$Q_{\pm}(\tau) = Q(\tau)H(\pm\tau), \quad R(\tau) = R_0(\tau) + (1 - \alpha^2) \times$$

$$\times [Q_-(\tau - 1) - Q_-(\tau)],$$

где H — функция Хевисайда; $P_0(\tau) = R_0(\tau + 1) - R_0(\tau)$ — внешняя сила, растягивающая связь, в задаче с учетом разрушения (вначале рассматриваем неоднородную задачу, а затем перейдем к однородной). Будем считать внешние силы $P_0(\tau)$ ограниченными. Тогда $Q(\tau)$ непрерывна и задача сводится к уравнению

$$(1.2) \quad v^2 Q_+''(\tau) + 2Q_+(\tau) - Q_+(\tau - 1) - Q_+(\tau + 1) + v^2 Q_-''(\tau) +$$

$$+ \alpha^2 (2Q_-(\tau) - Q_-(\tau - 1) - Q_-(\tau + 1)) = P_0(\tau)$$

с условием

$$(1.3) \quad Q_+(0) = Q_-(0) = \sigma_*, \quad (\sigma(+0) = \sigma_*, \quad \sigma(-0) = \alpha^2 \sigma_*).$$

В этих соотношениях можно считать заданным макронапряжение за фронтом разрушения σ_2 и определять σ_1 , v и осциллирующие волны за фронтом и в предвестнике. Удобнее, однако, полагать заданной скорость фронта v и определять соответствующие ей остальные величины.

Если разрушение связи происходит не по сигналу извне, который мог бы поступать, скажем, при $\tau = 0$, а когда напряжение достигает критического уровня $\sigma = \sigma_*$ («естественное разрушение»), то разыскиваемое стационарное решение должно удовлетворять еще одному условию: суммарное напряжение при $\tau > 0$ (с учетом осредненной и осциллирующих волн) должно быть меньше, чем σ_* . Полагаем $\sigma_* > 0$ независимо от того, происходит разрушение при растяжении или при сжатии связи.

2. Общее решение. Решение данной стационарной задачи неединственно. Доопределим его, полагая, что оно является пределом при $t \rightarrow \infty$ (для произвольной конечной окрестности $\tau = 0$) решения той же, но нестационарной задачи с нулевыми начальными условиями. Следующее отсюда правило отбора решений указано в [10, 11]. Используя его, после преобразования Фурье

$$Q^F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau) e^{iq\tau} d\tau$$

из уравнения (1.2) получим

$$(2.1) \quad h(iqv + 0, q) Q_+^F + \alpha^2 h(iqv\alpha^{-1} + 0, q) Q_-^F = P_0^F, \quad h(iqv + 0, q) =$$

$$= 2(1 - \cos q) + (0 + iqv)^2.$$

Воспользуемся представлением для h из [9, 10] (где выражение для h (2.1) обозначалось как h^2 , h_{\pm} — как $\mp h^2 i$) при $0 < v < 1$:

$$(2.2) \quad h(iqv + 0, q) = h_+(q, v)h_-(q, v),$$

$$h(q, v) = (0 \mp iq) \sqrt{1 - v^2} \Phi_{\pm}(iq, v) \prod_k L_k^{\pm}(v),$$

$$L_k^{\pm}(v) = 1 + \left[\frac{(0 \mp iq)}{\beta_k^{\pm}} \right]^2, \quad \beta_k^{\pm} = \beta_k^{\pm}(v), \quad \beta_k^{\pm}(v\alpha^{-1}) = \gamma_k^{\pm}(v).$$

Здесь произведение включает зависящее от v число сомножителей (для h_- на единицу больше, чем для h_+); $q = \beta_k^{\pm}$ — положительные корни уравнения $h = 0$, причем $\sin \beta_k^{\pm} \geq v^2 \beta_k^{\pm}$ (корни отвечают осциллирующим волнам, групповая скорость v_g которых не меньше фазовой скорости v),

$\sin \beta_k^- \leq v^2 \beta_k^- (v_g \leq v)$, в случае двукратного корня (корней большей кратности нет) один из них β_k^+ , другой β_k^- ; $\Phi_+(iq, v)$ — комплексно-сопряженные функции q , не имеющие нулей и полюсов при $\text{Im } q > -\varepsilon < 0$ (Φ_+) или при $\text{Im } q < \varepsilon$ (Φ_-).

