

УДК 532.2; 532.6

ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

А. Г. Петров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
E-mail: petrovipmech@gmail.com

Рассматриваются задачи о движении трехосного эллипсоида в идеальной жидкости и в вязкой жидкости в приближении Стокса, а также равновесные формы вращающейся жидкой гравитирующей массы. Решения этих задач, выраженные через четыре квадратуры, зависящие от четырех параметров, значительно упрощены, поскольку выражены через единственную функцию двух аргументов. Эффективность предлагаемого подхода показана при анализе полей скорости и давления в идеальной жидкости, вычислении присоединенных масс эллипсоида, определении вязкого сопротивления, а также при исследовании равновесных форм и устойчивости вращающейся гравитирующей капиллярной жидкости. Давление на поверхности трехосного эллипсоида выражено через проекцию нормали к скорости набегающего потока. Аналитически определена форма эллипсоида, который при постоянном объеме имеет минимальное вязкое сопротивление. Получено простое уравнение в элементарных функциях для определения границы областей вековой устойчивости эллипсоидов Маклорена. В элементарных функциях представлено приближенное решение задачи о равновесии и устойчивости вращающейся капли, найдена точка бифуркации, от которой ответвляются неосесимметричные равновесные формы.

Ключевые слова: трехосный эллипсоид, течения вязкой жидкости в приближении Стокса, равновесные формы вращающейся жидкости.

DOI: 10.15372/PMTF20180407

Введение. Решение задач движения трехосного эллипсоида

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1 \quad (1)$$

в идеальной жидкости и в вязкой жидкости в приближении Стокса строятся с помощью четырех функций, зависящих от четырех аргументов [1, 2]:

$$F_i(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{a_1 a_2 a_3 du}{(a_i^2 + u) \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$F(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{a_1 a_2 a_3 du}{\sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}}. \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-01633).

С помощью теории потенциала Ньютона [3–5] показано, что полное решение этих задач зависит от единственной функции двух переменных

$$A_0(X, Y) = XY \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+t)(X^2+t)(Y^2+t)}}, \quad (4)$$

которая представляется через две известные эллиптические функции

$$E(\varphi, m) = \int_0^\varphi (1 - m \sin^2 \varphi')^{1/2} d\varphi', \quad F(\varphi, m) = \int_0^\varphi (1 - m \sin^2 \varphi')^{-1/2} d\varphi'$$

следующим образом:

$$A_0(X, Y) = \frac{2XY}{(1-X^2)\sqrt{1-Y^2}} \left[F\left(\arccos Y, \frac{1-X^2}{1-Y^2}\right) - E\left(\arccos Y, \frac{1-X^2}{1-Y^2}\right) \right]. \quad (5)$$

Использование полученного решения позволяет существенно упростить анализ поля скорости жидкости при движении в ней трехосного эллипсоида и вычисление присоединенных масс и вязкого сопротивления. Также это решение может быть применено для исследования эллипсоидальных равновесных форм гравитирующих масс.

1. Тождественные соотношения. Выразим первые три функции (2) через функцию (4), выполнив в первом интеграле (2) замену $u = \lambda + u'$:

$$F_1(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \int_0^\infty \frac{a_1 a_2 a_3 du'}{(\tilde{a}_1^2 + u')\sqrt{(\tilde{a}_1^2 + u')(\tilde{a}_2^2 + u')(\tilde{a}_3^2 + u')}}, \quad \tilde{a}_i^2 = a_i^2 + \lambda, \quad i = 1, 2, 3.$$

Полученное равенство можно записать в виде

$$F_1(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \frac{a_1 a_2 a_3}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3} F_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, 0).$$

В результате замены $u' = \tilde{a}_1^2 t$ в интеграле для $F_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, 0)$ находим

$$F_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, 0) = A_0\left(\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1}, \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1}\right). \quad (1.1)$$

Таким образом, первая функция (2) выражается через функцию (4) следующим образом:

$$F_1(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \frac{a_1 a_2 a_3}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3} A_0\left(\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1}, \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1}\right), \quad \tilde{a}_i^2 = a_i^2 + \lambda, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Для остальных двух функций F_2 и F_3 формулы преобразований получаются путем круговой перестановки индексов.

Аналогично выводим формулы для четвертой функции F в (3):

$$F(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \frac{a_1 a_2 a_3}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3} F(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, 0), \quad (1.3)$$

$$F(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, 0) = \tilde{a}_1^2 B_0\left(\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1}, \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1}\right) = \tilde{a}_2^2 B_0\left(\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_2}, \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2}\right) = \tilde{a}_3^2 B_0\left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_3}, \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_3}\right).$$

Здесь $B_0(X, Y)$ — функция, которая определяется по формуле

$$B_0(X, Y) = XY \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t)(X^2+t)(Y^2+t)}} \quad (1.4)$$

и может быть выражена через эллиптическую функцию:

$$B_0(X, Y) = \frac{2XY}{\sqrt{1-Y^2}} F\left(\arccos Y, \frac{1-X^2}{1-Y^2}\right). \quad (1.5)$$

Для функций $A_0(X, Y)$ и $B_0(X, Y)$ можно доказать тождества

$$\begin{aligned} A_0(X, Y) + A_0\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) + A_0\left(\frac{1}{Y}, \frac{X}{Y}\right) &= 2, \\ A_0(X, Y) + X^2 A_0\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) + Y^2 A_0\left(\frac{1}{Y}, \frac{X}{Y}\right) &= B_0(X, Y), \\ B_0(X, Y) = X^2 B_0\left(\frac{1}{X}, \frac{Y}{X}\right) &= Y^2 B_0\left(\frac{1}{Y}, \frac{X}{Y}\right), \end{aligned}$$

следующие из теории потенциала Ньютона и в другом виде приведенные в [3–5].

