

УДК 539.4

## ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК ВЗРЫВНОГО ТИПА

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
630090 Новосибирск  
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Сформулирована задача вязкопластического динамического изгиба изотропных пластин переменной толщины. Разработан метод интегрирования поставленной начально-краевой задачи. Проведено сравнение численных результатов с известным аналитическим решением, полученным в рамках жесткопластической модели; показано, что они хорошо согласуются. Эффективность разработанного метода подтверждена численными расчетами. Показано, что за счет рационального профилирования пластин максимальную величину их остаточных прогибов можно уменьшить в несколько раз.

**Ключевые слова:** пластины, взрывные нагрузки, неупругая динамика, вязкопластическое деформирование, рациональное профилирование.

**Введение.** Пластины и плиты составляют основу многих защитных ограждений и элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники, объектов стройиндустрии. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов, поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на сегодняшний день решений основано на модели идеального жесткопластического тела (см. [1, 2] и др.). Как правило, решения являются приближенными, получены с использованием экстремальных принципов динамики жесткопластического тела [3]. Решения построены для однородных изотропных пластин постоянной толщины, при этом зависимость предела текучести материала пластин от скорости деформирования не учитывается. Однако известно, что рациональное задание толщины пластины может оказывать существенное влияние на ее сопротивляемость (в частности, динамическую) внешним воздействиям, а зависимость предела текучести материала (например, сталей [4]) от скорости деформации может быть существенной и должна оказывать влияние на деформирование тонкостенной конструкции при динамическом нагружении. В частности, неучет этого обстоятельства является одной из причин завышения на 30–80 % [2] расчетных значений остаточных прогибов по сравнению с экспериментальными данными.

Целью настоящего исследования является разработка метода решения начально-краевой задачи динамического вязкопластического изгиба изотропных пластин постоянной и переменной толщины с учетом эффекта вязкопластического упрочнения их матери-

ала и анализ влияния формы профиля пластин на величину их остаточных прогибов при действии нагрузок взрывного типа.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим поперечный динамический изгиб пластины переменной толщины  $H$ . Введем ортогональную (возможно, криволинейную) систему координат  $(x_1, x_2, z)$ , так чтобы плоскость  $z = 0$  совпадала со срединной плоскостью пластины до начала деформирования. Поперечная распределенная нагрузка  $p(x_1, x_2, t)$  действует в направлении  $z$ , поэтому в случае малых прогибов  $w$  уравнение движения такой пластины имеет вид [5]

$$[M_{11,1} + fM_{12,2} + \beta(M_{11} - M_{22})/x_1]_{,1} + f(M_{12,1} + fM_{22,2} + 2\beta M_{12}/x_1)_{,2} + \beta[M_{11,1} + fM_{12,2} + \beta(M_{11} - M_{22})/x_1]/x_1 + p(\mathbf{x}, t) = \rho H(\mathbf{x})w(\mathbf{x}, t)_{,tt}, \quad (1)$$

где

$$f = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 1/x_1, & \beta = 1, \end{cases} \quad (2)$$

$\beta = 0$ , если  $(x_1, x_2, z)$  — декартова система координат,  $\beta = 1$ , если  $(x_1, x_2, z)$  — цилиндрическая система координат,

$$M_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, z, t)z dz, \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\} \in G, \quad (3)$$

$M_{ij}$  — моменты, возникающие в пластине;  $\sigma_{ij}$  — напряжения в конструкции;  $\rho$  — объемная плотность материала;  $G$  — проекция области, занимаемой пластиной, на плоскость  $z = 0$ ; в случае использования цилиндрической полярной системы координат  $x_1$  — полярный радиус,  $x_2$  — полярный угол; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по пространственным переменным  $x_1, x_2$  или времени  $t$ .