Используя факторизацию (2.2), представим (2.1) в виде ($0 < v < \alpha$)

$$(2.3) \quad \frac{h_+(q, v)}{h_+(q, v\alpha^{-1})} Q_+^F + \alpha^2 \frac{h_-(q, v\alpha^{-1})}{h_-(q, v)} Q_-^F = \frac{P_0^F}{h_-(q, v) h_+(q, v/\alpha)}$$

Положим

$$(2.4) \quad P_0^F = h_-(q, v) h_+(q, v\alpha^{-1}) \frac{2A\varepsilon}{q^2 + \varepsilon^2}, \quad A = \text{const } (\varepsilon > 0).$$

Из (2.1), (2.2) следует, что при этом $P_0^F \rightarrow 0$ (а следовательно, и $P_0 \rightarrow 0$), когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Переходя в пределе ($\varepsilon \rightarrow +0$) к однородной задаче, получим

$$(2.5) \quad \frac{h_+(q, v)}{h_+(q, v\alpha^{-1})} Q_+^F + \alpha^2 \frac{h_-(q, v\alpha^{-1})}{h_-(q, v)} Q_-^F = A\pi\delta(q) \left(\frac{1}{0 - iq} + \frac{1}{0 + iq} \right),$$

где $\delta(q)$ — функция Дирака. В классе ограниченных функций $Q_{\pm}(\tau)$ решение уравнения (2.5) единственно

$$(2.6) \quad Q_+^F(q) = \frac{A}{0 - iq} \frac{h_+(q, v\alpha^{-1})}{h_+(q, v)}, \quad Q_-^F(q) = \frac{A}{\alpha^2(0 + iq)} \frac{h_-(q, v)}{h_-(q, v\alpha^{-1})}.$$

Замечание. Существуют и другие последовательности внешних сил, отличные от (2.4), приводящие к некоторым однородным решениям:

$$P_0^F = h_-(q, v) h_+(q, v\alpha^{-1}) K, \\ K = -\frac{4A\varepsilon}{(q^2 + \varepsilon^2)^2}, \quad K = \frac{2A\varepsilon}{(q \pm \gamma_k)^2 + \varepsilon^2}, \quad K = \frac{2A\varepsilon}{(\bar{q} \pm \beta_k)^2 + \varepsilon^2}, \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Однако первое из них приводит к решению, не удовлетворяющему условию ограниченности $Q_{\pm}(\tau)$, а последующие отвечают разрушению под действием высокочастотных волн (см. [10]) при $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$; здесь такой процесс не рассматривается.

3. Длинноволновое приближение и осциллирующие волны. Ввиду непрерывности $Q(\tau)$ удлинение в момент разрыва можно найти, основываясь на (2.2), (2.6), в виде

$$(3.1) \quad Q(0) = \sigma_* = \lim_{q \rightarrow +\infty} q \sqrt{Q_+^F(iq) Q_-^F(-iq)} = \frac{A}{\alpha\kappa}, \quad \kappa = \prod_k \frac{\beta_k^- \gamma_k^+}{\beta_k^+ \gamma_k^-},$$

откуда определяется постоянная A . Длинноволновое приближение ($q \rightarrow 0$) имеет вид

$$(3.2) \quad Q_+^F \sim \frac{A}{0 - iq} \sqrt{\frac{1 - v^2 \alpha^{-2}}{1 - v^2}}, \quad Q_-^F \sim \frac{A}{\alpha^2(0 + iq)} \sqrt{\frac{1 - v^2}{1 - v^2 \alpha^{-2}}}.$$

Отсюда

$$(3.3) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_*} = \alpha\kappa \sqrt{\frac{1 - v^3 \alpha^{-2}}{1 - v^2}}, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_*} = \alpha\kappa \sqrt{\frac{1 - v^2}{1 - v^2 \alpha^{-2}}}.$$

Незатухающие, осциллирующие волны, распространяющиеся впереди (сзади) фронта разрушения, определяются полюсами выражений (2.6) для $Q_+(Q_-)$ на вещественной оси q при $q \neq 0$, т. е. нулями функций $h_+(q, v)(h_-(q, v/\alpha))$: $q = \pm \beta_k^+(q = \pm \gamma_k^-)$. Находим

$$Q_+(\tau) = \text{Re} \frac{A h_+(\beta_k^+, v\alpha^{-1}) \exp(-i\beta_k^+ \tau)}{i\beta_k^+ \sqrt{1 - v^2} M_k^+(\beta_k^+) \Phi_+(i\beta_k^+, v)} =$$