Таким образом, все исходные функции $F_i(a_1, a_2, a_3, \lambda)$, $F(a_1, a_2, a_3, \lambda)$ выражены через единственную функцию (5). Полученные формулы используются при исследовании ряда конкретных задач.

2. Движение эллипсоида в идеальной жидкости. Потенциал поля скорости жидкости при движении в ней эллипсоида (1) параллельно оси x_1 имеет вид [1]

$$\Phi_1 = v_\infty x_1 (1 + F_1(a_1, a_2, a_3, \lambda) / (2 - F_1(a_1, a_2, a_3, 0))), \quad (2.1)$$

где $\lambda > 0$ — корень уравнения

$$\sum_{j=1}^3 \frac{x_j^2}{(a_j^2 + \lambda)} = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

производные по координатам $\partial\lambda/\partial x_i$ находятся из уравнений

$$\frac{2x_i}{a_i^2 + \lambda} - \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{x_j^2}{(a_j^2 + \lambda)^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Поле скорости определяется путем дифференцирования потенциала по координатам

$$\frac{1}{v_\infty} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i} = 1 + \frac{F_1(a_1, a_2, a_3, \lambda) + x_1 \partial F_1 / \partial x_1}{2 - F_1(a_1, a_2, a_3, 0)},$$

при этом из определения (2) следует

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = -\frac{a_1 a_2 a_3}{\tilde{a}_1^3 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}.$$

С помощью приведенных формул можно вычислить компоненты скорости в любой заданной точке.

ПРИМЕР 1. Построим зависимости безразмерной скорости точек, лежащих на оси x_1 , от координаты x_1 при обтекании эллипсоида (1) с полуосями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ потоком идеальной жидкости со скоростью на бесконечности v_∞ , направленной вдоль оси x_1 .

Для точек на оси x_1 выполняется соотношение $x_1^2 = a_1^2 + \lambda$. Тогда с помощью (1.2) получаем

$$v = \frac{1}{v_\infty} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} = \frac{6}{\sqrt{x_1^2(3+x_1^2)(8+x_1^2)}} \frac{2 - A_0(\sqrt{(3+x_1^2)/x_1^2}, \sqrt{(8+x_1^2)/x_1^2})}{2 - A_0(2, 3)}.$$

Полученная зависимость скорости v от координаты $x_1 \in (-7, -1)$ приведена на рис. 1.

ПРИМЕР 2. Потенциал поля скорости жидкости при вращении в ней эллипсоида относительно оси x_1 с угловой скоростью ω_1 имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= C \omega_1 x_2 x_3 (F_3(a_1, a_2, a_3, \lambda) - F_2(a_1, a_2, a_3, \lambda)), \\ C &= \frac{a_2^2 - a_3^2}{2(a_2^2 - a_3^2) - (a_2^2 + a_3^2)(F_3(a_1, a_2, a_3, 0) - F_2(a_1, a_2, a_3, 0))}. \end{aligned}$$

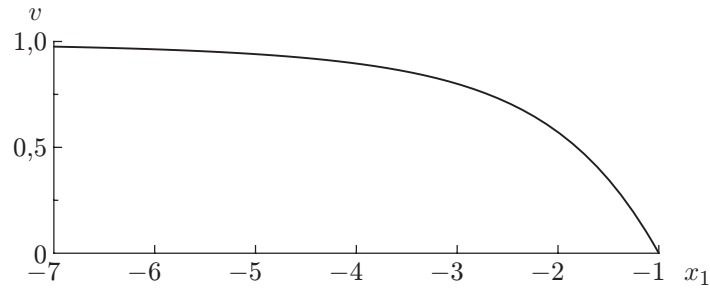


Рис. 1. Зависимость безразмерной скорости v от координаты x_1

В этот потенциал входит разность функций $F_3 - F_2$, которая с помощью формул (1.2) выражается через функцию $A_0(X, Y)$ следующим образом:

$$F_3(a_1, a_2, a_3, \lambda) - F_2(a_1, a_2, a_3, \lambda) = \frac{a_1 a_2 a_3}{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3} \left(A_0 \left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_3}, \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_3} \right) - A_0 \left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2}, \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_2} \right) \right).$$

ПРИМЕР 3. Присоединенные массы $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 6$ определяются как коэффициенты кинетической энергии T жидкости при движении в ней трехосного эллипсоида:

$$2T = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i U_i^2 + \lambda_{3+i} \omega_i^2)$$

(U_i, ω_i — компоненты скорости движения твердого тела и компоненты его угловой скорости в главных осях эллипсоида).

Формулы для вычисления $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 6$ приведены в работах [1, 2]. Эти величины целесообразно отнести к массе эллипсоидов с плотностью жидкости m и моментам инерции J_1, J_2, J_3 и выразить через значения функции $A_0(X, Y)$, вычисляемые по формуле (5):

$$\begin{aligned} \mu_1 = \frac{\lambda_1}{m} = \frac{A_0(a_2/a_1, a_3/a_1)}{2 - A_0(a_2/a_1, a_3/a_1)}, \quad \mu_4 = \frac{\lambda_4}{J_1} = \frac{(a_2^2 - a_3^2)^2 / (a_2^2 + a_3^2)}{2(a_2^2 - a_3^2) - (a_2^2 + a_3^2)A_{123}} A_{123}, \\ A_{123} = A_0\left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right) - A_0\left(\frac{a_3}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}\right), \quad m = \frac{4\pi\rho a_1 a_2 a_3}{3}, \quad J_1 = \frac{4\pi\rho a_1 a_2 a_3}{15} (a_2^2 + a_3^2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Коэффициенты μ_2, μ_3 получаются из формулы для μ_1 путем круговой перестановки индексов. Аналогично получаются коэффициенты μ_5, μ_6 из формулы для μ_4 .

