УДК 532.517.4

А. Г. Бершадский

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Моделирование процессов переноса энергии в однородной изотропной турбулентности с помощью уравнений для спектральной плотности энергии имеет долгую историю [1, 2]. Каждая из известных моделей в какой-то мере отражает свойства переноса энергии по спектру. Но нужно отметить, что эти спектральные модели, как правило, никак не отражали каскадный характер переноса, т. е. перенос последовательно, через ближайших соседей по спектру. Зато эту специфическую черту турбулентного переноса хорошо фиксируют так называемые редукционные модели (Обухова, Деснянского — Новикова, Гледзера и др. [3—5]). Представляет интерес показать каскадный характер переноса непосредственно в спектральной модели, имеющей дело со спектральной плотностью энергии. В настоящей работе предлагается такая модель для однородной изотропной турбулентности.

В рамках модели получены на масштабно-инвариантном интервале стационарный режим Колмогорова — Обухова (закон «—5/3»), а также нестационарный режим со спектральной зависимостью $E(k, t) \sim t^{-2}k^{-3}$. В последнем есть перенос энергии от мелкомасштабных пульсаций к крупномасштабным, который обычно связывают с двумерной турбулентностью [6]. Такой режим наблюдался и в решеточной турбулентности, моделирующей двумерную в эксперименте [7]. На диссипативном же интервале (в коротковолновом пределе) модель приводит к спектру $E(k) \sim \exp - ak$, с логарифмической точностью совпадающему с асимптотикой Крейчнана — Кузьмина — Паташинского [8].

Проведен расчет затухания полной пульсационной энергии и роста интегрального масштаба для начальных условий $E_0(k) \sim k^m \exp -(k/k_0)^2$. Получено, что $\overline{u^2} \sim t^{-n}$, $L \sim t^p$, где $n = 2(1 + m)/(3 + m)$; $p = 2/(3 + m)$; L — интегральный масштаб турбулентности. Для $m = 1, 2, 3, 4$ эти формулы дают соответственно $n = 1$, $p = 1/2$; $n = 1{,}2$, $p = 0{,}4$; $n = 4/3$, $p = 1/3$; $n = 10/7$, $p = 2/7$, т. е. широко известные из экспериментов и различных теорий значения [1, 9—14].

Гипотезы о взаимодействии вихрей в турбулентных течениях часто формулируются в виде той или иной формы спектральной функции переноса $T(E;\ k,\ t)$ в уравнении для спектральной функции переноса [1]

$$\partial E(k,\ t)/\partial t = -2\nu k^2 E(k,\ t) + T(E;\ k,\ t) \tag{1}$$

($T(E; k, t)$ — функция от k и t и функционал от $E(k, t)$). С ее помощью учитывается результат инерционного переноса энергии. Явный вид этой функции-функционала неизвестен. Разложим $T(E; k, t)$ в функциональный ряд по степеням $E(k, t)$. В силу нелинейности инерционных эффектов ряд будет аналогичен не ряду Тейлора, а разложениям в окрестности точки ветвления

$$T(E;\ k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_1 \ldots dk_n G(k;\ k_1, \ldots, k_n) E^{1/m}(k_1, t) \ldots E^{1/m}(k_n, t). \tag{2}$$

Здесь m — положительное число (алгебраический порядок точки ветвления), а функция $G(k;\ k_1, \ldots, k_n)$ описывает инерционное воздействие вихрей с масштабами $k_1^{-1}, \ldots, k_n^{-1}$ на вихри с масштабами k^{-1}.

Если задавать кратность дробления (или увеличения) масштаба вихря при каскадном процессе α, реализующуюся с наибольшей вероятностью, то (максимально грубо) каскадный характер взаимодействия можно отразить с помощью аппроксимации

$$G(k;\ k_1, \ldots, k_n) = \sum g_{n,p_1,\ldots,p_n}(k)\, \delta\left(\alpha^{p_1}k - k_1\right) \ldots \delta\left(\alpha^{p_n}k - k_n\right), \tag{3}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $p_1, \ldots, p_n$ могут принимать значения 0, 1, —1; $g_{n,p_1,\ldots,p_n}(k,\ t)$— некоторые функции. Так как в каждом элементарном акте перераспределения энергии должно присутствовать и «самодействие», то в каждом из слагаемых рассматриваемой суммы (3) хотя бы одно из $p_1, \ldots, p_n$ должно быть равно нулю.

