

УДК 532.546

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕТОЧНОГО МЕТОДА БОЛЬЦМАНА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ, ОБРАЗОВАННУЮ ХАОТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

М. Эззатабадипур, Х. Захеди\*, М. М. Кешткар\*\*

Сирджанский сталелитейный комплекс, Сирджан, Иран

\* Исфаханский университет, Исфахан, Иран

\*\* Керманский филиал Исламского университета Азад, Керман, Иран

E-mails: Mohammadzatabadi@gmail.com, germanium\_110@yahoo.de, mkeshkar54@yahoo.com

С использованием решеточного метода Больцмана выполнено моделирование течения жидкости через изотропную пористую среду с хаотически распределенными жесткими частицами эллиптической формы. Определены зависимости величины уменьшения давления и проницаемости от числа Рейнольдса. Исследовано влияние отношения длин большой и малой полуосей эллипса на проницаемость среды при различных значениях пористости. Получена зависимость величины уменьшения давления от вязкости жидкости при различных значениях отношения длин большой и малой полуосей эллипса и величины пористости. Исследовано влияние различных параметров задачи на извилистость пористой среды.

Ключевые слова: решеточный метод Больцмана, условия на криволинейной границе, хаотичное распределение, пористая среда, частицы эллиптической формы, проницаемость.

DOI: 10.15372/PMTF20170301

**Введение.** Пористые среды различного типа применяются в промышленных установках (катализаторы, гранулы в отопительных котлах, вещества, используемые при прямом восстановлении металлов, различные горелки, фильтры и т. п.) [1–3]. При описании движения жидкости через пористую среду важной характеристикой является величина уменьшения давления. Моделирование течения жидкости через пористую среду с использованием традиционных численных методов гидродинамики является сложной задачей и требует больших временных затрат вследствие сложной геометрии поверхностей частиц. Решеточный метод Больцмана является альтернативой традиционным численным методам гидродинамики [4–13]. В работе [14] с использованием решеточного метода Больцмана определена проницаемость волокнистой пористой среды. В [15] в результате численного моделирования установлено, что увеличение числа частиц приводит к существенному уменьшению давления. Свойства анизотропной пористой среды изучены в работе [16], в которой определена безразмерная проницаемость среды при различных значениях отношения длин

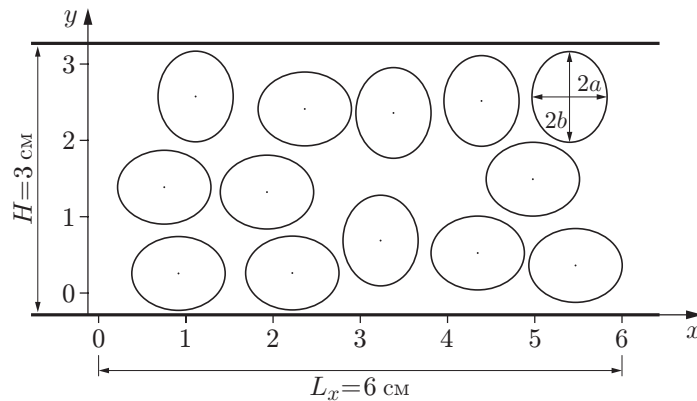


Рис. 1. Схема пористой среды со случайно распределенными частицами эллиптической формы при  $\varphi = 0,7$

большой и малой полуосей эллиптических частиц. В [16] установлено, что проницаемость увеличивается с увеличением пористости независимо от отношения длин большой и малой полуосей эллиптических частиц. В [17] с использованием решеточного метода Больцмана выполнено численное моделирование течения через пористую среду неньютоновской жидкости. В [18] проведено численное моделирование течения Стокса (течения с малыми числами Рейнольдса) в пористой среде и показано, что время сходимости численного решения зависит от вязкости жидкости, причем в случае жидкостей с меньшей вязкостью время сходимости меньше. В [19] выполнено численное моделирование эндотермической каталитической реакции в пористой среде, являющейся катализатором. Полученные в работе [19] с использованием решеточного метода Больцмана изолинии скорости, температуры и концентрации согласуются с соответствующими изолиниями, полученными с использованием численных методов гидродинамики. В [20] выполнено моделирование течения жидкости в стохастической пористой среде и определены проницаемость и извилистость такой среды. Установлено, что проницаемость стохастической пористой среды меньше проницаемости пористой среды с регулярным строением.