Согласно вязкопластической модели [6] при одноосном напряженном состоянии напряжение  $\sigma$  зависит от скорости деформации  $\xi$  материала. Аппроксимируя зависимость  $\sigma \sim \xi$  двухзвенной ломаной (могут быть использованы и другие аппроксимации, например многозвенная ломаная), получим

$$\sigma = \begin{cases} E\xi, & |\xi| \leq \xi_s = \sigma_s/E, \\ \text{sign}(\xi)\sigma_s + E_s(\xi - \text{sign}(\xi)\xi_s), & |\xi| > \xi_s, \end{cases} \quad (4)$$

где  $E, E_s$  — коэффициенты линейной вязкости и линейно-вязкого упрочнения материала;  $\sigma_s$  — значение напряжения в точке перелома двухзвенной ломаной, аппроксимирующей зависимость  $\sigma \sim \xi$  ( $\sigma_s$  можно трактовать как предел текучести материала). При  $E \rightarrow \infty$  получаем предельный переход к жестковязкопластической модели, а при  $E_s = 0, E \rightarrow \infty$  — к жесткопластической модели.

Поведение пластины подчиняется гипотезам Кирхгофа, поэтому при малых прогибах связь между деформациями  $\varepsilon_{ij}$ , их скоростями  $\dot{\xi}_{ij}$ , прогибом  $w$  и его скоростью  $v$  определяется следующим образом [5, 6]:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, z, t) = z\kappa_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\xi}_{ij}(\mathbf{x}, z, t) = z\dot{\kappa}_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad i, j = 1, 2, \quad |z| \leq H(\mathbf{x})/2. \quad (5)$$

Здесь

$$\dot{\kappa}_{11} = -v_{,11}, \quad \dot{\kappa}_{22} = -f^2v_{,22} - \beta v_{,1}/x_1, \quad \dot{\kappa}_{12} = \dot{\kappa}_{21} = -fv_{,12} + \beta v_{,2}/x_1^2, \quad (6)$$

выражения для параметров искривления срединной плоскости пластины  $\kappa_{ij}$  получаются из (6) заменой  $v$  на  $w$ ; точка означает производную по времени.

Используя соотношения (3)–(5) и определяющие уравнения для материалов с нелинейной вязкостью [6], для моментов  $M_{ij}$  получим представление

$$M_{ii} = C_{iiii}\dot{\varepsilon}_{ii} + C_{ijjj}\dot{\varepsilon}_{jj}, \quad M_{ij} = 2C_{ijij}\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где выражения для коэффициентов  $C_{ijkl}$  нелинейно зависят от  $H$ ,  $\dot{\varepsilon}_{mn}$  и весьма громоздки. В силу известного формального сходства определяющих уравнений теории упругопластических деформаций и теории вязкопластического течения [7] выражения для  $C_{ijkl}$  совпадают с выражениями для аналогичных коэффициентов, полученными в [8] для случая упругопластического изгиба пластин с линейным упрочнением (при этом в [8] следует принять  $\nu = 1/2$ ,  $\omega_k = 0$  ( $1 \leq k \leq N$ ) и заменить  $-w_{,mn}$  на  $\dot{\varepsilon}_{mn}$ ; в случае осесимметричного изгиба круглой пластины коэффициенты  $C_{ijkl}$  при  $E_s = 0$  определены в [9]).

С учетом (6) выражения для моментов (7) подставим в уравнение движения (1) и запишем его (для удобства дальнейшего изложения) в виде системы двух уравнений

$$\rho H(\mathbf{x})v_{,t} = p(\mathbf{x}, t) - D(v), \quad w_{,t} = v(\mathbf{x}, t) \quad (t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in G), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} D(v) = & \{ [C_{1111}v_{,11} + C_{1122}(f^2v_{,22} + \beta v_{,1}/x_1)]_{,1} + 2f[C_{1212}(fv_{,12} - \beta v_{,2}/x_1^2)]_{,2} + \\ & + \beta(C_{1111} - C_{1122})(v_{,11} - f^2v_{,22} - \beta v_{,1}/x_1)/x_1 \}_{,1} + f\{ 2[C_{1212}(fv_{,12} - \beta v_{,2}/x_1^2)]_{,1} + \\ & + f[C_{1122}v_{,11} + C_{1111}(f^2v_{,22} + \beta v_{,1}/x_1)]_{,2} + 4\beta C_{1212}(fv_{,12} - \beta v_{,2}/x_1^2)/x_1 \}_{,2} + \\ & + \beta\{ [C_{1111}v_{,11} + C_{1122}(f^2v_{,22} + \beta v_{,1}/x_1)]_{,1} + 2f[C_{1212}(fv_{,12} - \beta v_{,2}/x_1^2)]_{,2} + \\ & + \beta(C_{1111} - C_{1122})(v_{,11} - f^2v_{,22} - \beta v_{,1}/x_1)/x_1 \}_{,1}. \quad (9) \end{aligned}$$