При достаточно малых E в разложении (2) можно оставить только лидирующую степень. Она определяется из условия сравнения с эйлеровой моделью движения, а именно с требованием квадратичной нелинейности уравнений движения жидкости. В переводе в термины данной работы оно выглядит как однородность функционала $T(E)$ порядка 3/2. Используя это требование и подставляя (3) в (2), в лидирующем приближении получаем

$$T = \sum g_{p_1p_2p_3}(k)\, E^{1/2}\left(\alpha^{p_1}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_2}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_3}k\right). \tag{4}$$

Здесь p_1, p_2, p_3 принимают значения $0, 1$ или -1, причем в каждом слагаемом суммы хотя бы одно из p_1, p_2, p_3 должно быть равно нулю. Если наложить теперь требование масштабной инвариантности на коэффициентные функции $g_{p_1p_2p_3}(k)$, то (используя также соображения размерности) имеем

$$T = k^{3/2} \sum a_{p_1p_2p_3} E^{1/2}\left(\alpha^{p_1}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_2}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_3}k\right) \tag{5}$$

($a_{p_1p_2p_3}$ — безразмерные постоянные). Подставляя (5) в уравнение (1), находим

$$\partial E(k, t)/\partial t = k^{3/2} \sum a_{p_1p_2p_3} E^{1/2}\left(\alpha^{p_1}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_2}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_3}k\right) - 2\nu k^2 E(k).$$

Если учесть также, что при отсутствии вязкости должен выполняться закон сохранения энергии, т. е.

$$\int_0^\infty k^{3/2} \sum a_{p_1p_2p_3} E^{1/2}\left(\alpha^{p_1}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_2}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_3}k\right) = 0,$$

то получаем

$$\begin{aligned} \partial E(k, t)/\partial t &= k^3 a_1[E^{1/2}(k)E(\alpha k) - \alpha^{-5/2}E(k)E^{1/2}(k/\alpha)] + \\ &+ k^{3/2}a_2[E(k)E^{1/2}(\alpha k) - \alpha^{-5/2}E^{1/2}(k)E(k/\alpha)] - 2\nu k^2 E(k) \end{aligned} \tag{6}$$

(a_1 и a_2 — безразмерные постоянные).

Представляется уместным вспомнить общие принципы, из которых в [4] найдены редуцированные уравнения Обухова — Деснянского — Новикова: 1) квадратичная нелинейность по полю скорости; 2) масштабная инвариантность безразмерных коэффициентов; 3) взаимодействие непосредственно осуществляется только ближайшими соседями по спектру; 4) наличие квадратичного интеграла в невязком случае.

Фактически при выводе спектрального уравнения (6) мы пользовались теми же принципами. Конечно, спектральная модель грубее редукционной. Однако она представляет удобства для непосредственного оперирования спектральной плотностью энергии.

Прежде всего (как и в случае редукционной модели) найдем стационарное решение уравнения (6) в невязком приближении, т. е. решение уравнения

$$\begin{aligned} &k^{3/2}a_1[E^{1/2}(k)E(\alpha k) - \alpha^{-5/2}E(k)E^{1/2}(k/\alpha)] + \\ &+ k^{3/2}a_2[E(k)E^{1/2}(\alpha k) - \alpha^{-5/2}E^{1/2}(k)E(k/\alpha)] = 0. \end{aligned}$$

Кроме тривиального решения $E(k) = 0$, уравнение имеет решение типа

$$E(k) \sim k^{-5/3}, \tag{7}$$

т. е. спектральную плотность энергии в виде закона Колмогорова — Обухова на инерционном интервале. Если учесть вязкость в стационарной ситуации, т. е. уравнение

$$\begin{aligned} &k^{3/2}a_1[E^{1/2}(k)E(\alpha k) - \alpha^{-5/2}E(k)E^{1/2}(k/\alpha)] + \\ &+ k^{3/2}a_2[E(k)E^{1/2}(\alpha k) - \alpha^{-5/2}E^{1/2}(k)E(k/\alpha)], \end{aligned} \tag{8}$$

то можно определить коротковолновую асимптотику $E(k)$. Для случая двукратного дробления (объединения) (при $\alpha = 1/2$ [4]) коротковолновую асимптотику решения уравнения (8) запишем как

$$E(k) \sim k \exp(-ak) \tag{9}$$

(a — постоянная). Такая асимптотика при $k \to \infty$ с логарифмической точностью совпадает с известной коротковолновой асимптотикой Крейчнана — Кузьмина — Паташинского [8]. Для того чтобы описать $E(k)$ на всем вязкоинерционном интервале, включая и инерционное приближение (7) и коротковолновую асимптотику (9), нужно решить уравнения (8), не отбрасывая «вязкое» слагаемое и не используя асимптотическое приближение $k \to \infty$.