ПРИМЕР 4. Найдем значения $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$ для эллипсоида с полуосями $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.

При $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ с использованием формул (1.1), (5) вычисляем три значения

$$\begin{aligned} A_0(a_2/a_1, a_3/a_1) = A_0(2, 3) = 1,153, \quad A_0(a_3/a_2, a_1/a_2) = A_0(3/2, 1/2) = 0,534, \\ A_0(a_1/a_3, a_2/a_3) = A_0(1/3, 2/3) = 0,312, \end{aligned}$$

с помощью которых из третьей формулы (2.2) находим

$$\begin{aligned} A_{123} = 0,312 - 0,534 = -0,221, \quad A_{231} = 1,153 - 0,312 = 0,840, \\ A_{312} = 0,534 - 1,153 = -0,619. \end{aligned}$$

По первой и второй формулам (2.2) вычисляем все коэффициенты:

$$\mu_1 = 1,361, \quad \mu_2 = 0,364, \quad \mu_3 = 0,185, \quad \mu_4 = 0,0599, \quad \mu_5 = 0,708, \quad \mu_6 = 0,383.$$

ПРИМЕР 5. Найдем распределение давления на поверхности эллипсоида в натекающем на него потоке жидкости, скорость которого v_∞ направлена вдоль оси x_1 .

На поверхности эллипсоида нормальная производная потенциала (2.1) равна нулю, поэтому скорость жидкости на ней равна производной по касательному к поверхности направлению s потенциала:

$$\begin{aligned}\Phi_1|_{\lambda=0} &= v_\infty x_1 \left(1 + \frac{F_1(a_1, a_2, a_3, 0)}{2 - F_1(a_1, a_2, a_3, 0)} \right) = v_\infty x_1 (1 + \mu_1); \\ v &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} = v_\infty (1 + \mu_1) \frac{\partial x_1}{\partial s}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь коэффициент μ_1 определяется по первой формуле (2.2).

Производную от координаты по s можно выразить через проекцию нормали на ось x_1 с помощью равенства

$$n_1^2 + (\partial x_1 / \partial s)^2 = 1.$$

Из этого равенства и формулы (2.3) находим

$$v^2 / v_\infty^2 = (1 + \mu_1)^2 (1 - n_1^2).$$

С использованием теоремы Бернулли получаем выражение для коэффициента давления

$$c_p = 2(p - p_\infty) / (\rho v_\infty^2) = 1 - v^2 / v_\infty^2 = 1 - (1 + \mu_1)^2 (1 - n_1^2).\quad (2.4)$$

Аналогичная формула получена другим способом в работе [6].

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно сопоставить выражение (2.4) для коэффициента давления идеальной жидкости и предположение Ньютона о том, что частицы жидкости испытывают неупругие столкновения с поверхностью тела [7]. С помощью закона изменения импульса в предположении Ньютона для давления на наветренной стороне получаем $p = \rho v_\infty^2 n_1^2$, откуда следует $c_p = 2n_1^2 - 2p_\infty / (\rho v_\infty^2)$. Формула Ньютона удовлетворительно согласуется с выражением для коэффициента сопротивления тел в гиперзвуковом течении и используется для расчета форм тел наименьшего сопротивления [8]. В формуле для идеальной жидкости (2.4) и формуле Ньютона коэффициент давления зависит только от ориентации элемента поверхности относительно вектора скорости набегающего потока. В формулах различаются только коэффициенты при n_1^2 .

3. Движение эллипсоида в вязкой жидкости. Построим решение внешней краевой задачи для уравнений Стокса в случае течения вязкой жидкости:

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \nabla p.$$

Поле скорости \mathbf{v} обтекания эллипсоида для заданной на бесконечности скорости v_∞ , направленной вдоль оси x , с учетом условий прилипания на границе эллипсоида найдено А. Обербеком (см. [1]). Это поле можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \nabla H + x_1 \nabla G + \mathbf{i}(-G + v_\infty), \quad p = 2\mu \frac{\partial G}{\partial x_1}, \quad H = -k v_\infty x_1 F_1(a_1, a_2, a_3, \lambda),$$

$$G = \frac{k v_\infty}{a_1^2} F(a_1, a_2, a_3, \lambda), \quad k = \frac{1}{A_0(X, Y) + B_0(X, Y)}, \quad X = \frac{a_2}{a_1}, \quad Y = \frac{a_3}{a_1}.$$

С помощью формул (1.2), (1.3) функции F_1 и F также можно выразить через функцию $A_0(X, Y)$.

Эллипсоид, находящийся в натекающем со скоростью v_∞ потоке, испытывает такое же сопротивление, как шар радиусом

$$R = \frac{8a_2 a_3}{3a_1 (A_0(X, Y) + B_0(X, Y))}.$$

Это сопротивление равно $c_x = 6\pi \mu R v_\infty$. Величину R целесообразно отнести к радиусу сферы эквивалентного объема $l = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$. Отношение R/l показывает, во сколько раз

