

УДК 539.374

## ШЕРОХОВАТОСТЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ОБЖАТИИ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБ

С. Е. Александров, Е. А. Лямина, К. Манабэ\*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия

\* Университет г. Токио, 192-0397 Токио, Япония

E-mails: sergei\_alexandrov@spartak.ru, lyamina@inbox.ru, manabe@tmu.ac.jp

На основе безмоментной теории оболочек и модели идеально жесткопластического материала, удовлетворяющего условию текучести Мизеса и ассоциированному закону течения, построено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии при осесимметричном установившемся деформировании тонкостенных труб. Полученное решение используется совместно с эмпирическим соотношением, устанавливающим связь между деформированным состоянием в произвольной точке свободной поверхности и параметрами шероховатости поверхности в той же точке, для определения влияния некоторых параметров процессов обжатиya труб на параметры шероховатости поверхности в изделии. Особенностью используемого эмпирического соотношения является предположение о зависимости параметров шероховатости свободной поверхности от двух независимых кинематических переменных.

**Ключевые слова:** тонкостенная труба, безмоментная теория оболочек, шероховатость свободной поверхности, идеально жесткопластический материал, обработка давлением.

DOI: 10.15372/PMTF20170219

Для совершенствования технологий производства миниатюрных изделий методами обработки давлением, в частности безоправочного волочения [1, 2], требуется разработка новых теоретических и экспериментальных подходов к исследованию шероховатости свободной поверхности при таком деформировании. Если толщина изделия достаточно мала, то шероховатость поверхности характеризует концентраторы напряжений и деформаций, которые могут инициировать разрушение в процессе обработки. Обзор исследований, выполненных к настоящему времени в этой области, приведен в [3]. При использовании феноменологического подхода для изучения шероховатости поверхности при ее обработке давлением применяются эмпирические соотношения, в частности эмпирическое соотношение [4–7], связывающее приращение параметров шероховатости свободной поверхности и эквивалентную деформацию. Согласно результатам анализа большого количества независимых экспериментальных данных, выполненного в [8], в большинстве случаев недостаточно считать, что шероховатость свободной поверхности определяется только эквивалентной деформацией. Поэтому в [8] предложено и обосновано новое эмпирическое соотношение, устанавливающее зависимость параметров шероховатости свободной поверхности от эквивалентной деформации и деформации в направлении нормали к поверхности. Результа-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-92103 ЯФ.а) и Японского общества содействия науке (JSPS).

© Александров С. Е., Лямина Е. А., Манабэ К., 2017

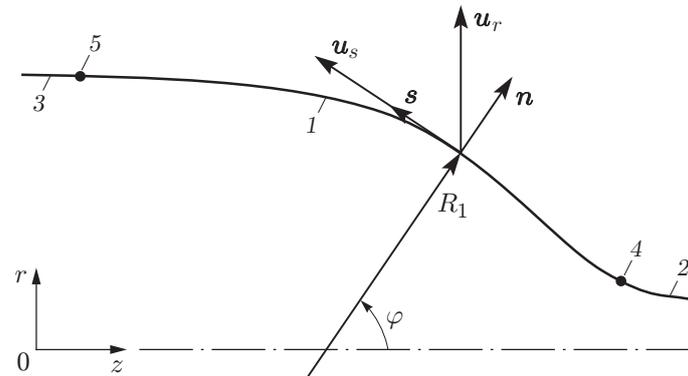


Рис. 1. Схема стационарного течения оболочки:

1 — пластическая зона, 2, 3 — жесткие зоны, 4, 5 — границы между жесткими и пластическими зонами

ты, полученные на основе этого эмпирического соотношения, согласуются с результатами расчетов по теории кристаллографической пластичности, приведенными в [9].

В данной работе с использованием общего эмпирического соотношения для параметров шероховатости свободной поверхности, предложенного в [8], и результатов работы [9], позволяющих конкретизировать эмпирическое соотношение, исследуется влияние параметров процессов обжатия труб на величину шероховатости свободной поверхности в изделии.