Для однозначного интегрирования системы (8) необходимо использовать начальные условия

$$w(\mathbf{x}, t_0) = w_0(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}, t_0) = v_0(\mathbf{x}) \quad (10)$$

и известные граничные условия [5], которые здесь не приводятся. (Если заданы кинематические граничные условия для прогиба  $w$ , то за счет второго равенства в (8) можно получить соответствующие условия для скорости прогиба  $v$ . При задании статических граничных условий на кромках следует использовать соотношения (6), (7).)

**2. Метод решения начально-краевой задачи.** Если скорость  $v$  известна, то определение прогиба  $w$  из второго уравнения в (8) при первом начальном условии (10) не вызывает затруднений. Первое уравнение в (8) является замкнутым относительно скорости  $v$  квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа, содержащим производную от  $v$  первого порядка по времени  $t$  и производные вплоть до четвертого порядка по переменным  $x_1, x_2$ .

Для численного интегрирования по времени  $t$  начально-краевой задачи, соответствующей первому уравнению в (8), используем один из обобщенных методов Рунге — Кутты, а именно двухстадийный обобщенный метод Лобатто IIIA (метод трапеций) (см. [10]), имеющий второй порядок точности по  $\tau$  ( $\tau$  — шаг по времени  $t$ ). Согласно этому методу

$$v^{n+1}(\mathbf{x}) = v^n(\mathbf{x}) + \tau(p^n(\mathbf{x}) - D(v^n(\mathbf{x})) + p^{n+1}(\mathbf{x}) - D(v^{n+1}(\mathbf{x}))) / (2\rho H(\mathbf{x})), \quad (11)$$

где

$$p^n(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_n), \quad v^n(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, t_n), \quad t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (t_0 = 0), \quad (12)$$

шаг по времени  $\tau > 0$  может быть переменным ( $\tau = \tau_n$ ).

Уравнение (11) запишем в виде

$$\tau D(v^{n+1}) + 2\rho H(\mathbf{x})v^{n+1} = 2\rho H(\mathbf{x})v^n + \tau(p^n(\mathbf{x}) + p^{n+1}(\mathbf{x})) - \tau D(v^n). \quad (13)$$

Если на  $n$ -м по времени слое скорость прогиба  $v^n$  известна, то уравнение (13) с учетом выражения (9) определяет решение на следующем  $(n + 1)$ -м слое. Недостатком уравнения (13) является то, что для вычисления его правой части необходимо к известной функции  $v^n$  применять нелинейный дифференциальный оператор  $D$ . Для того чтобы избежать дифференцирования в правой части уравнения (13), введем в рассмотрение функции

$$P_n(\mathbf{x}) = \tau D(v^n(\mathbf{x})) + 2\rho H(\mathbf{x})v^n(\mathbf{x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Тогда разрешающее уравнение (13) принимает вид

$$\tau D(v^{n+1}(\mathbf{x})) + 2\rho H(\mathbf{x})v^{n+1}(\mathbf{x}) = P_{n+1}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле

$$P_{n+1}(\mathbf{x}) = -P_n(\mathbf{x}) + 4\rho H(\mathbf{x})v^n(\mathbf{x}) + \tau(p^n(\mathbf{x}) + p^{n+1}(\mathbf{x})), \quad (16)$$

полученной в результате сопоставления выражения (14) и правой части (13).