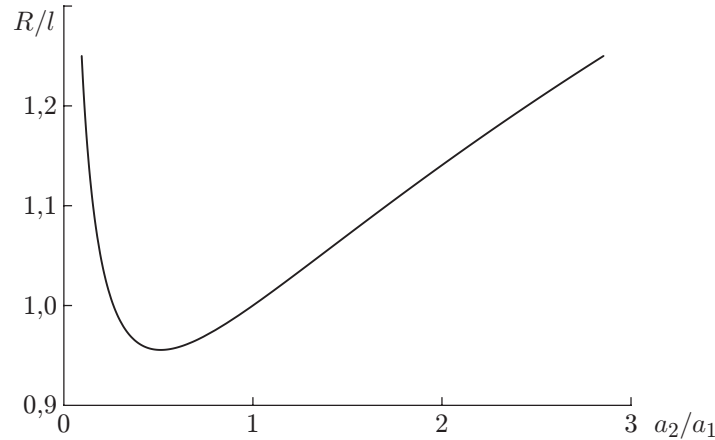


Рис. 2. Зависимость R/l от отношения осей эллипсоида a_2/a_1

сопротивление эллипсоида превышает сопротивление сферы радиусом l . Для осесимметричного эллипсоида ($a_2 = a_3$) это отношение имеет вид

$$\frac{R}{l} = \frac{8X^{4/3}}{3(A_0(X, X) + B_0(X, X))}, \quad X = \frac{a_2}{a_1}.$$

При $X = Y$ функции $A_0(X, X)$, $B_0(X, X)$ (см. (5), (1.5)) выражаются через элементарные функции:

$$B_0(X, X) = \begin{cases} 2X^2 \operatorname{arctg}(\sqrt{X^2 - 1})/\sqrt{X^2 - 1}, & X > 1, \\ 2X^2 \operatorname{arcth}(\sqrt{1 - X^2})/\sqrt{1 - X^2}, & X < 1, \end{cases}$$

$$A_0(X, X) = (B_0(X, X) - 2X^2)/(1 - X^2).$$

На рис. 2 приведена зависимость отношения радиусов R/l от отношения осей эллипсоида a_2/a_1 . Видно, что величина R/l имеет минимум. Вычисления показывают, что $\min(R/l) = 0,955\ 51$ при $a_2/a_1 = 0,512\ 26$. Следовательно, среди эллипсоидов постоянного объема наименьшее сопротивление испытывает сплюснутый эллипсоид с отношением осей $a_2/a_1 = 0,512\ 26$. Его сопротивление на 4,45 % меньше сопротивления сферы радиусом l . Подобный вывод сделан в работе [9] в результате значительно более сложных рассуждений.

Докажем, что минимум, найденный для осесимметричных эллипсоидов, является глобальным минимумом и для трехосных эллипсоидов, т. е. функция двух переменных

$$r(X, Y) = \frac{8(XY)^{2/3}}{3(A_0(X, Y) + B_0(X, Y))}, \quad X = \frac{a_2}{a_1}, \quad Y = \frac{a_3}{a_1}$$

имеет глобальный минимум в точке $X = Y = 0,512\ 26$. Функции $A_0(X, Y)$ и $B_0(X, Y)$ выражаются через эллиптические функции по формулам (5) и (1.5).

Перейдем к новым переменным $X = x(1+z)$, $Y = x(1-z)$. Вследствие симметрии по переменным X, Y в новых переменных функция $\rho(x, z) = r(x(1+z), x(1-z))$ является четной по z при постоянном значении x , причем $\rho(x, z) > \rho(x, 0)$ при всех допустимых значениях $0 < z < 1$, что следует из приведенных на рис. 3 зависимостей $\Delta\rho(x, z) = \rho(x, z) - \rho(x, 0) + x$ при различных постоянных значениях x . Из неравенства $\rho(x, z) > \rho(x, 0)$ в исходных переменных получаем неравенство $r(X, Y) \geq r((X+Y)/2, (X+Y)/2) \geq \min r(x, x)$, что и требовалось доказать.

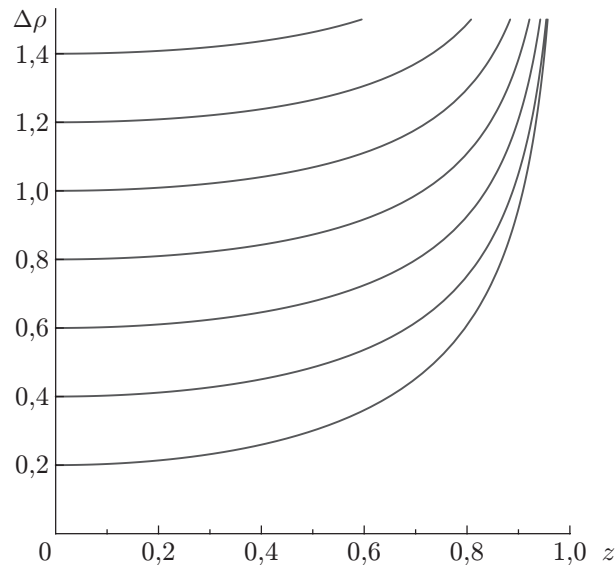


Рис. 3. Зависимость $\Delta\rho$ от переменной z при постоянных значениях $x = (X + Y)/2$

4. Эллипсоиды Маклорена и Якоби. Движение жидкой массы, частицы которой с массами m_1, m_2 , находящиеся на расстоянии r , притягиваются по закону Ньютона

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

можно описать с помощью уравнений Лагранжа с функцией Лагранжа, равной разности кинетической энергии жидкости и потенциальной энергии Π . Согласно [1. С. 885; 10. С. 384] в случае трехосного эллипсоида выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = -\frac{8\pi^2}{15} G\rho^2 a_1 a_2 a_3 F(a_1, a_2, a_3, 0), \quad (4.1)$$

где ρ — плотность жидкости; функция F определена в (3).