**1. Постановка задачи и основные предположения.** Рассмотрим тонкостенную осесимметричную оболочку, находящуюся в состоянии стационарного жесткопластического течения. Предполагается, что применима безмоментная теория оболочек. Пластическая зона расположена между жесткими зонами, которые перемещаются вдоль оси симметрии. Скорость одной из жестких зон задана. Величина этой скорости не существенна для материалов, сопротивление которых не зависит от скорости деформирования. Упругими деформациями в пластической зоне пренебрегается. Оболочка представляется в виде геометрической поверхности, причем ее форма и границы между жесткими и пластическими зонами полностью определяются формой инструмента. С учетом принятых предположений границы между жесткими и пластическими зонами представляют собой две точки в произвольной меридиональной плоскости (рис. 1). На рис. 1  $\varphi$  — угловая координата,  $R_1$  — радиус кривизны в меридиональной плоскости (один из главных радиусов кривизны оболочки),  $r$ ,  $z$  — радиальная и осевая координаты цилиндрической системы координат, ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии процесса,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали,  $\mathbf{s}$  — единичный вектор касательной,  $u_r$  — радиальная скорость,  $u_s$  — проекция вектора скорости на направление вектора  $\mathbf{s}$ . Очевидно, что величина вектора скорости равна  $|u_s|$ . Второй главный радиус кривизны оболочки определяется формулой

$$R_2 = r / \sin \varphi. \quad (1)$$

При анализе процессов листовой обработки металлов давлением во многих работах применялась безмоментная теория оболочек (см., например, [10–15]). В [15] приведен обзор исследований, выполненных с использованием этой теории. Одно из основных предположений состоит в том, что главное напряжение  $\sigma_3$ , действующее на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ , имеет порядок давления стенки инструмента на поверхность оболочки и его величина значительно меньше величины остальных двух главных напряжений. В частности, напряжение  $\sigma_3$  не влияет на переход материала в пластическое состояние, поэтому в условии текучести

полагается

$$\sigma_3 = 0. \quad (2)$$

С учетом сделанных предположений уравнения равновесия принимают вид [10]

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = -\frac{\sigma}{h}, \quad \frac{d}{ds}(rh\sigma_1 \sin \varphi) = -r\sigma \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $\sigma_1$  — главное напряжение на площадке с нормалью, направление которой совпадает с направлением вектора  $\mathbf{s}$ ;  $\sigma_2$  — окружное напряжение;  $\sigma$  — давление стенки инструмента на поверхность оболочки ( $\sigma > 0$ , если направление соответствующего вектора противоположно направлению вектора  $\mathbf{n}$ );  $h$  — толщина стенки трубы. Кроме того,

$$ds = R_1 d\varphi. \quad (4)$$

Из геометрии задачи (см. рис. 1) следует

$$R_1 \cos \varphi d\varphi = dr. \quad (5)$$

**2. Определяющие уравнения.** Примем модель идеально жесткопластического материала, удовлетворяющего условию текучести Мизеса и ассоциированному закону течения. С учетом (2) условие текучести записывается в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2, \quad (6)$$

где  $\sigma_0$  — предел текучести при одноосном растяжении, являющийся постоянной величиной. Уравнения ассоциированного закона течения сводятся к соотношениям [16]

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 - \sigma_2}, \quad (7)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — главные скорости деформации, причем  $\xi_2$  — окружная скорость деформации. Тогда, учитывая установившийся характер течения, имеем

$$\xi_1 = \frac{du_s}{ds}, \quad \xi_2 = \frac{u_r}{r}, \quad \xi_3 = \frac{u_s}{h} \frac{dh}{ds}. \quad (8)$$

Из геометрии задачи (см. рис. 1) следует

$$u_r = u_s \cos \varphi. \quad (9)$$

Эмпирическое соотношение для параметров шероховатости свободной поверхности, предложенное в [8], имеет вид

$$\frac{\Delta R}{a_g} = \varepsilon_{eq} \Omega \left( \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{eq}} \right), \quad (10)$$

где  $\Delta R$  — приращение параметра шероховатости свободной поверхности ( $R_z$  или  $R_a$ );  $a_g$  — средний размер зерна;  $\varepsilon_{eq}$  — эквивалентная деформация;  $\varepsilon_n$  — логарифмическая деформация в направлении нормали к свободной поверхности, параметры шероховатости которой вычисляются;  $\Omega$  — достаточно произвольная функция аргумента  $\varepsilon_n/\varepsilon_{eq}$ , определяемая экспериментальным или расчетным путем. В рассматриваемом случае эквивалентная деформация вычисляется из уравнения

$$u_s \frac{d\varepsilon_{eq}}{ds} = \xi_{eq}, \quad (11)$$

где  $\xi_{eq}$  — эквивалентная скорость деформации:

$$\xi_{eq} = \sqrt{2/3} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}. \quad (12)$$