При нулевых начальных условиях (см. (10)):

$$v^0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (17)$$

из (14) с учетом (9) имеем

$$P_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (18)$$

а из (16)–(18) следует

$$P_1(\mathbf{x}) = \tau(p^0(\mathbf{x}) + p^1(\mathbf{x})). \quad (19)$$

Таким образом, для определения скорости прогиба на  $(n + 1)$ -м по времени слое необходимо проинтегрировать уравнение (15) с известной правой частью (16) (с учетом (17)–(19)) при соответствующих граничных условиях, которые получаются из граничных условий для первого уравнения в (8) формальной заменой  $v$  на  $v^{n+1}$ .

Уравнение (15) с учетом выражения (9) является квазилинейным эллиптическим уравнением четвертого порядка, и его можно интерпретировать как уравнение равновесия установившейся ползучести поперечно изгибаемой пластины на линейно-вязком основании. В силу известного формального сходства уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения) и уравнений теории упругопластических деформаций [7] равенство (15) совпадает с уравнением статического упругопластического поперечного изгиба пластины на линейно-упругом основании, если под функцией  $v^{n+1}$  понимать прогиб. Поэтому для интегрирования граничной задачи, соответствующей уравнению (15), можно использовать известные методы статики или установившейся ползучести.

Для линеаризации уравнения (15) можно применить итерационный метод, предложенный в [7] для решения задач установившейся ползучести и аналогичный методу переменных параметров упругости, широко используемому при решении упругопластических задач статики [11]. Метод переменных параметров упругости применительно к изгибаемым пластинам адаптирован в [8]. После такой линеаризации уравнение (15) можно рассматривать как линейное эллиптическое уравнение изгиба изотропной неоднородной пластины на линейно-упругом основании и использовать для его интегрирования достаточно хорошо разработанные в теории изгибаемых пластин численные, вариационные и другие методы [12]. (Сходимость метода переменных параметров упругости доказана [9, 11].)

В качестве начального приближения  $v_{(0)}^m(\mathbf{x})$  для функции  $v^m(\mathbf{x})$  можно выбрать решение на предыдущем по времени слое

$$v_{(0)}^m(\mathbf{x}) = v^n(\mathbf{x}), \quad m = n + 1$$

или функцию

$$v_{(0)}^m(\mathbf{x}) = 3v^n(\mathbf{x}) + (\tau p^n(\mathbf{x}) - P_n(\mathbf{x})) / (\rho H(\mathbf{x})), \quad m = n + 1,$$

получающуюся по формуле Тейлора  $v^m(\mathbf{x}) = v^n(\mathbf{x}) + \tau v_{,t}(\mathbf{x}, t_n) + O(\tau^2)$  с учетом выражения для  $v_{,t}$  из (8) и оператора  $D(v^n)$  из (14) в предположении, что на предыдущем,  $n$ -м по времени слое решение задачи известно.

В качестве модельной рассмотрим задачу об осесимметричной динамике круглых и кольцевых пластин переменной по радиусу  $r$  толщины. Предполагается, что нагрузка  $p$ , закрепление пластины и ее толщина не зависят от полярного угла  $x_2$ , поэтому прогиб и его скорость также не зависят от  $x_2$ . В этом случае уравнение (15) с учетом (9) целесообразно записать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $M_r^m(r)$  и  $v^m(r)$  ( $r \equiv x_1$ ):

$$\begin{aligned} -\tau \frac{d^2 M_r^m}{dr^2} + A_1 \frac{dM_r^m}{dr} - A_2 M_r^m - B_1 \frac{d^2 v^m}{dr^2} - B_2 \frac{dv^m}{dr} + 2\rho H(r)v^m &= P_m(r), \\ -M_r^m - C_{1111} \frac{d^2 v^m}{dr^2} - \frac{C_{1122}}{r} \frac{dv^m}{dr} &= 0, \quad m = n + 1, \quad r_0 < r < r_1, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\tau}{r}(2-a), & A_2 &= -\frac{\tau}{r} \frac{da}{dr}, & B_1 &= -\frac{\tau b}{r}, & B_2 &= -\frac{\tau}{r} \frac{db}{dr}, \\ a &= C_{1122}/C_{1111}, & b &= (C_{1122}^2/C_{1111} - C_{2222})/r; \end{aligned} \quad (21)$$

$M_r^m(r) \equiv M_{11}^m(r)$  — радиальный момент в пластине на  $m$ -м по времени слое;  $r_0, r_1$  — радиусы внутренней и внешней ( $0 < r_0 < r_1$ ) кромок пластины; функция  $P_m(r)$  определяется по формуле (16) при замене  $\mathbf{x}$  на  $r$ .