Предположим, что жидкая масса имеет форму трехосного эллипсоида, вращающегося вокруг оси x_3 с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \Omega$. Тогда угловая переменная является циклической координатой, которую можно исключить методом Рауса. В результате динамика эллипсоидальной жидкой массы определяется с помощью функции Рауса, которая представляется в виде

$$T_2 + T_1 - U, \quad U = \Pi + \frac{K^2}{2J}, \quad K = J_0\Omega. \quad (4.2)$$

Здесь T_2, T_1 — положительно определенная квадратичная форма и линейная форма для обобщенных скоростей; функция U не зависит от скоростей и является эффективной потенциальной энергией, в выражение для которой входит момент инерции эллипсоида

$$J = \frac{4\pi\rho}{15} a_1 a_2 a_3 (a_1^2 + a_2^2), \quad (4.3)$$

K — постоянный кинетический момент эллипсоида. Равновесная форма эллипсоида определяется из условия экстремума функции U . Если равновесная форма является точкой минимума U , то она устойчива по теореме Лагранжа — Дирихле и асимптотически устойчива при добавлении диссипативных сил. Если равновесная форма не является точкой минимума функции U и может принимать отрицательные значения, то при учете сколь угодно малых сил сопротивления и при наличии полной диссипации она неустойчива [11. С. 215]. Область равновесных форм, соответствующих минимуму функции U , называется областью вековой устойчивости.

Для проведения расчетов все слагаемые, входящие в выражение для U , отнесем к гравитационной энергии шара радиусом $(a_1 a_2 a_3)^{1/3}$:

$$\Pi_0 = -\frac{16\pi^2}{15} G\rho^2 (a_1 a_2 a_3)^{5/3}.$$

В результате получаем выражение для безразмерной эффективной потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \tilde{\Pi} + \frac{\tilde{K}^2}{2\tilde{J}}, \quad \tilde{J} = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{a_1}{a_3} \right)^{4/3} \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^{2/3} + \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^{4/3} \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^{2/3} \right), \\ \tilde{\Pi} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^{2/3} \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^{2/3} B_0 \left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3} \right), \quad \tilde{K} = \tilde{J}_0 \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \rho}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которое совместно с выражениями (1.4), (1.5) для функции B_0 определяет все равновесные формы вращающейся жидкости и их устойчивость. Определение равновесных форм в виде осесимметричных эллипсоидов Маклорена и трехосных эллипсоидов Якоби, а также исследование их устойчивости сводятся к решению задачи на минимум функции \tilde{U} в (4.4). Данный способ решения поставленной задачи существенно проще известных способов (см. [1, 4, 5]).

4.1. *Эллипсоиды Маклорена.* Пусть $x = a_3/a_1$ и $y = a_3/a_2$ — некоторые заданные значения. Рассмотрим вариации функции $U = U_0 + \delta U + \delta^2 U$ относительно малых отклонений

$$\frac{a_3}{a_1} = x + \delta x, \quad \frac{a_3}{a_2} = y + \delta y.$$

Для осесимметричного эллипсоида $x = y$ первая вариация δU выражается через элементарные функции:

$$\delta U = \left(-\frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 \frac{dJ}{dx} + \frac{d\Pi}{dx} \right) \frac{1}{2} (\delta x + \delta y), \quad J = \frac{1}{2} x^{-2/3}, \quad \Pi = -\frac{x^{1/3} \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Из условия равенства нулю первой вариации находим зависимость безразмерной угловой скорости от отношения осей эллипсоида

$$\tilde{\Omega}^2 = -\frac{6x^2}{1-x^2} + 2x(1+2x^2) \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}. \quad (4.5)$$

Эта формула получена К. Маклореном и обычно представляется в виде зависимости $\tilde{\Omega}^2$ от эксцентриситета $e = \sqrt{1-x^2}$.

Вторая вариация имеет вид

$$\begin{aligned} \delta^2 U &= a_{11}(\delta x^2 + \delta y^2) + 2a_{12} \delta x \delta y, \\ a_{11} &= \frac{27x\sqrt{1-x^2}(5-2x^2) + (56x^2(x^2-2) - 25) \arccos x}{144x^{5/3}(1-x^2)^{5/2}}, \\ a_{12} &= \frac{9x\sqrt{1-x^2}(14x^2-11) + (-88x^4 + 32x^2 + 29) \arccos x}{144x^{5/3}(1-x^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Квадратичная форма $\delta^2 U$ положительно определена при условии $a_{11} - a_{12} > 0$. Это условие выполнено при $x_* < x \leq 1$, где x_* — корень уравнения $a_{11} - a_{12} = 0$. Это уравнение можно привести к виду

$$x\sqrt{1-x^2}(13-10x^2) + (8x^4 - 8x^2 - 3) \arccos x = 0. \quad (4.6)$$

По значению корня $x_* = 0,582724$ вычисляются значения эксцентриситета $e_* = 0,81267$, а по формуле Маклорена (4.5) — квадрат угловой скорости $\tilde{\Omega}_*^2 = 0,37423$. От точки x_* ,

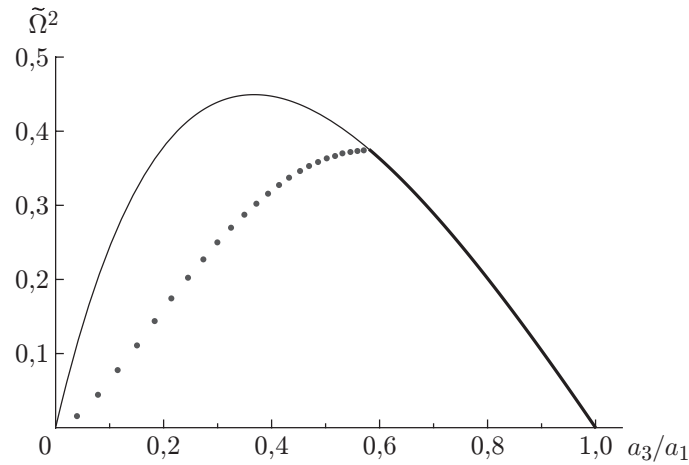


Рис. 4. Зависимость квадрата угловой скорости вращения эллипсоида $\tilde{\Omega}^2$ от отношения осей a_3/a_1 для осесимметричных эллипсоидов Маклорена (сплошная линия) и трехосных эллипсоидов Якоби (пунктирная линия)

являющейся точкой бифуркации, ответвляется группа решений для несимметричных эллипсоидов Якоби. Таким образом, доказана вековая устойчивость серии эллипсоидов Маклорена (4.5) $x_* < x < 1$.