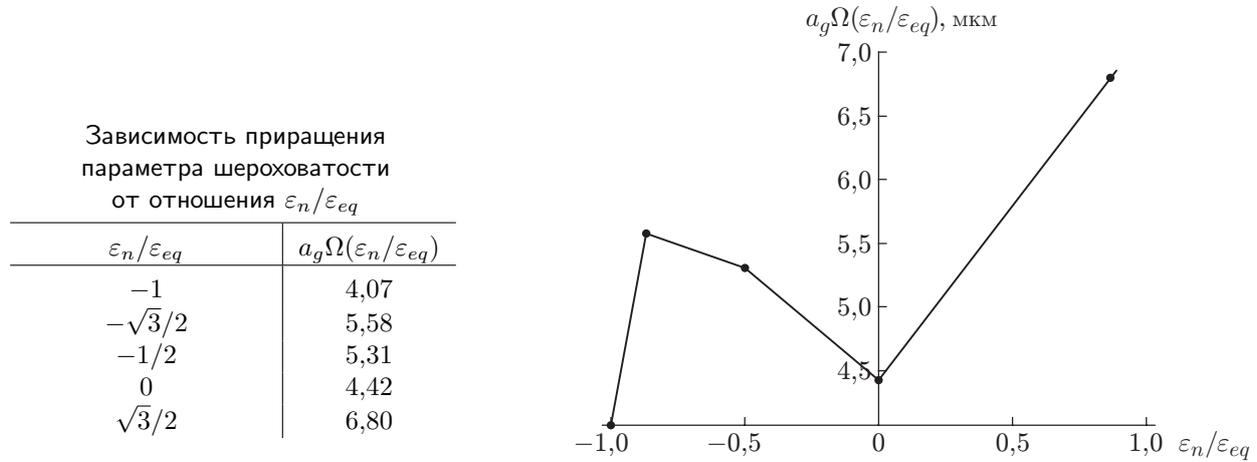


Рис. 2. Зависимость приращения параметра шероховатости от отношения  $\varepsilon_n/\varepsilon_{eq}$ : линия — кусочно-линейная аппроксимация, точки — данные [9]

Уравнение для деформации  $\varepsilon_n$  имеет вид

$$\varepsilon_n = \ln(h/h_i), \tag{13}$$

где  $h_i$  — толщина стенки трубы в окрестности входа в пластическую зону. Из определений  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_{eq}$  следует, что  $-1 \leq \varepsilon_n/\varepsilon_{eq} \leq 1$ . С использованием теории кристаллографической пластичности в [9] вычислена зависимость параметра шероховатости поверхности  $R_a$  от эквивалентной деформации при различных значениях отношения главных скоростей деформации, которые поддерживались постоянными в течение всего процесса деформирования. Следовательно, в таком процессе функция  $\Omega$ , введенная в (10), имеет постоянное значение и из (10) следует, что  $\Delta R$  — линейная функция  $\varepsilon_{eq}$ . Этот вывод подтверждают результаты работы [9]. С использованием обозначений, принятых в данной работе, результаты исследования влияния отношения  $\varepsilon_n/\varepsilon_{eq}$  на шероховатость свободной поверхности [9] приведены в таблице. В настоящей работе эти данные аппроксимируются кусочно-линейной функцией (рис. 2).

**3. Общее решение.** Условие (6) тождественно выполняется в результате подстановки

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = -\frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} - \cos \psi. \tag{14}$$

Здесь  $\psi$  — новая искомая функция. Подставляя (14) во второе уравнение системы (7), получаем

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{2}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi - 1}. \tag{15}$$

Исключая в этом уравнении  $\xi_1$  и  $\xi_2$  с помощью (8), а затем  $u_r$  с помощью (9), находим

$$\frac{du_s}{u_s ds} = \frac{\cos \varphi (\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi - 1)}{2r}. \tag{16}$$

Уравнение для  $h$  следует из первого уравнения системы (7)–(9), (15):

$$\frac{dh}{h ds} = -\frac{\cos \varphi (\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi + 1)}{2r}. \tag{17}$$