В данной работе изучается течение жидкости через пористую среду с хаотически распределенными жесткими частицами эллиптической формы. Среда находится между двумя параллельными пластинами. Определяются величина уменьшения давления в жидкости при ее прохождении через пористую среду, проницаемость и извилистость пористой среды, а также зависимость проницаемости среды от пористости и числа Кнудсена.

**1. Постановка задачи.** Пусть инертная пористая среда занимает прямоугольную область размером  $L_x \times H$ , расположенную между двумя параллельными пластинами, являющимися стенками воздуховода. Пористая среда образована хаотически расположенными частицами эллиптической формы (рис. 1). Малый и большой диаметры эллипсов равны  $2a$  и  $2b$  соответственно. Предполагается, что частицы являются жесткими и не соприкасаются друг с другом. Однофазная вязкая ньютоновская жидкость поступает в воздуховод через входное сечение ( $x = 0$ ) с равномерно распределенной скоростью  $u_0$ . Поток полагается несжимаемым установившимся и ламинарным. Решается двумерная задача, поскольку предполагается, что размеры пористой среды и пластин в направлении, перпендикулярном направлению потока, достаточно большие.

При одних и тех же количестве одинаково ориентированных частиц и их расположении пористость среды изменяется при изменении соотношения  $\alpha$  длин полуосей эллипсов. В данной работе это соотношение изменялось в диапазоне от 0,65/0,45 до 1,20/0,55. При этом пористость изменялась в интервале от 0,6 до 0,9. Распределение частиц в области

задавалось с помощью пакета MATLAB, в котором использовался код, написанный авторами данной работы. Входными данными являлись координаты центров и диаметры частиц. С использованием этих данных создавалась стохастическая среда и вычислялась ее пористость.

В последнее время решеточный метод Больцмана, разработанный для решения задач статистической термодинамики, применяется при численном моделировании течений однофазных и многофазных жидкостей [4–15]. В данной работе используется двумерный решеточный метод Больцмана с одним временем релаксации. После дискретизации решеточные уравнения Больцмана записываются в виде

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \delta x, t + \delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha(f(\mathbf{x}, t)), \quad \alpha = 0, 1, \dots, 8,$$

где  $f_\alpha$  — функция распределения;  $\mathbf{x}, t$  — радиус-вектор частицы и время соответственно;  $\delta x, \delta t$  — шаги по пространству и времени соответственно (в данной работе  $\delta x = \delta t = 1$ );  $\mathbf{e}_\alpha = \delta \mathbf{x} / \delta t$  — скорость смещения узлов решетки;  $\alpha$  — номер направления в решетке;  $\Omega_\alpha$  — оператор столкновений.

Оператор столкновений аппроксимируется следующим образом:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha, t + 1) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{f_\alpha - f_\alpha^{eq}}{\tau}.$$

Здесь  $\tau$  — безразмерное время релаксации,

$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left( 1 + 3\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_\alpha \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} u^2 \right) —$$

равновесная функция распределения. Давление и плотность связаны соотношением

$$p = \rho c_s^2,$$

где  $c_s = c / \sqrt{3}$  — скорость звука. Число Маха определяется следующим образом:

$$M = u / c_s.$$

Следует отметить, что решеточный метод Больцмана можно использовать только при малых скоростях решетки, т. е. при малых числах Маха. Число Кнудсена определяется как отношение длины свободного пробега  $l$  к характерной длине  $h$  [21]:

$$\text{Kn} = l / h.$$

В качестве характерной длины принят диаметр частицы  $D_p$ , длина свободного пробега вычисляется по формуле  $l = \mathbf{e} \lambda = (\delta x / \delta t) \lambda = \tau \delta x$  ( $\tau = \lambda / \delta t$ ), поэтому число Кнудсена равно ( $\tau = \delta x \cdot 1$ ):

$$\text{Kn} = \frac{l}{h} = \frac{\tau \delta x}{h} = \frac{1}{D_p}.$$

На криволинейных поверхностях (границах) частиц используется процедура, предложенная в [22]. На рис. 2 через  $x_b, x_f, x_w$  обозначены узлы, принадлежащие твердому телу, жидкости и поверхности частицы соответственно, причем

$$\Delta = \frac{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_w|}{|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b|}, \quad 0 \leq \Delta \leq 1.$$