Значения e_* и $\tilde{\Omega}_*^2$, полученные А. Пуанкаре, приведены в работе [1. С. 903]. Однако в работах [1, 4, 5] уравнение для критической точки x_* не выражено через элементарные функции (4.6).

На рис. 4 представлена зависимость квадрата безразмерной угловой скорости вращения эллипсоида $\tilde{\Omega}^2$ от отношения осей a_3/a_1 для осесимметричных эллипсоидов Маклорена. Участок сплошной линии $x_0 < a_3/a_1 < 1$ соответствует эллипсоидам, для которых доказана вековая устойчивость.

4.2. *Эллипсоиды Якоби.* Для определения неосесимметричных равновесных форм введем переменные $a_2/a_1 = X$, $a_3/a_1 = Y$. Тогда с использованием (1.5) формулу для энергии (4.4) можно представить через эллиптическую функцию:

$$\tilde{U} = \tilde{\Pi} + \frac{\tilde{K}^2}{2\tilde{J}}, \quad \tilde{J} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X^{2/3}Y^{2/3}} + \frac{X^{4/3}}{Y^{2/3}} \right), \quad \tilde{\Pi} = -\frac{X^{1/3}Y^{1/3}}{\sqrt{1-Y^2}} F\left(\arccos Y, \frac{1-X^2}{1-Y^2}\right). \quad (4.7)$$

Из условия равенства нулю первой вариации

$$-\frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial \tilde{J}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial X} = 0, \quad -\frac{1}{2} \tilde{\Omega}^2 \frac{\partial \tilde{J}}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial Y} = 0 \quad (4.8)$$

исключаем $\tilde{\Omega}^2$:

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial Y} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) эквивалентно уравнению Якоби [1, 4, 5]. Из (4.9) по заданному значению X можно вычислить Y и получить равновесные формы трехосных эллипсоидов Якоби (см. [1, 4, 5]).

Преимущество уравнения (4.9) по сравнению с уравнением Якоби состоит в его универсальности. Уравнение (4.9) можно использовать для решения задач о вращении жидких масс с произвольной потенциальной энергией. Ниже это уравнение используется для определения равновесной формы капли с потенциальной энергией поверхностного натяжения.

Таблица 1
Равновесные значения для серии эллипсоидов Якоби

a_2/a_1	a_3/a_1	$\tilde{\Omega}^2$	\bar{K}	\tilde{D}
1,00	0,582 724	0,374 230	0,303 751	0
0,92	0,558 329	0,373 187	0,304 601	0,000 216
0,84	0,531 574	0,369 696	0,307 467	0,001 229
0,76	0,502 148	0,363 114	0,312 955	0,004 037
0,68	0,469 689	0,352 649	0,321 923	0,010 812
0,60	0,433 781	0,337 330	0,335 618	0,026 451 2
0,52	0,393 944	0,315 989	0,355 941	0,062 635
0,44	0,349 632	0,287 267	0,385 940	0,149 639
0,36	0,300 232	0,249 693	0,430 872	0,375 974
0,28	0,245 083	0,201 946	0,500 777	1,051 700
0,20	0,183 524	0,143 610	0,618 069	3,631 810
0,12	0,115 038	0,077 280 6	0,848 770	20,011 600
0,04	0,039 687 8	0,015 415 1	1,582 760	571,332 000

Рассмотрим вариации функции U в виде $U = U_0 + \delta U + \delta^2 U$ относительно малых отклонений

$$a_2/a_1 = X + \delta X, \quad a_3/a_1 = Y + \delta Y.$$

Квадратичная форма второй вариации

$$\delta^2 U = a_{11} \delta X^2 + 2a_{12} \delta X \delta Y + a_{22} \delta Y^2$$

положительно определена при условии

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

В табл. 1 приведены значения отношений осей a_2/a_1 и a_3/a_1 , квадрата угловой скорости вращения $\tilde{\Omega}^2$ и безразмерного кинетического момента

$$\bar{K} = \frac{K}{(GM^3l)^{1/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \tilde{J}\tilde{\Omega}, \quad l = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}.$$

Все приведенные значения совпадают с данными, представленными в работе [4. С. 123]. В последней графе приведены значения $\tilde{D} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, монотонно увеличивающиеся от нуля в точке бифуркации на эллипсоиде Маклорена $a_1 = a_2 = a_3/x_0$ до бесконечности при $a_2/a_1 \rightarrow 0$. Это свидетельствует о положительной определенности второй вариации $\delta^2 U$ и устойчивости эллипсоидов Якоби относительно эллипсоидальных возмущений. Более подробные сведения о равновесных формах вращающихся самогравитирующих жидких масс содержатся в работах [4, 5, 12].