$$= -A \sqrt{\frac{1-v^2\alpha^{-2}}{1-v^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{N_+(\beta_k^+)}{M_k^+(\beta_k^+)} \exp(i\beta_k^+ \tau) \right),$$

$$M_k^\pm(q) = M_\pm(q) \left[1 - \left(\frac{q}{\beta_k^\pm} \right)^2 \right]^{-1}, \quad N_k^\pm(q) = N_\pm(q) \left[1 - \left(\frac{q}{\gamma_k^\pm} \right)^2 \right]^{-1},$$

$$M_\pm(q) = \prod_m \left[1 - \left(\frac{q}{\beta_m^\pm} \right)^2 \right], \quad N_\pm(q) = \prod_m \left[1 - \left(\frac{q}{\gamma_m^\pm} \right)^2 \right].$$

Амплитуда волны напряжений

$$|\sigma_{+k}| = A \sqrt{\frac{1-v^2\alpha^{-2}}{1-v^2}} \left| \frac{N_+(\beta_k^+) \Phi_+(i\beta_k^+, v\alpha^{-1})}{M_k^+(\beta_k^+) \Phi_+(i\beta_k^+, v)} \right|.$$

В соответствии с (2.2) при $q \neq 0$

$$|\Phi_+(iq, v)| = \left(\frac{|h(iqv, q)|}{(1-v^2)q^2 |M_+(q)M_-(q)|} \right)^{1/2},$$

$$|\Phi_+(iq, v\alpha^{-1})| = \left(\frac{|h(iqv\alpha^{-1}, q)|}{(1-v^2\alpha^{-2})q^2 |N_+(q)N_-(q)|} \right)^{1/2}.$$

В пределе при $q \rightarrow \beta_k^+$

$$|\Phi_+(iq, v)| \rightarrow |\Phi_+(i\beta_k^+, v)| = \left| \frac{\sin \beta_k^+ - \beta_k^+ v^2}{(1-v^2)M_k^+(\beta_k^+)M_-(\beta_k^+)\beta_k^+} \right|^{1/2},$$

$$|\Phi_+(iq, v\alpha^{-1})| \rightarrow |\Phi_+(i\beta_k^+, v\alpha^{-1})| = \left| \frac{2(1 - \cos \beta_k^+) - (v\beta_k^+\alpha^{-1})^2}{(1-v^2\alpha^{-2})(\beta_k^+)^2 N_+(\beta_k^+)N_-(\beta_k^+)} \right|^{1/2}.$$

Отсюда

$$(3.4) \quad |\sigma_{+k}| = \frac{\alpha\sigma_*\kappa}{\beta_k^+} \left| \frac{h(i\beta_k^+v\alpha^{-1}, \beta_k^+) N_+(\beta_k^+) M_-(\beta_k^+)}{[\beta_k^+ \sin \beta_k^+ - (v\beta_k^+)^2] N_-(\beta_k^+) M_k^+(\beta_k^+)} \right|^{1/2} \quad (\tau > 0).$$

Аналогично находим

$$(3.5) \quad |\sigma_{-k}| = \frac{\alpha\sigma_*\kappa}{\gamma_k^-} \left| \frac{h(i\gamma_k^-v, \gamma_k^-) N_+(\gamma_k^-) M_-(\gamma_k^-)}{[\gamma_k^- \sin \gamma_k^- - (\gamma_k^- v\alpha^{-1})^2] N_k^-(\gamma_k^-) M_+(\gamma_k^-)} \right|^{1/2}.$$

Скорости масс определяются следующим образом. Имеем

$$a(\tau) = \partial u / \partial t = -vu'(\tau), \quad a^F(q) = iqv u^F(q).$$

Учитывая, что $a(\tau) = \sigma(\tau) - \sigma(\tau - 1)$ ($\sigma_+(\tau) = Q_+(\tau)$, $\sigma_-(\tau) = \alpha^2 Q_-(\tau)$) и $a^F(q) = (1 - e^{iq})\sigma^F(q)$, получаем

$$(3.6) \quad u^F = -2\sigma^F(qv)^{-1} \exp(iq/2) \sin(q/2) + 2\pi B\delta(q) \sim \\ \sim -\sigma^F v^{-1} + 2\pi B\delta(q)(q \rightarrow 0), \quad B = \text{const.}$$