Величина  $\Delta$  стремится к нулю, если узел  $x_b$  приближается к узлу  $x_f$ , и  $\Delta \rightarrow 1$ , если узел  $x_w$  приближается к узлу  $x_b$ . В [11] предложено интерполяционное соотношение

$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_b, t) = (1 - \chi) \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_f, t) + \chi f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b, t) + 2w_\alpha \rho \frac{3}{e^2} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{u}_w,$$

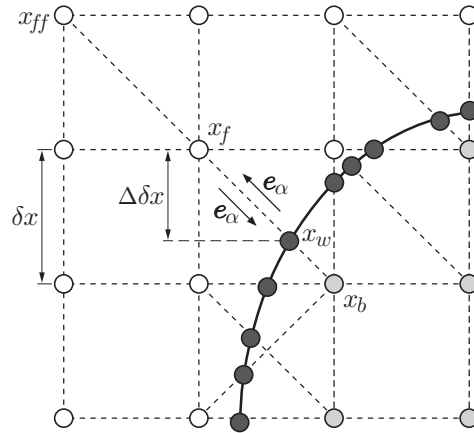


Рис. 2. Геометрия решетки в окрестности поверхности частицы

где

$$f_{\alpha}^{(*)}(\mathbf{x}_b, t) = w_{\alpha} \rho(\mathbf{x}_f, t) \left( 1 + \frac{3}{e^2} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{u}_{bf} + \frac{9}{2e^4} (\mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{u}_f)^2 - \frac{3}{2e^2} \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f \right),$$

$$\mathbf{u}_{bf} = \left( 1 - \frac{3}{2\Delta} \right) \mathbf{u}_f + \frac{3}{2\Delta} \mathbf{u}_w, \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau + 1/2} \quad \text{при } \Delta \geq 1/2,$$

$$\mathbf{u}_{bf} = \mathbf{u}_{ff} = \mathbf{u}_f(\mathbf{x}_f + \mathbf{e}_{\bar{\alpha}} \delta t, t), \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau - 2} \quad \text{при } \Delta < 1/2,$$

$u_w$  — скорость криволинейной поверхности (в данной работе скорость  $u_w$  считается равной нулю, т. е. положение жестких частиц в пространстве не изменяется);  $\chi$  — весовой множитель, зависящий от  $\Delta$ ;  $\mathbf{u}_{bf}$  — фиктивная скорость;  $f_{\alpha}^{(*)}$  — фиктивная равновесная функция распределения.

Пористость, являющаяся важной характеристикой пористой среды, определяется как отношение объема пор  $V_{pore}$  к объему всей среды:

$$\varphi = \frac{V_{pore}}{V_{pore} + V_{solid}}.$$

В случае двумерной области площадь поверхности всех пор равна разности площади расчетной области  $L_x \times H$  и площади поверхности всех частиц. В пористой среде можно определить два числа Рейнольдса: одно — по расстоянию между пластинами  $H$ , другое — по диаметру частицы  $D_p$ :

$$\text{Re}_H = u_0 H / \nu, \quad \text{Re}_{D_p} = u_0 D_p / \nu.$$

При моделировании течения через пористую среду, для которой число Рейнольдса  $\text{Re}_{D_p}$  очень мало, применяется закон Дарси. В случае некругового поперечного сечения гидродинамический диаметр определяется следующим образом:

$$D_h = 4A/P$$

( $A$ ,  $P$  — площадь и периметр поперечного сечения частиц соответственно). Периметр эллипса вычисляется по соотношению

$$P \approx \pi(a+b) \left( 1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right), \quad h = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Средний перепад давления в любом сечении вычисляется по формуле [2]