Исключая  $\sigma$  во втором уравнении системы (3) с помощью первого уравнения этой системы и выполняя дифференцирование, получаем

$$\sigma_1 \sin \varphi \frac{dr}{r ds} + \sigma_1 \sin \varphi \frac{dh}{h ds} + \sin \varphi \frac{d\sigma_1}{ds} + \sigma_1 \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = \cos \varphi \left( \frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} \right).$$

С учетом (1), (4), (5) это уравнение преобразуется к форме

$$\frac{d\sigma_1}{dr} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r} - \sigma_1 \frac{dh}{h dr}. \quad (18)$$

Уравнение (17) с помощью (4), (5) преобразуется к виду

$$\frac{dh}{h dr} = -\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi + 1}{2r}. \quad (19)$$

Подставляя (14), (19) в (18), получаем

$$\cos^2 \psi d\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dr}{r}. \quad (20)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln \left( \frac{r}{\rho_0} \right) = \frac{\psi - \psi_0}{\sqrt{3}} + \frac{\sin 2\psi - \sin 2\psi_0}{2\sqrt{3}}, \quad (21)$$

где  $\psi_0$  — значение  $\psi$  при  $r = \rho_0$ . Переходя в (19) к дифференцированию по  $\psi$  с помощью (20), получаем уравнение для  $h$  в виде

$$\frac{dh}{h d\psi} = -\frac{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi + 1) \cos^2 \psi}{\sqrt{3}},$$

интегрируя которое находим

$$\ln \left( \frac{h}{h_0} \right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} [2(\psi_0 - \psi) + \sqrt{3} (\cos 2\psi - \cos 2\psi_0) + \sin 2\psi_0 - \sin 2\psi]. \quad (22)$$

Здесь  $h_0$  — значение  $h$  при  $\psi = \psi_0$  (или  $r = \rho_0$ ). Переходя в (16) к дифференцированию по  $\psi$  с помощью (4), (5), (20), получаем уравнение для  $u_s$  в виде

$$\frac{du_s}{u_s d\psi} = \frac{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \psi - 1) \cos^2 \psi}{\sqrt{3}},$$

интегрируя которое находим

$$\ln \left( \frac{u_s}{u_0} \right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} [2(\psi_0 - \psi) + \sqrt{3} (\cos 2\psi_0 - \cos 2\psi) + \sin 2\psi_0 - \sin 2\psi].$$

Здесь  $u_0$  — значение  $u_s$  при  $\psi = \psi_0$  (или  $r = \rho_0$ ). Из (13), (22) следует

$$\varepsilon_n = \frac{1}{4\sqrt{3}} [2(\psi_0 - \psi) + \sqrt{3} (\cos 2\psi - \cos 2\psi_0) + \sin 2\psi_0 - \sin 2\psi] - \ln \left( \frac{h_i}{h_0} \right). \quad (23)$$

С использованием (7)–(9) уравнение (12) преобразуется к виду

$$\xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{|u_s \cos \varphi|}{r} \left[ 1 + \frac{\xi_1}{\xi_2} + \left( \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Исключая в этом уравнении с помощью (15) отношение  $\xi_1/\xi_2$ , получаем

$$\xi_{eq} = r^{-1} |u_s \cos \varphi / \cos \psi|. \quad (24)$$

С использованием (4), (5) уравнение (11) преобразуется к форме

$$u_s \cos \varphi \frac{d\varepsilon_{eq}}{dr} = \xi_{eq}. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (25) и переходя к дифференцированию по  $\psi$  с помощью (20), находим

$$\frac{d\varepsilon_{eq}}{d\psi} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \psi. \quad (26)$$