Осредненное значение скорости (длинноволновое приближение) определяется как оригинал указанной в (3.6) асимптотики:

$$u_1 = u_+ = -\sigma_1 v^{-1} + B, \quad u_2 = u_- = -\sigma_2 v^{-1} + B.$$

Постоянная B определяется из очевидного условия $u_1 = -\sigma_1$: $B = (v^{-1} - 1)\sigma_1$. Итак,

$$(3.7) \quad u_1 = -\sigma_1, \quad u_2 = (v^{-1} - 1)\sigma_1 - \sigma_2 v^{-1}.$$

Скорости масс в незатухающих осциллирующих волнах получаются как вклады соответствующих полюсов изображения (3.6), т. е. заменой параметра q (явно выписанного в (3.6)) на β_k^+ (γ_k^-):

$$(3.8) \quad |u_{+k}| = \frac{2}{v\beta_k^+} \left| \sigma_{+k} \sin \frac{\beta_k^+}{2} \right| \quad (\tau > 0), \quad |u_{-k}| = \frac{2}{v\gamma_k^-} \left| \sigma_- \sin \frac{\gamma_k^-}{2} \right| \quad (\tau < 0).$$

4. Поток энергии. Использованное выше правило отбора стационарных решений приводит к тому, что незатухающие осциллирующие волны, групповая скорость которых больше (меньше) фазовой, присутствуют лишь перед (за) фронтом разрушения. Тем самым поток энергии, соответствующий этим волнам, берет начало на фронте разрушения. Кроме того, от фронта разрушения оттекает энергия, заключенная в упругом предвестнике постоянной интенсивности (длинноволновое приближение). Единственным источником энергии указанных волн, а также собственно энергии разрушения — энергии, теряемой при внезапном уменьшении жесткости связи, может быть лишь волна постоянной интенсивности за фронтом разрушения, энергия которой создается работой напряжений σ_2 . Итак, должно выполняться соотношение относительно потоков энергии

$$(4.1) \quad A_1(1-v) + A_2v + \sum_k A_{+k}(v_{gk} - v) + \sum_k A_{-k}(v - v_{gk}) + T_0v = -\sigma_2u_2,$$

где $A_1 = (u_1^2 + \sigma_1^2)/2 = \sigma_1^2$ — плотность энергии в упругом предвестнике постоянной интенсивности; $A_2 = (u_2^2 + \sigma_2^2\alpha^{-2})/2$ — плотность энергии в осредненной волне за фронтом разрушения; $A_{+k}(A_{-k})$ — осредненная плотность энергии осциллирующей волны (v — ее фазовая, v_{gk} — групповая скорости, $-\nu\beta_k^+$ ($-\nu\gamma_k^-$) — частота):

$$A_{+k} = \frac{1}{4} (|u_{+k}|^2 + |\sigma_{+k}|^2), \quad A_{-k} = \frac{1}{4} \left(|u_{-k}|^2 + \frac{|\sigma_{-k}|^2}{\alpha^2} \right),$$

$T_0 = (1 - \alpha^2) \sigma_*^2/2$ — энергия разрушения.

Выражения для амплитуд входящих сюда напряжений и скоростей указаны в (3.3)—(3.5), (3.7) и (3.8). Соотношение (4.1) может служить (и использовалось) для контроля результатов вычислений по приведенным выше формулам. Определим отношение энергии разрушения T_0 к общей энергии T , исчезающей на макроуровне при единичном продвижении фронта разрушения. Из формул (4.1), (3.7), (3.3) следует

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \sum_k (1 - v_{gk}v^{-1}) A_{-k} - \sum_k (1 - v_{gk}v^{-1}) A_{+k} = \\ &= -\sigma_2u_2 - A_1(1-v) - A_2v = \frac{1}{2v^2} (1 - v^2) \sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_1) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \alpha^2) \sigma_*^2 \kappa^2 = T_0 \kappa^2 = T_0 k^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

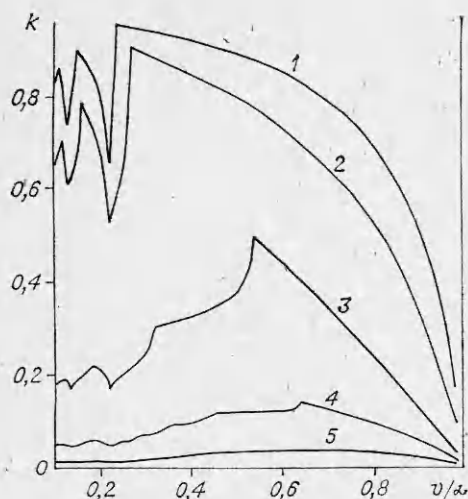
$$(4.2) \quad k = T_0/T = \kappa^{-2}.$$

Функция $k(\alpha, v)$ полностью определяет влияние структуры среды на макропараметры волны разрушения. Введения этой функции достаточно для замыкания уравнений динамики упругохрупкой сплошной среды без структуры. Заметим, что выражение для $k(v)$ применительно к среде с более общей структурой совпадает с указанным в [12].