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_{out} - \bar{p}_{in},$$

где  $\bar{p}_{in}, \bar{p}_{out}$  — значения среднего давления жидкости во входном сечении канала с пористой средой и в выходном сечении соответственно. Среднее давление вычисляется по формуле

$$\bar{p} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{N_y} p_i, \quad H = N_y \delta y \quad (\delta y = 1),$$

где  $N_y$  — число узлов решетки в направлении  $y$  (см. рис. 1). В данной работе  $N_y = 67$ . Градиент давления вычисляется по формуле

$$\nabla\bar{p} = \frac{\Delta\bar{p}}{L_x} = \frac{\bar{p}_{out} - \bar{p}_{in}}{L_x}, \quad L_x = N_x \delta x \quad (\delta x = 1).$$

Число узлов решетки в направлении  $x$   $N_x$  изменялось в диапазоне от 106 до 114. С учетом указанных выше допущений закона Дарси уравнение движения жидкости через пористую среду принимает вид [3, 4]

$$u = -\frac{K}{\mu} \nabla\bar{p}, \quad K = -\frac{\mu}{\nabla\bar{p}} u, \quad (1)$$

где  $u$  — скорость;  $\nabla\bar{p}$  — градиент давления в направлении течения;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $K$  — тензор проницаемости пористой среды. Для изотропной среды, рассматриваемой в данной работе, этот тензор является скалярной величиной с размерностью  $[м^2]$ . Проницаемость зависит от геометрии пористой среды и не зависит от вязкости жидкости. В данной работе безразмерная проницаемость вычисляется с использованием соотношения (1) в соответствии с [2, 16].

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** С использованием предложенного метода решена задача о течении жидкости между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии  $H$  друг от друга, проведено сравнение численного решения с аналитическим решением Пуазейля. При численном решении в качестве масштаба для измерения скорости использовалась величина  $l_u/t_s$ , где  $l_u, t_s$  — шаг решетки и шаг по времени соответственно. При вычислении скорости максимальная погрешность не превышала  $3,608 \cdot 10^{-6}$ . Расчеты проводились для решетки, содержащей  $110 \times 67$  узлов. Время вычисления в пакете MATLAB составляло приблизительно 18 мин.

В табл. 1 приведены значения градиента давления  $\nabla\bar{p}_{РМБ}$  (РМБ — решеточный метод Больцмана), вычисленные на решетках с различным числом узлов. С увеличением числа узлов значение градиента давления меняется незначительно. На рис. 3 приведена зависимость безразмерной величины уменьшения давления от числа Рейнольдса  $Re_{D_h}$  при соотношении длин полуосей эллипса, равном 6 : 8, и различных значениях пористости. При  $Re_{D_h} \geq 6$  скорость уменьшения давления остается практически постоянной.

На рис. 4 приведена зависимость безразмерной проницаемости от числа Рейнольдса  $Re_{D_h}$ . Видно, что с увеличением числа Рейнольдса проницаемость уменьшается. На

Таблица 1

Значения градиента давления, вычисленные на решетках с различным числом узлов

$N_x \times N_y$	$D_h, м$	$\nabla\bar{p}_{РМБ} \cdot 10^5$
106 × 67	0,0017	−2,5198
110 × 67	0,0032	−6,2637
114 × 67	0,0046	−18,4180

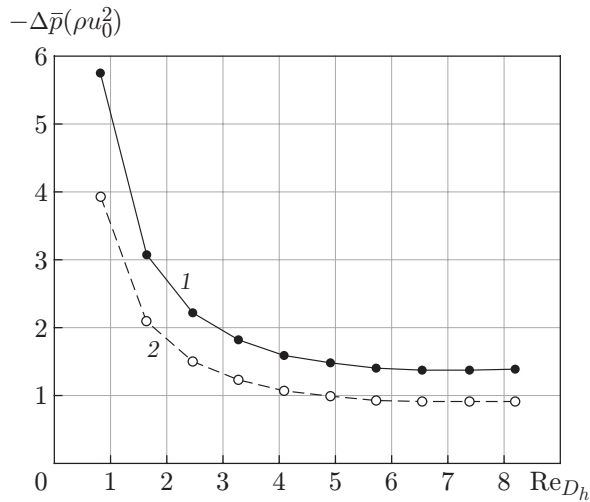


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость величины уменьшения давления от числа Рейнольдса  $Re_{D_h}$  при  $\alpha = 6 : 8$  и различных значениях пористости:

1 —  $\varphi = 0,7$ , 2 —  $\varphi = 0,8$

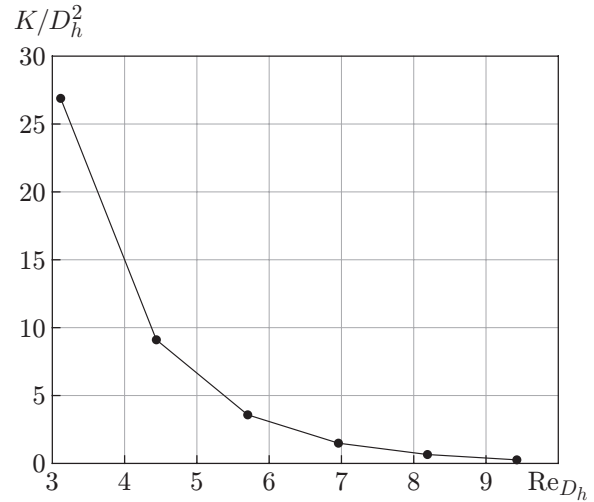


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость проницаемости от числа Рейнольдса  $Re_{D_h}$

рис. 5 приведены значения проницаемости при различных значениях отношения  $\alpha$  и пористости  $\varphi$ . При одном и том же значении отношения  $\alpha$  максимальное значение проницаемости достигается при максимальном значении пористости. При одном и том же значении пористости максимальное значение проницаемости достигается при максимальном отношении  $\alpha$ .

На рис. 6 приведена зависимость величины уменьшения давления от вязкости жидкости при различных значениях пористости и отношения  $\alpha$ . Как следует из приведенных зависимостей, с увеличением вязкости величина уменьшения давления увеличивается, что согласуется с уравнением Кармана — Козени

$$\nabla p = \frac{dp}{dx} = -\frac{180\mu u(1-\varphi)^2}{\bar{D}^2\varphi^3},$$

где  $\bar{D}$  — средний диаметр частиц. Это уравнение справедливо для ламинарного течения жидкости. Из анализа приведенных на рис. 6 зависимостей также следует, что при одном и том же отношении  $\alpha$  отрицательная величина уменьшения давления уменьшается с уменьшением пористости, при одном и том же значении пористости отрицательная величина уменьшения давления уменьшается с уменьшением отношения  $\alpha$ .

Извилистость поровых каналов является одной из характеристик пористой среды и определяется как отношение длины пути, пройденного частицей, к длине ее кратчайшего пути в направлении течения [4, 20]:

$$T = \frac{ds}{dx}.$$

Извилистость всегда больше единицы. В данной работе средняя по области течения извилистость вычислялась по формуле

$$\bar{T} = \frac{\sum_i \sum_j U_{mag}(i, j)}{\sum_i \sum_j |U_x(i, j)|}, \quad (2)$$

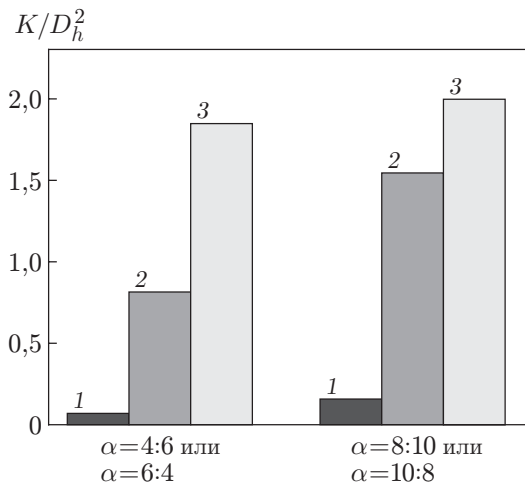


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость безразмерной проницаемости от пористости среды  $\varphi$  при различных значениях отношения  $\alpha$ :