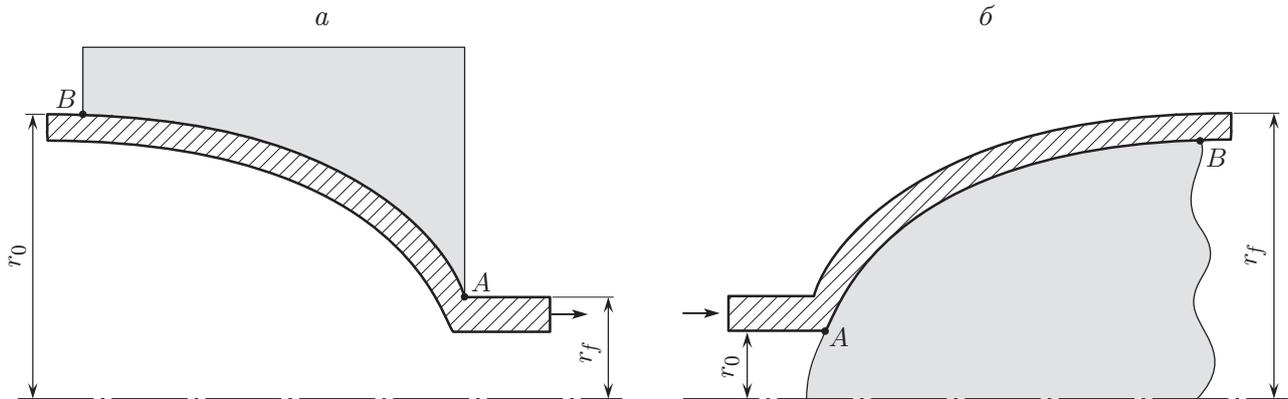


Рис. 3. Обжатие по матрице путем волочения (а) и продавливания (б) трубы

Знак в уравнении (26) выбирается таким образом, чтобы величина  $\varepsilon_{eq}$  увеличивалась по мере движения материальной точки в пластической зоне. Интегрируя уравнение (26) при условии  $\varepsilon_{eq} = 0$  при  $\psi = \psi_i$ , получаем

$$\varepsilon_{eq} = (2/\sqrt{3}) |\sin \psi - \sin \psi_i|. \quad (27)$$

Здесь  $\psi_i$  — значение  $\psi$  в окрестности входа в пластическую зону. Если функция  $\Omega(\varepsilon_n/\varepsilon_{eq})$  известна, то, подставляя (23), (27) в (10) и задавая начальное значение параметра шероховатости поверхности, можно вычислить распределение параметра шероховатости поверхности вдоль очага деформации и в изделии.

При значении  $\psi$ , заданном в одной точке  $r = \rho_0$ , полученное решение для параметра шероховатости свободной поверхности зависит только от  $\psi$ . В то же время из (21) следует, что  $r$  также зависит только от  $\psi$ . Поэтому параметр шероховатости свободной поверхности зависит от  $r$ , но не зависит от формы инструмента. Однако решение должно удовлетворять условию отсутствия отрыва материала оболочки от поверхности инструмента, которое контролируется знаком величины  $\sigma$  и далее не рассматривается. Из первого уравнения системы (3) следует, что форма инструмента оказывает влияние на величину  $\sigma$ . Так как главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зависят от  $\psi$ , что следует из (14), то левая часть первого уравнения системы (3) является функцией  $\psi$ , если известны зависимости  $R_1$  и  $R_2$  от  $\psi$ . Если форма инструмента задана в координатах  $(r, z)$ , то величину  $R_1$  можно представить в виде функции  $r$ . Поскольку зависимость  $r$  от  $\psi$  определяется уравнением (21), зависимость  $R_1$  от  $\psi$  также известна. Кроме того, интегрируя (5), получаем

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \int_{\rho_0}^r \frac{d\rho}{R_1(\rho)}, \quad (28)$$

где  $\varphi_0$  — значение  $\varphi$  при  $r = \rho_0$ . Так как зависимость  $r$  от  $\psi$  определяется уравнением (21), то зависимость  $\varphi$  от  $\psi$  следует из (28). В этом случае зависимость  $R_2$  от  $\psi$  следует из (1). Таким образом, с учетом (22) определена зависимость  $\sigma$  от  $\psi$ , что позволяет проверить выполнение условия отсутствия отрыва материала оболочки от поверхности инструмента.

**4. Шероховатость свободной поверхности при обжатии труб.** Типичные процессы обжатия труб описаны в [10]. Рассмотрим процесс обжатия по матрице с уменьшающимся диаметром путем волочения трубы (рис. 3,а) и процесс обжатия по матрице с увеличивающимся диаметром путем продавливания трубы (рис. 3,б). Начальный радиус трубы обозначен  $r_0$ , конечный —  $r_f$ . В рамках используемой теории различие между внутренним и внешним радиусами несущественно. Заметим, что в рассматриваемых про-