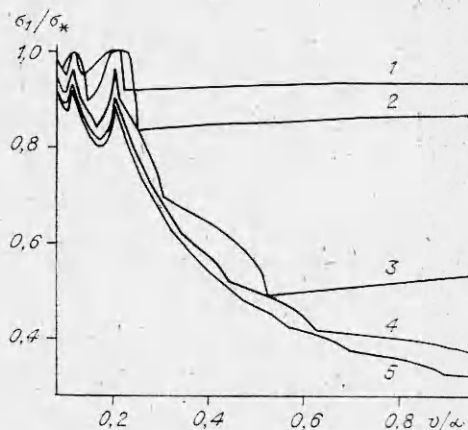
5. Некоторые выводы. Пусть $v_0 \leq v < 1$, $v_0 = 2|\sin(q_0/2)|/q_0 \approx 0,2106$ (q_0 — минимальный положительный корень уравнения $q_0 = 2 \operatorname{tg}(q_0/2) \approx 8,987$). Тогда уравнения $h(iqv_1 + 0, q) = 0$ ($v_1 = v$, $v_1 = v/\alpha = w$) имеют по одному положительному корню $q = \beta_1^- \equiv 2\beta$ ($v_1 = v$) и $q = \gamma_1^- \equiv 2\gamma$ ($v_1 = w$), $0 < \beta, \gamma < \pi$. При этом осциллирующие волны распространяются лишь за фронтом разрушения ($\tau < 0$). Обращаясь к (3.1), (3.3) и учитывая уравнения, которым удовлетворяют β, γ , можем записать

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_*} = \frac{\alpha\beta \sqrt{1 - v^2\alpha^{-2}}}{\gamma \sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{f(\gamma) f^{-1}(\beta)}, \quad f(x) = \sin^{-2}x - x^{-2}.$$

В указанном интервале $f(x)$ ($x = \beta, \gamma$) монотонно возрастает: $\partial f/\partial x > 0$, а $\gamma < \beta$ при $\alpha < 1$, поэтому $\sigma_1/\sigma_* < 1$ ($\alpha < 1$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Далее, пусть $\alpha \rightarrow 0$, $v_0 < v/\alpha < 1$. Тогда число положительных корней уравнения $h(iqv + 0, q) = 0$, равное m для β_k^+ и $m + 1$ для β_k^- , неограниченно возрастает: $m \sim 1/\nu v \rightarrow \infty$, а уравнение $h(iqv\alpha^{-1} + 0, q) = 0$ имеет лишь один положительный корень γ^- . При этом с достаточной асимптотической точностью можно представить $\beta_k^+ \sim 2\pi n \pm \arcsin(\pi n v)$, где $n = 1, 2, \dots, m$ для β_k^+ и $n = 1, 2, \dots, m + 1$ для β_k^- , и найти (см. [11])

$$\kappa^{-1} = \frac{\gamma_1^-}{\beta_{m+1}^-} \prod_{k=1}^m \frac{\beta_k^+}{\beta_k^-} \sim v\gamma_1^- \quad (v \rightarrow 0).$$

В свою очередь для γ_1^- справедливо асимптотическое представление $\gamma_1^- \sim \sqrt{24(1-v/\alpha)}(v \rightarrow \alpha)$, причем γ_1^- монотонно возрастает при уменьшении v , достигая на нижней границе рассматриваемого интервала значения $\gamma_1^- \approx 5,140$. Подставив эти данные в (3.3), найдем ($\alpha \rightarrow 0$)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_*} \sim \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,2887, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_*} \sim \frac{\alpha}{v} \frac{1}{4\sqrt{3}(1-v\alpha^{-1})} \quad (v \rightarrow \alpha),$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_*} \approx 0,9023, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_*} \approx 0,9442 \quad \left(\frac{v}{\alpha} = 0,2106\right)$$

(множитель α/v в формуле для σ_2/σ_* стремится к единице, но сохранен с целью расширить диапазон v/α , хорошо описываемый этой формулой).