Интересен вопрос об обратимости в отсутствие вязкости — вопрос об обратимости уравнения (6) в отсутствие вязкого слагаемого. При замене t на $-t$ (при обращении времени) дробление вихрей нужно заменить объединением. При анализе обратимости нужно вместе с заменой t на $-t$ выполнить замену α на α^{-1}. Нетрудно заметить, что уравнение (6) (без вязкого слагаемого) инвариантно относительно этих преобразований, если

$$a_1 = a_2 = a_0\alpha^{5/2}. \tag{10}$$

Таким образом, рассматриваемая спектральная модель в невязком случае обратима при выполнении условия (10).

На масштабно-инвариантном интервале, где E является степенной функцией от k, уравнение (6) (в невязком приближении) допускает нестационарное решение

$$E(k,\ t) = At^{-2}k, \tag{11}$$

если при $\alpha < 1$ выполняется условие $a_0 < 0$, а при $\alpha > 1$ — условие $a_0 > 0$. При этом

$$A = 4\alpha/[a_0^2(1 + \alpha^{3/2} - \alpha^2 - \alpha^{7/2})^2].$$

Легко показать, что решение типа (11) устойчиво относительно малых возмущений вида $\delta(t)k^{-3+\varepsilon}$, где $\delta(0)$ и ε — достаточно малые числа.

В редукционных моделях спектр $E \sim k^{-3}$ связывают с наличием невязкого интеграла энстрофии [3] (при нарушении невязкого инварианта энергии). Как видим, спектр «—3» возможен и в модели «с сохранением энергии», он существенно нестационарен: $E \sim t^{-2}$. Нужно отметить, что спектр вида (11) обсуждался уже в связи с двумерной турбулентностью (см. специально посвященный этому вопросу сборник [6]). Он также наблюдался экспериментально как зависимости $E \sim t^{-2}$ и $E \sim k^{-3}$ [7]. В эксперименте [7] на решеточное течение хорошо проводящей жидкости (ртути) накладывалось поперечное магнитное поле ($B = 0{,}68$ Т). Такое течение моделирует двумерную турбулентность в плоскости, нормальной к вектору индукции магнитного поля [15].

Представляет интерес вопрос о направленности перераспределения энергии по спектру [3, 16, 17]. Проинтегрируем обе части уравнения (6) (без вязкости) по k' от 0 до k:

$$\partial \int_0^k E(k')\,dk'/\partial t = a_0 \left\{ \int_0^k dk' k'^{3/2} \left[\alpha^{5/2} E^{1/2}(k')\,E(\alpha k') - E(k')\,E^{1/2}(k')\right] + \right.$$
$$\left. + \int_0^k dk' k'^{3/2} \left[\alpha^{5/2} E(k')\,E^{1/2}(k') - E^{1/2}(k')\,E(k'/\alpha)\right] \right\}. \tag{12}$$

Из (12) при $\alpha < 1$ получаем

$$\partial \int_0^k E(k')\,dk'/\partial t = -a_0 \int_{\alpha k}^k dk' k'^{3/2} \left[E^{1/2}(k'/\alpha)\,E(k') + E^{1/2}(k')\,E(k'/\alpha)\right]. \tag{13}$$

Учитывая, что $E \geqslant 0$, из (13) имеем, что в невязком приближении **при**

$a_0 > 0 \int\limits_0^k E(k')dk'$ монотонно убывает с ростом времени, а при $a_0 < 0$ — монотонно возрастает с увеличением t. Для $\alpha > 1$

$$\partial \int\limits_0^k E(k')\,dk'/\partial t = a_0 \int\limits_k^{\alpha k} dk' k'^{3/2} \left[E^{1/2}(k'/\alpha)\,E(k') + E^{1/2}(k')\,E(k'/\alpha)\right]$$

и выводы противоположны предыдущей ситуации ($\alpha < 1$).

Так как в невязком приближении полная энергия $\int\limits_0^\infty E(k)dk$ сохраняется, то при монотонном возрастании со временем величины $\int\limits_0^k E(k')\,dk'$ имеет место передача энергии от мелкомасштабных пульсаций к крупномасштабным, а при монотонном убывании со временем величины $\int\limits_0^k E(k)\,dk$ — наоборот.

Поскольку в ситуации, в которой реализуется масштабно-инвариантная зависимость (11), должна выполняться связь $\alpha < 1 \Rightarrow a_0 < 0$, $\alpha > 1 \Rightarrow a_0 > 0$, то в любом случае (как при $\alpha < 1$, так и при $\alpha > 1$) энергия передается от мелкомасштабных пульсаций к крупномасштабным (см. с аналогичным эффектом в теории двумерной турбулентности [16, 17]).