1 —  $\varphi = 0,6$ , 2 —  $\varphi = 0,75$ , 3 —  $\varphi = 0,8$

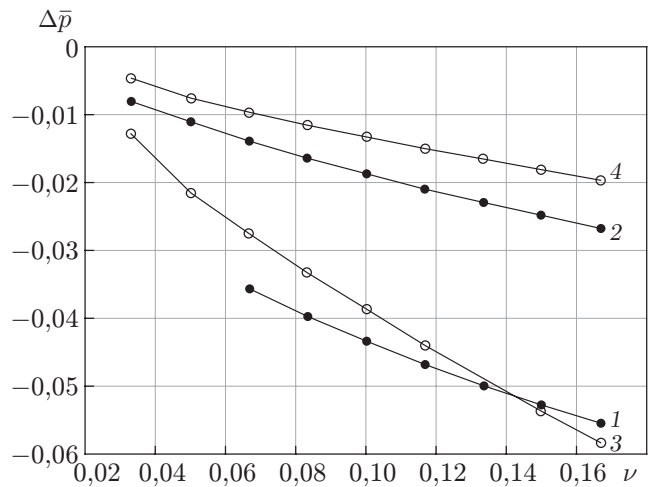


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость величины уменьшения давления от вязкости при различных значениях пористости  $\varphi$  и отношения  $\alpha$ :

1, 2 —  $\alpha = 4 : 6$  (1 —  $\varphi = 0,7$ , 2 —  $\varphi = 0,8$ ), 3, 4 —  $\alpha = 6 : 8$  (3 —  $\varphi = 0,7$ , 4 —  $\varphi = 0,8$ )

где  $U_{mag}$  — абсолютная величина скорости. В результате вычислений по формуле (2) установлено, что с увеличением пористости извилистость уменьшается. Если пористость стремится к единице, извилистость также стремится к единице. Для величины извилистости предложена следующая аппроксимация:

$$\bar{T}(\varphi) = -0,6518\varphi^3 + 1,609\varphi^2 - 1,422\varphi + 1,47. \tag{3}$$

Средняя квадратичная погрешность и коэффициент смешанной корреляции аппроксимации (3) равны  $1,0279 \cdot 10^{-4}$  и 0,9999 соответственно. Анализ данных, приведенных в табл. 2, позволяет сделать вывод о характере зависимости величины уменьшения давления и градиента давления от вязкости жидкости. При одних и тех же значениях пористости и отношения  $\alpha$  с увеличением вязкости число Рейнольдса уменьшается, а величины уменьшения давления и градиента давления увеличиваются. Это означает, что при транспортировке жидкостей с большой вязкостью необходимо увеличивать мощность насоса или компрессора.

Таблица 2

Зависимость величины уменьшения давления жидкости и градиента давления от вязкости при  $u_0 = 0,1$

$\varphi$	$D_h$ , м	Kn	$\tau$	$\nu_{РМБ}$	$Re_H$	$Re_{D_h}$	$\Delta \bar{p}_{РМБ}$	$\nabla \bar{p}_{РМБ} \cdot 10^5$
0,7	0,0023	0,1052	0,7	0,0666	99,0	14,2570	-0,0356	-18,0750
			0,8	0,1000	66,0	9,5047	-0,0433	-22,0220
			0,9	0,1333	49,5	7,1285	-0,0498	-25,2930
0,8	0,0034	0,0732	0,7	0,0666	99,0	20,4668	-0,0096	-5,0500
			0,8	0,1000	66,0	13,6445	-0,0132	-6,9400
			0,9	0,1333	49,5	10,2334	-0,0165	-8,6700

В качестве критерия окончания вычислений использовалась относительная погрешность определения скорости:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\sum_i \sum_j (u_{m+1}(i, j) - u_m(i, j))}{\sum_i \sum_j u_m(i, j)}$$

( $m$  — номер итерации).