Линеаризуем систему (20) указанным выше методом. Пусть  $v_{(k)}^m(r), M_{(k)}^m(r)$  — известные  $k$ -е приближения искомых функций  $v^m, M_r^m$ . Тогда следующие приближения этих функций определим из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} -\tau \frac{d^2 M_{(l)}^m}{dr^2} + A_1^{(k)} \frac{dM_{(l)}^m}{dr} - A_2^{(k)} M_{(l)}^m - B_1^{(k)} \frac{d^2 v_{(l)}^m}{dr^2} - B_2^{(k)} \frac{dv_{(l)}^m}{dr} + 2\rho H v_{(l)}^m &= P_m, \\ -M_{(l)}^m - C_{1111}^{(k)} \frac{d^2 v_{(l)}^m}{dr^2} - \frac{C_{1122}^{(k)}}{r} \frac{dv_{(l)}^m}{dr} &= 0, \quad m = n + 1, \quad l = k + 1, \quad r_0 < r < r_1, \end{aligned} \quad (22)$$

где коэффициенты  $A_i^{(k)}, B_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ) известны и получаются по формулам (21) с использованием функции  $v_{(k)}^m$  (см. [8]).

К системе (22) нужно добавить граничные условия. В центре круглой пластины

$$\frac{dv_{(l)}^m}{dr} = 0, \quad \frac{dM_{(l)}^m}{dr} = 0, \quad m = n + 1, \quad l = k + 1, \quad r = 0. \quad (23)$$

Если пластина шарнирно оперта, то на кромках

$$v_{(l)}^m = 0, \quad M_{(l)}^m = 0, \quad m = n + 1, \quad l = k + 1 \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad r = r_1, \quad (24)$$

а при жестком защемлении

$$v_{(l)}^m = 0, \quad \frac{dv_{(l)}^m}{dr} = 0, \quad m = n + 1, \quad l = k + 1 \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad r = r_1. \quad (25)$$

(Могут быть заданы и другие условия опирания, например, условия опирания на вязкоупругом основании и т. п.)

Заменяя в (22), (23), (25) производные конечными разностями на равномерной сетке по  $r$  с шагом  $h$ , для трехточечного шаблона получим конечно-разностные аналоги уравнений (22) и граничных условий (23), (25) со вторым порядком аппроксимации по  $h$ . Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений можно использовать устойчивую матричную прогонку [13].

Как показывают многочисленные расчеты, итерационный процесс (22)–(25) всегда сходится.

Если скорость прогиба на  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м слоях известна, то из второго уравнения в (8) по формуле трапеций (с учетом первого начального условия в (10)) можно определить прогиб на  $(n + 1)$ -м слое со вторым порядком точности по  $\tau$ :

$$w^{n+1} = w^n + \tau(v^n + v^{n+1})/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

В случае вязкопластического деформирования разрешающее уравнение динамики пластины (первое уравнение в (8) с учетом (9)) является квазилинейным уравнением параболического типа относительно скорости прогиба  $v$ . Известно, что для квазилинейных дифференциальных уравнений общая теория устойчивости и сходимости конечно-разностных схем разработана недостаточно [14], поэтому основным критерием достоверности той или иной конечно-разностной схемы служат приближенные решения для тестовых (модельных) задач, аналитические решения которых известны.