Если отказаться от того, что рассматриваемая аппроксимация (4) обеспечивает сохранение энергии в невязком случае, то с ее помощью можно пытаться описывать затухание полной энергии пульсации, т. е. аппроксимация (4) считается применимой только на энергосодержащем интервале, причем является чисто стоковой. Тогда на этом интервале

$$\partial E(k,t)/\partial t = k^{3/2} \sum a_{p_1p_2p_3} E^{1/2}\left(\alpha^{p_1}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_2}k\right) E^{1/2}\left(\alpha^{p_3}k\right).$$

Рассмотрим начальное условие для $E(k,\ t)$ вида

$$E_0(k) = E(k,\ 0) = k^m \exp - (k/k_0)^2, \tag{14}$$

обычно используемое в численных моделях однородной турбулентности. Причем будем считать k_0 таким, что экспоненциальный множитель в (14) заметен только вне формирующегося энергосодержащего интервала волновых чисел, значит, на энергосодержащем интервале начальное условие приближенно имеет вид $E_0(k) \approx k^m$. Сделаем замену $E(k,\ t) = E'(k,\ t)k^m$. Тогда для $E'(k,\ t)$ начальным условием на энергосодержащем интервале будет $E_0'(k) = 1$, а уравнением —

$$\partial E(k,t)/\partial t = k^{(3+2m)/2} \sum a_{p_1p_2p_3} E'^{1/2}\left(\alpha^{p_1}k\right) E'^{1/2}\left(\alpha^{p_2}k\right) E'^{1/2}\left(\alpha^{p_3}k\right).$$

С учетом того, что $E_0'(k) = 1$ (не зависит от k на энергосодержащем интервале), введем автомодельную переменную

$$\tau = tk^{(3+2m)/2}. \tag{15}$$

Ясно, что на энергосодержащем интервале $E'(k,\ t) = E'(\tau)$. Полная пульсационная энергия $\overline{u^2} = \frac{3}{2}\int\limits_0^\infty E(k)\,dk$. Учитывая, что энергосодержащий интервал содержит практически всю энергию, можно приближенно записать

$$\overline{u^2} = \frac{3}{2}\int\limits_0^\infty k^m E'(\tau)\,dk. \tag{16}$$

Делая под интегралом замену переменных k на τ, из (16) получаем

$$\overline{u^2} \sim t^{-n},\ n = 2(1+m)/(3+m). \tag{17}$$

Вычислим также интегральный масштаб турбулентности (продольный [1])

$$L = \frac{3\pi}{4} \int\limits_0^\infty E(k)\, k^{-1}\, dk \Big/ \int\limits_0^\infty E(k)\, dk.$$

Переходя к автомодельной переменной τ (15), имеем

$$L \sim t^p, \; p = 2/(3 + m). \tag{18}$$

Для случая $m = 1$ из (17) и (18) находим $n = 1$, $p = 1/2$. Эти значения для n и p хорошо известны из теории и из экспериментов за гидродинамическими решетками [1].

Для $m = 2$ $n = 1{,}2$, $p = 0{,}4$, что впервые наблюдал в решеточном эксперименте Уберои [1], а из недавних экспериментов отметим [12]. В [14] при численном моделировании однородной турбулентности с начальным условием вида (14) при $m = 2$ также получено $n = 1{,}2$. Среди теоретических (полуэмпирических) работ, в которых $n = 1{,}2$, $p = 0{,}4$, укажем [10].

Для $m = 3$ $n = 4/3$, $p = 1/3$. Теоретический вывод этих значений в литературе автору не встречался. Из экспериментальных работ отметим [11].

Для $m = 4$ $n = 10/7$, $p = 2/7$. Такие значения для n и p получены теоретически впервые Колмогоровым с использованием инварианта Лойцянского [1, 18] (с этим связано и значение $m = 4$, см. также [9]), а экспериментально — в [19].