**Заключение.** В работе с использованием решеточного метода Больцмана выполнено численное моделирование течения жидкости в пористой среде, образованной хаотично распределенными жесткими частицами эллиптической формы. Вычислены представляющие практический интерес характеристики среды (пористость и проницаемость). При отношении длин малой и большой полуосей эллипса  $\alpha$ , равном 6 : 8, значениях пористости  $\varphi = 0,7; 0,8$  и  $Re_{D_h} \geq 6$  с увеличением числа Рейнольдса  $Re_{D_h}$  безразмерная величина уменьшения давления практически не меняется. При одном и том же значении отношения  $\alpha$  с увеличением пористости проницаемость увеличивается. При одном и том же значении пористости с увеличением отношения  $\alpha$  проницаемость также увеличивается. С увеличением вязкости жидкости отрицательные значения уменьшения давления и градиента давления увеличиваются независимо от значения пористости и отношения  $\alpha$ . При одном и том же значении пористости с увеличением отношения  $\alpha$  проницаемость увеличивается. С увеличением пористости уменьшается извилистость пористой среды. Для величины извилистости предложена полиномиальная аппроксимирующая зависимость.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Nield D. A.** Convection in porous media. 3rd ed. / D. A. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer, 2006.
2. **Vafai K.** Handbook of porous media. 2nd ed. Boca Raton: Taylor and Francis, 2005.
3. **Sukop M. C., Thorne D. T.** Lattice Boltzmann modeling: An introduction for geoscientists and engineers. Berlin: Springer, 2006.
4. **Chen S., Doolen G. D.** Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 329–364.
5. **Succi S.** The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001.
6. **Yua D., Meia R., Luo L. S., Shyy W.** Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation // Progr. Aerospace Sci. 2003. V. 39. P. 329–367.
7. **Wagner A. J.** A practical introduction to the lattice Boltzmann method. Fargo: North Dakota State Univ., 2008.
8. **Luo L. S.** Lattice Boltzmann methods for computational fluid dynamics. Braunschweig: Tech. Univ. Braunschweig, 2003.
9. **Mohamad A. A.** Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes. L.: Springer, 2011.
10. **Liao Q., Jen T. C.** Application of lattice Boltzmann method in fluid flow and heat transfer // Computational fluid dynamics: technology and applications. Chap. 2. S. 1., 2011. P. 29–68.
11. **Mei R., Shyy W., Yu D., Luo L. S.** Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary // J. Comput. Phys. 2000. V. 161. P. 680–699.
12. **Wolf-Gladrow D. A.** Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: An introduction. Berlin: Springer, 2005.
13. **Guo Z., Zhao T. S.** Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. 363048.



14. **Nabovati A., Llewellyn E. W., Sousa A. C. M.** A general model for the permeability of fibrous porous media based on fluid flow simulations using the lattice Boltzmann method // *Composites*. 2009. V. 40. P. 860–891.
15. **Machado R. L.** Numerical simulations of surface reaction in porous media with lattice Boltzmann // *Chem. Engng Sci.* 2012. V. 69, N 1. P. 628–643.
16. **Deshpande A. P., Srikanth A.** Quantitative estimation of permeability with lattice Boltzmann // *J. Chem. Engng.* 2005. V. 83. P. 808–815.
17. **Ortega L., Romo S.** Lattice Boltzmann simulation of sago (Metroxylon sagu) starch solution in porous media // *Canad. J. Chem. Engng.* 2008. V. 86. P. 667–675.
18. **Talon L., Bauer D., Gland N., et al.** Assessment of the two relaxation time lattice-Boltzmann scheme to simulate Stokes flow in porous media // *Water Resources Res.* 2012. V. 48. P. 452–476.
19. **Li X., Cai J., Xin F., et al.** Lattice Boltzmann simulation of endothermal catalytic reaction in catalyst porous media // *Appl. Thermal Engng.* 2013. V. 50. P. 1194–1200.
20. **Nabovati A., Sousa A. C. M.** Fluid flow simulation in random porous media at pore level using lattice Boltzmann method // *Proc. of the 5th Intern. conf. on fluid mechanics, Shanghai, 2007.* Berlin: Tsinghua Univ. Press: Springer, 2007. P. 518–521.
21. **Cho H., Jeong N., Sung H. J.** Seriate microfluidic droplet coalescence under optical forces in a channel flow // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2013. V. 44. P. 435–446.
22. **Mei R., Luo L. S., Shyy W.** Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation // *Progr. Aerospace Sci.* 2003. V. 39. P. 329–367.

*Поступила в редакцию 12/III 2015 г.,  
в окончательном варианте — 16/III 2016 г.*

---