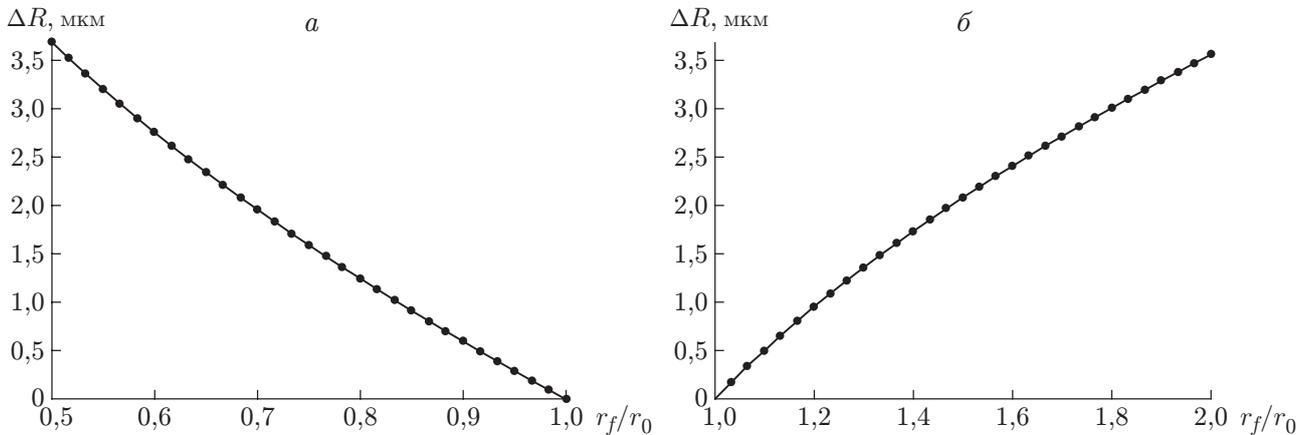


Рис. 4. Зависимость шероховатости свободной поверхности трубы от отношения  $r_f/r_0$ : *a* — при волочении трубы, *б* — при продавливании трубы

пессах деформация  $\varepsilon_n$  имеет заведомо разные знаки. Влияние знака этой деформации на шероховатость свободной поверхности отмечалось в [17].

Для процесса, представленного на рис. 3, *a*, напряжение  $\sigma_1$  на входе в очаг деформации (точка *A*) равно нулю. Кроме того, очевидно, что в окрестности этой точки  $\sigma_2 < 0$ . Поэтому из (14) следует, что  $\psi = \psi_i = \psi_0 = 0$  при  $r = r_0 = \rho_0$ . Тогда из (21) получаем

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{\psi}{\sqrt{3}} + \frac{\sin 2\psi}{2\sqrt{3}}.$$

В этом случае значение  $\psi$  на выходе из очага деформации (точка *B* на рис. 3, *a*) обозначим  $\psi_f$ . Значение  $\psi_f$  определяется из уравнения

$$\ln\left(\frac{r_f}{r_0}\right) = \frac{\psi_f}{\sqrt{3}} + \frac{\sin 2\psi_f}{2\sqrt{3}}. \quad (29)$$

Приращение параметра шероховатости свободной поверхности в изделии относительно начального значения этого параметра находим из (10), (23), (27), полагая  $\psi_0 = \psi_i = 0$ ,  $\psi = \psi_f$ ,  $h_0 = h_i$ . Из уравнения (29) можно вычислить зависимость этого приращения от  $r_f/r_0$  (рис. 4, *a*). Предполагалось, что  $a_g\Omega(\varepsilon_n/\varepsilon_{eq})$  — кусочно-линейная функция (см. рис. 2). В рассматриваемом случае должно выполняться условие  $\sigma \geq 0$ , которое при заданной форме инструмента проверяется с помощью процедуры, описанной в конце п. 3.

Для процесса, представленного на рис. 3, *б*, напряжение  $\sigma_1$  на выходе из очага деформации (точка *B*) равно нулю. Кроме того, очевидно, что в окрестности этой точки  $\sigma_2 > 0$ . Поэтому из (14) следует, что  $\psi = \psi_0 = \pi$  при  $r = r_0 = r_f$ . Тогда из (21) получаем

$$\ln\left(\frac{r}{r_f}\right) = \frac{\psi - \pi}{\sqrt{3}} + \frac{\sin 2\psi}{2\sqrt{3}}.$$

В этом случае значение  $\psi$  на входе в очаг деформации (точка *A* на рис. 3, *б*) определяется из уравнения

$$\ln\left(\frac{r_0}{r_f}\right) = \frac{\psi_i - \pi}{\sqrt{3}} + \frac{\sin 2\psi_i}{2\sqrt{3}}. \quad (30)$$