5. Равновесные формы вращающейся капли. Задача определения равновесной формы вращающейся капли аналогична задаче, рассмотренной в п. 4, и также сводится к задаче на минимум функции (4.2), в которой момент инерции J определяется по формуле (4.3), а гравитационная энергия заменяется на капиллярную $\Pi = \sigma S$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения; S — площадь поверхности эллипсоида. Функцию S , которая сложным образом выражается через эллиптические интегралы, заменим на предложенную К. Томсеном (Knud Thomsen) достаточно простую аппроксимацию

$$S = 4\pi((a_1^p a_2^p + a_1^p a_3^p + a_3^p a_2^p)/3)^{1/p}.$$

При $p = 1,6075$ относительная погрешность не превышает 1,061 %. Отнеся функцию U к потенциальной энергии сферы эквивалентного объема σS_0 ($S_0 = 4\pi(a_1 a_2 a_3)^{2/3}$), получаем безразмерную функцию \tilde{U} :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \tilde{S} + \frac{\tilde{K}^2}{2\tilde{J}}, & \tilde{J} &= \frac{8}{15} \left(\frac{X^{2/3}}{Y^{4/3}} + \frac{Y^{2/3}}{X^{4/3}} \right), \\ \tilde{S} &= \left(\frac{1}{3X^{p/3}Y^{p/3}} + \frac{X^{2p/3}}{3Y^{p/3}} + \frac{Y^{2p/3}}{3X^{p/3}} \right)^{1/p}, & \tilde{K} &= \tilde{J}_0 \tilde{\Omega}, & \tilde{\Omega}^2 &= \frac{\Omega^2 \rho a_1 a_2 a_3}{8\sigma}, \\ & X = \frac{a_3}{a_1}, & Y &= \frac{a_3}{a_2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Так же как и в п. 4, задача свелась к определению минимума функции \tilde{U} . Отличие решения задачи об эллипсоидальной капле от решения задачи о гравитирующей массе состоит в том, что решение для капли не является точным. Выбранная аппроксимация площади поверхности позволяет решить задачу на минимум функции \tilde{U} в элементарных функциях. Рассмотрим вариации функции \tilde{U} в виде $\tilde{U} = U_0 + \delta U + \delta^2 U$ относительно малых отклонений $X + \delta X$, $Y + \delta Y$. Для осесимметричного эллипсоида $X = Y$ из условия равенства нулю первой вариации находим зависимость безразмерной угловой скорости от отношения осей эллипсоида

$$\tilde{\Omega}^2 = C(1 - X^p)(1 + 2X^p)^{1/p-1}, \quad C = 15/(8 \cdot 3^{1/p}) = 0,946\,655. \quad (5.2)$$

Условие положительной определенности квадратичной формы второй вариации имеет вид

$$D > 0, \quad D = \frac{(1 + 2X^p)^{1/p-1}}{2 \cdot 3^{1/p} X^{8/3}} ((2 + p)X^p - 2).$$

Из этого условия следует, что осесимметричные эллипсоиды устойчивы при $X = a_1/a_3 < X_*$, где $X_* = (2/(2 + p))^{1/p} = 0,692\,846$. Отсюда по формуле (5.2) определяем диапазон значений угловой скорости устойчивой ветви решений $0 < \tilde{\Omega}^2 < \tilde{\Omega}_*^2$, где

$$\tilde{\Omega}_*^2 = \frac{Cp}{(6 + p)^{1-1/p}(2 + p)^{1/p}} = 0,318\,184.$$

В работе [13] задача о равновесии и устойчивости вращающейся капли решена численно с использованием предложенного в ней вириального метода, для устойчивой ветви получено неравенство

$$\Sigma = \Omega^2 \rho a_1^3 / (8\sigma) < 0,4587.$$

С учетом определения параметра $\tilde{\Omega}^2$ в (5.1) параметр Чандрасекхара Σ можно выразить через $\tilde{\Omega}^2$:

$$\Sigma = \tilde{\Omega}^2 / X \rightarrow \Sigma_* = \tilde{\Omega}_*^2 / X_* = 0,4592.$$

Таким образом, вычисленное в [13] значение $\Sigma_* = 0,4587$ отличается от значения, полученного в данной работе, в четвертом знаке. Точка, соответствующая этому значению Σ_* , в теории равновесных форм вращающихся жидкостей называется нейтральной. От данной точки ответвляются решения для равновесных трехосных эллипсоидов.

На рис. 5 представлена зависимость $\tilde{\Omega}^2$ от отношения осей эллипсоида $X = a_3/a_1$. Устойчивый участок зависимости выделен жирной линией. Форма этого участка зависимости близка к линейной: $\tilde{\Omega}^2 = 1,04(1 - a_3/a_1)$. Тогда для параметра Чандрасекхара получаем аппроксимацию $\Sigma = 1,04(a_1/a_3 - 1)$. В работе [13] приведены значения a_1/l в зависимости от Σ , где $l = (a_1^2 a_3)^{1/3}$. Для построенной аппроксимации найдем эту зависимость аналитически:

$$a_1/l = (a_1/a_3)^{1/3} = (1 + \Sigma/1,04)^{1/3}. \quad (5.3)$$

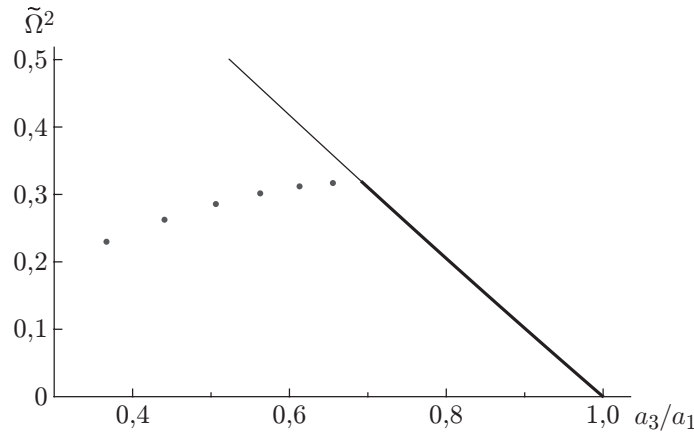


Рис. 5. Зависимость $\tilde{\Omega}^2$ от отношения осей a_3/a_1 симметричных форм капли (сплошная линия) и трехосных эллипсоидов (пунктирная линия)