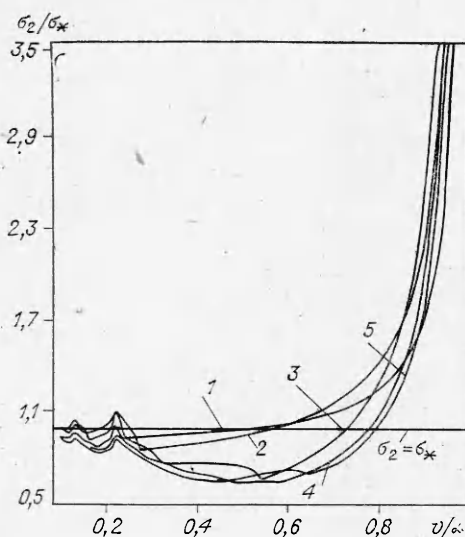
Таким образом, не только $\sigma_1 < \sigma_*$, но при определенных условиях и $\sigma_2 < \sigma_*$.

На фиг. 1 показаны графики k в функции от v/α для $\alpha = 0,9; 0,8; 0,4; 0,2; 0,1$ (кривые 1–5 соответственно), на фиг. 2, 3 — графики $\sigma_{1,2}(v/\alpha)$ при тех же значениях α .

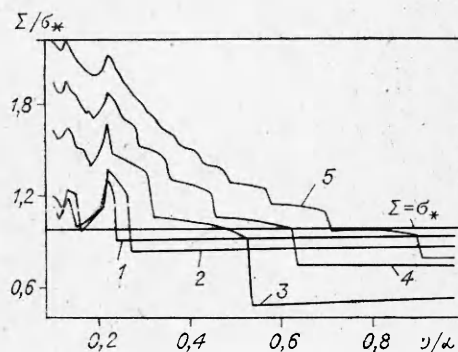
Видно, что при достаточно малых значениях σ_2 (но таких, когда разрушение еще может происходить, $\sigma_{2 \min}(\alpha) < \sigma_2(v/\alpha) \leq \sigma_2(0)$) скорость v определяется по значению σ_2 неоднозначно.

Представляется, что меньшее значение скорости отвечает неустойчивой ветви $\sigma_2(v/\alpha)$. При этом скорость v при любом значении $\alpha < 1$ имеет отличную от нуля нижнюю границу (на наличие нижней границы для v указывалось в [8]). Например, для $\alpha = 0,8$ и $\sigma_2 = 0,95$ минимальное значение $v = v_{\min} \approx 0,38$ (за единицу скорости принята скорость длинных волн в неповрежденной решетке).

В случае естественного разрушения, кроме найденных, при $\sigma_2/\sigma_* < 1$ существует еще и статическое решение $v = 0$. Того же типа неоднозначностью характеризуются и функции $k(v)$ (на фиг. 1 показаны графики $k(v/\alpha)$).



Фиг. 3



Фиг. 4

Видно также (см. фиг. 2), что $\sigma_1/\sigma_* < 1$. Верхняя граница для напряжений впереди фронта разрушения $\Sigma(v/\alpha)$ равна арифметической сумме σ_1 и амплитуд осциллирующих волн с групповыми скоростями, большими v . На фиг. 4 показаны графики Σ/σ_* при тех же значениях α . Стационарные решения для задачи о естественном разрушении существуют, когда указанная граница $\Sigma < \sigma_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979.
2. Николаевский В. Н. Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов. Препринт № 123. М.: И-т пробл. мех. АН СССР, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1979.
3. Николаевский В. Н. О динамике фронтов разрушения в хрупких телах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 5.
4. Николаевский В. Н. Динамическая прочность и скорость разрушения.— Сб. пер. Механика, 1981, № 26.
5. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О самоподдерживающемся разрушении напряженно хрупкого тела.— ДАН СССР, 1966, т. 167, № 3.
6. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
7. Слепян Л. И. О волне хрупкого разрушения.— Инж. журн. МТТ, 1968, № 4.
8. Слепян Л. И., Троянкина Л. В. Разрушение хрупкого стержня при продольном ударе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
9. Слепян Л. И. Динамика трещины в решетке.— ДАН СССР, 1981, т. 258, № 3.
10. Слепян Л. И. Распространение трещины при высокочастотных колебаниях решетки.— ДАН СССР, 1981, т. 260, № 3.
11. Слепян Л. И. Антиплоская задача о трещине в решетке.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5.
12. Слепян Л. И. О связи между решениями смешанных динамических задач для сплошной упругой среды и решетки.— ДАН СССР, 1982, т. 266, № 3.

Поступила 24/IX 1982 г.