Приращение параметра шероховатости свободной поверхности в изделии относительно начального значения этого параметра находим из (10), (23), (27), полагая  $\psi = \psi_0 = \pi$ . При этом отношение  $h_i/h_0$  определяется с помощью уравнения (22):

$$\ln\left(\frac{h_i}{h_0}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} [2(\pi - \psi_i) + \sqrt{3} (\cos 2\psi_i - 1) - \sin 2\psi_i]. \quad (31)$$

Из уравнений (30), (31) можно вычислить зависимость  $\Delta R$  от  $r_f/r_0$  (рис. 4,б). Предполагалось, что  $a_g\Omega(\varepsilon_n/\varepsilon_{eq})$  — кусочно-линейная функция (см. рис. 2). В рассматриваемом случае должно выполняться условие  $\sigma \leq 0$ , которое при заданной форме инструмента проверяется с помощью процедуры, описанной в конце п. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Hwang Y. M., Kuo T. Y.** Dieless drawing of stainless steel tubes // Intern. J. Adv. Manufactur. Technol. 2013. V. 68, N 5–8. P. 1311–1316.
2. **Furushima T., Imagawa Y., Manabe K., Sakai T.** Effects of oxidation and surface roughening on drawing limit in dieless drawing process of SUS304 stainless steel microtubes // J. Mater. Process. Technol. 2015. V. 223. P. 186–192.
3. **Furushima T., Tsunozaki H., Manabe K., Alexandrov S.** Ductile fracture and free surface roughening behaviors of pure copper foils for micro/meso-scale forming // Intern. J. Machine Tools Manufacture. 2014. V. 76. P. 34–48.
4. **Fukuda M., Yamaguchi K., Takakura N., Sakano Y.** Roughening phenomenon of free surface of products in sheet metal forming // J. Japan Soc. Technol. Plast. 1974. V. 15. P. 994–1002.
5. **Parmar A., Mellor P. B., Chakrabarty J.** A new model for the prediction of instability and limit strains in thin sheet metal // Intern. J. Mech. Sci. 1977. V. 19. P. 389–398.
6. **Jain M., Lloyd D. J., Macewen S. R.** Hardening laws, surface roughness and biaxial tensile strains of sheet aluminium alloys // Intern. J. Mech. Sci. 1996. V. 38. P. 219–232.
7. **Unfer R. K., Bressan J. D.** Evolution of roughness on straining interstitial free — IF steel sheet // Key Engng Mater. 2012. V. 504–506. P. 83–88.
8. **Alexandrov S., Manabe K., Furushima T.** A new empirical relation for free surface roughening // ASME J. Manufactur. Sci. Engng. 2011. V. 133. 014503.
9. **Becker R.** Effects of strain localization on surface roughening during sheet forming // Acta Mater. 1998. V. 46. P. 1385–1401.
10. **Ильюшин А. А.** Обжатие труб // Инж. сб. 1941. Т. 1, вып. 1. С. 37–42.
11. **Chakrabarty J., Alexander J. M.** Hydrostatic bulging of circular diaphragms // J. Strain Anal. 1970. V. 5, N 3. P. 155–161.
12. **Marciniak Z.** Mechanics of sheet metal forming / Z. Marciniak, J. Duncan. L.: Edward Arnold, 1992.
13. **Chung K., Richmong O.** Ideal forming. 2. Sheet forming with optimum deformation // Intern. J. Mech. Sci. 1992. V. 34, N 8. P. 617–633.
14. **Majlessi S. A., Lee D.** Deep drawing of square-shaped sheet metal parts. 1. Finite element analysis // Trans. ASME. J. Engng Industry. 1993. V. 115, N 1. P. 102–109.
15. **Jung D. W., Yang K. B.** Comparative investigation into membrane, shell and continuum elements for the rigid-plastic finite element analysis of two-dimensional sheet metal forming problems // J. Mater. Process. Technol. 2000. V. 104, N 3. P. 185–190.
16. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
17. **Osakada K., Oyane M.** On the roughening phenomenon of free surface in deformation process // Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. 1970. V. 36, N 286. P. 1017–1022.

Поступила в редакцию 12/II 2015 г.,  
в окончательном варианте — 12/II 2016 г.