Таблица 2

Таблица 3

Значения a_1/l в зависимости от значений Σ , полученные в данной работе и работе [13]

Параметры несимметричных равновесных форм капли

Σ	a_1/l	a_{ch}/l
0,1611	1,049	1,050
0,2104	1,063	1,064
0,2756	1,081	1,082
0,3667	1,105	1,106

a_2/a_1	a_3/a_1	Ω^2	D
0,9	0,655 592	0,316 691	0,002 432
0,8	0,612 582	0,311 575	0,011 182
0,7	0,562 994	0,301 721	0,030 005
0,6	0,506 012	0,285 820	0,066 902
0,5	0,440 935	0,262 418	0,140 778
0,4	0,367 326	0,230 056	0,303 513

Значения, вычисленные по предложенной зависимости, с точностью до трех знаков совпадают с соответствующими значениями, приведенными в работе [13] (табл. 2). В первой графе приведены значения параметра Σ , во второй и третьей — значения a_1/l , найденные по формуле (5.3) и численно в [13].

Так же как в п. 4, для определения неосесимметричных равновесных форм после исключения $\tilde{\Omega}^2$ из условия равенства нулю первой вариации (4.8) получаем аналогичное (4.9) уравнение

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial X} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial Y} = 0.$$

После подстановки выражений для \tilde{J} и \tilde{S} из (5.1) это уравнение приводится к виду $Y^2(1 - Y^p) = X^2(1 - X^p)$. Подстановка $X = ZY$ упрощает уравнение $Y^p(1 - Z^{p+2}) = 1 - Z^2$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{a_2}{a_1} = Z, \quad \frac{a_3}{a_1} = Y = \left(\frac{1 - Z^2}{1 - Z^{p+2}} \right)^{1/p}.$$

По данным формулам, задавая Z , можно вычислить Y и получить значения отношений осей для равновесных трехосных эллипсоидов (табл. 3). Точки, соответствующие несимметричным эллипсоидам, приведены на рис. 5.

Для исследования устойчивости равновесия находим квадратичную форму второй вариации функции U . Для этой вариации выполняются условия положительной определенности $a_{11} > 0$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Значения D приведены в последней графе табл. 3.

Наличие несимметричных форм капли в найденной точке бифуркации подтверждается результатами численных расчетов [14].

ЗАМЕЧАНИЕ. Отличие задачи о равновесии и устойчивости капли от аналогичной задачи для гравитирующей жидкой массы заключается в том, что во второй задаче формы равновесия являются эллипсоидами, а в первой — приблизительно эллипсоидами, для которых ищется приближенное решение. Точное решение находится в результате анализа первой и второй вариаций функции $V(x, y)$ в точке равновесия x_0, y_0 . Незвестная функция $V(X, Y)$ заменяется на известную аналитическую функцию $U(X, Y)$, вычисленную для семейства трехосных эллипсоидов. Предполагается, что эта функция близка к функции $V(X, Y)$. Близость данных функций можно задать с помощью малого параметра $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, введя расширенную гладкую функцию $v(x, y, \varepsilon)$, так чтобы выполнялись равенства $U(X, Y) = v(X, Y, \varepsilon)$, $V(X, Y) = v(X, Y, 0)$. Первые и вторые производные по X и Y от функций $v(X, Y, 0)$ и $v(X, Y, \varepsilon)$ различаются на величину порядка ε . Соответственно точки равновесия, которые определяются из условий равенств нулю первых производных, различаются на малую величину порядка ε . Критические точки области устойчивости зависят от вторых производных и также различаются на величину порядка ε .

6. Выводы. В работе представлены решения четырех классических задач гидродинамики для трехосного эллипсоида.

Из решения задачи о поле скорости и давления в потенциальном потоке жидкости, обтекающем эллипсоид, следует, что давление на поверхности эллипсоида зависит только от ориентации нормали эллипсоида относительно вектора скорости натекающего потока. Отмечено соответствие между полученным решением и формулой Ньютона для сопротивления тел.

В результате решения задачи о поле скорости вязкой жидкости, обтекающей эллипсоид, определена форма трехосного эллипсоида, который при постоянном объеме имеет минимальное сопротивление.

При решении задачи о равновесных формах вращающейся гравитирующей жидкости построены симметричные эллипсоиды Маклорена и несимметричные эллипсоиды Якоби, найдена точка бифуркации решения и доказана вековая устойчивость эллипсоидов Маклорена на интервале от точки $x = 1$ до точки бифуркации. Доказана устойчивость эллипсоидов Якоби относительно эллипсоидальных возмущений.

Построено аналитическое приближенное решение задачи о равновесных формах вращающейся капли и их устойчивости, ранее исследованной численными методами. Результаты аналитических и численных расчетов различаются лишь в четвертом знаке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
2. Кочин Н. Е. Теоретическая гидродинамика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1.
3. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.: ОГИЗ, 1946.
4. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
5. Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
6. Гонор А. Л. Определения поля течения на поверхности некоторых тел в потоке идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 2. С. 187–190.
7. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7.

8. **Черный Г. Г.** Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
9. **Pironneau O.** On optimum profiles in Stokes flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 59, pt 1. P. 117–128.
10. **Ландау Л. Д.** Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 1988.
11. **Меркин Д. Р.** Гироскопические системы. М.: Наука, 1974.
12. **Борисов А. В.** Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”: Ин-т компьютер. исслед., 2010.
13. **Chandrasekhar S.** The stability of a rotating liquid drop // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1965. V. 286. P. 1–26.
14. **Brown R. A., Scriven L. E.** The shape and stability of rotating liquid drops // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1980. V. 371. P. 331–357.

Поступила в редакцию 5/IX 2017 г.