Автор благодарит А. С. Гиневского и Ю. П. Соседко за обсуждение эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.— Т. 2.
2. **Дейсслер Р.** Турбулентные процессы и простые схемы замыкания // Турбулентность (принципы и применения).— М.: Мир, 1980.
3. **Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.** Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Наука, 1981.
4. **Деснянский В. Н., Новиков Е. А.** Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // ПММ.— 1974.— Т. 38, № 3.
5. **Гледзер Е. Б.** О «законе 2/3» теории турбулентности и оценке содержащейся в нем постоянной на основе редукции уравнений гидродинамики // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91, вып. 3.
6. **Turbulence** bidimensionnelle // J. de Méc.— 1983.— Num. spécial.
7. **Sommeria J.** Two-dimensional behaviour of MHD fully developed turbulence // J. de Méc.— 1983.— N 2.
8. **Дубовиков М. М., Татарский В. И.** О вычислении асимптотики спектра локально-изотропной турбулентности в вязком интервале // ЖЭТФ.— 1987.— Т. 93, вып. 6.
9. **Comte-Bellott G., Corrsin S.** The use of a contraction to improve isotropy of grid-generated turbulence // J. Fluid Mech. — 1966.— V. 25, N 4.
10. **Саффмен П. Г.** Феноменологическая теория расчета турбулентных сдвиговых течений // Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.
11. **Гиневский А. С., Колесников А. В., Уханова Л. Н.** Вырождение турбулентности потока за двухрядной решеткой из цилиндров при противоположном движении рядов // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 3.
12. **Sreenivasan K. R., Tavoularis S. et al.** Temperature fluctuations and scales in grid-generated turbulence // J. Fluid Mech.— 1980.— V. 100, N 3.
13. **Шуманн У., Гретцбах Г., Кляйзер Л.** Прямые методы численного моделирования турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.
14. **Tatsumi T., Kida S.** The modified cumulant expansion for isotropic turbulence at large Reynolds number // J. Phys. Soc. Jap.— 1980.— V. 49, N 5.
15. **Sommeria J., Moreau R.** Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensional // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 118.— P. 507.
16. **Мирабель А. П., Монин А. С.** Двумерная турбулентность // Успехи механики (ПНР).— 1979.— Т. 2, № 3.

17. **Montgomery D.** Cascades and inverse cascades in fluids and magnetofluids // Res. Rept/Inst. Plasma Phys. Nagoya Univ.— 1984.— N 670.

18. **Колмогоров А. Н.** К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости // ДАН СССР.— 1941.— Т. 31, № 6.

19. **Дербунович Г. И., Земская А. С. и др.** Использование сеток для управления структурой турбулентного потока в аэродинамических трубах // Учен. зап. ЦАГИ.— 1982.— Т. 13, № 1.

г. Донецк *Поступила 19/XII 1988 г.*

УДК 532.59

А. А. Коробкин, И. В. Стурова

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

1. Рассматривается неустановившееся движение в поле сил тяжести слоя однородной несжимаемой идеальной жидкости переменной глубины, вызванное начальным возмущением свободной границы. Картина движения полностью описывается потенциалом скоростей $\varphi(x, y, t)$, который в линейной постановке удовлетворяет соотношениям

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \varphi_{tt} + \varphi_y = 0 \ (y = 0, \ x \in R^1),$$
$$\varphi_y + h_x\varphi_x = 0 \ (y = -h(x), \ x \in R^1), \quad \varphi = 0, \quad \varphi_t = -f(x)$$
$$(y = 0, \ t = 0). \tag{1.1}$$

В декартовой системе координат (x, y) ось y направлена противоположно направлению свободного падения. Соотношения (1.1) записаны в безразмерных переменных, причем масштабы длины и скорости выбираются так, что число Фруда задачи и глубина жидкости при $x = 0$ равны единице. В начальный момент времени ($t = 0$) свободная поверхность жидкости отклонена от своего равновесного положения. Уравнения $y = f(x)$, $y = -h(x)$, $x \in R^1$ описывают начальное положение свободной границы и форму дна водоема соответственно ($h(x) > 0$).

В предположении о плавном изменении глубины водоема, т. е. $\varepsilon = \max\limits_{x\in R^1}|h_x| \ll 1$, фундаментальное решение сформулированной задачи построено и предварительно исследовано в [1]. Цель данной работы — проиллюстрировать полученное решение численными расчетами и исследовать характер влияния различных донных неровностей на поведение свободной поверхности. Основной интерес представляет анализ вертикальных смещений свободной поверхности $\eta(x, t)$, которые определяются из соотношения $\eta = -\varphi_t(x, 0, t)$. Для простоты предполагается четность функции $f(x)$.

В случае ровного дна ($h \equiv 1$) хорошо известна формула, описывающая эволюцию свободной границы:

$$\eta_0(x, t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty F(\nu)\cos\nu x\cos\Omega(\nu)\, t\, d\nu \tag{1.2}$$

$$\left(\Omega(\nu) = (\nu \operatorname{th}\nu)^{1/2}, F(\nu) = 2\int\limits_0^\infty f(x)\cos\nu x\, dx\right).$$

При больших временах для волн, распространяющихся вправо ($t \to \infty$,