Авторам данной работы пока не удалось доказать устойчивость численной схемы (15), (26) в общем случае, когда оператор  $D$  (см. (9)) нелинеен. Тем не менее об устойчивости этой схемы свидетельствуют физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов и хорошее соответствие численных результатов известным аналитическим решениям (см. п. 3). В случае линейной вязкости (см. (4) при  $\xi_s \rightarrow \infty$ ) спектральную устойчивость схемы (13), (15) можно доказать, повторив все рассуждения в [10], использованные при доказательстве устойчивости обобщенных методов Рунге — Кутты для решения задачи нестационарной теплопроводности, которая описывается параболическим уравнением, содержащим производную по времени  $t$  только первого порядка (подобно первому уравнению в (8)).

**3. Обсуждение результатов расчетов неупругой динамики круглых и кольцевых пластин.** Исследуем динамический вязкопластический изгиб круглых пластин радиусом  $r_1 = 1$  м. Толщина пластин может быть постоянной ( $H(r) = H_* = \text{const}$ ) или переменной: в случае шарнирного опирания

$$H(r, s) = sH_* + 2H_*(1 - s)(r_1^2 - r^2)/r_1^2 \quad (0 \leq r \leq r_1, \quad 0 < s \leq 1) \quad (27)$$

или

$$H(r, s) = sH_* + \frac{H_*\pi^2}{4(\pi - 2)}(1 - s) \cos\left(\frac{\pi r}{2r_1}\right) \quad (0 \leq r \leq r_1, \quad 0 < s \leq 1), \quad (28)$$

в случае жесткого защемления кромки

$$H(r, s, r_{\min}) = sH_* + \frac{H_*(1 - s)}{r_{\min}^4 - r_{\min}^2 r_1^2 + r_1^4/3} (r_{\min}^2 - r^2)^2 \quad (0 < s \leq 1, \quad 0 < r_{\min} < r_1) \quad (29)$$

или

$$H(r, s, r_{\min}) = sH_* + \frac{H_*(1 - s) \cos^2(\pi r/(2r_{\min}))}{1/2 + (r_{\min}/(\pi r_1)) \sin(\pi r_1/r_{\min}) + (r_{\min}/(\pi r_1))^2 (\cos(\pi r_1/r_{\min}) - 1)}, \quad (30)$$

$$0 < r_{\min} < r_1, \quad 0 < s \leq 1.$$

При задании толщины пластины в виде (27)–(30) ее объем равен объему пластины постоянной толщины  $H_*$ . Из (27)–(30) следует, что в центре пластины  $dH/dr = 0$  ( $r = 0$ );

при  $0 < s < 1$  из (27), (28) вытекает, что толщина пластины на кромке  $r = r_1$  меньше, чем в центре ( $r = 0$ ); параметр  $r_{\min}$  в (29), (30) определяет значение полярного радиуса  $r$ , при котором пластина имеет минимальную (если  $0 < s < 1$ ) толщину  $H(r_{\min}, s, r_{\min}) = sH_*$ ; при  $s = 1$  из формул (27)–(30) следует, что пластина имеет постоянную толщину  $H_*$ .

Внешняя распределенная нагрузка является фронтальной нагрузкой взрывного типа:

$$p(r, t) = p(t) = \begin{cases} p_0 = \text{const} > 0, & 0 < t \leq T_0, \\ 0, & t > T_0 > 0 \end{cases} \quad (31)$$

или

$$p(r, t) = p(t) = p_0 \exp(-\alpha t) \quad (t > 0), \quad (32)$$

где  $p_0$  — интенсивность нагрузки или значение нагрузки в начальный момент времени  $t_0 = 0$ ;  $\alpha = 12 \text{ с}^{-1}$  — параметр затухания нагрузки. (Может быть задан другой закон изменения взрывной нагрузки по времени [2], в рамках настоящего исследования это не принципиально.)

Ниже рассматриваются пластины, изготовленные из алюминиевого сплава Д16 ( $\rho = 2780 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma_s = 380 \text{ МПа}$  [15]) или из высококачественной малоуглеродистой стали ( $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma_s = 248 \text{ МПа}$  [4]). Коэффициент вязкого упрочнения  $E_s = 90,9 \text{ МПа} \cdot \text{с}$  для стали получен по табличным данным из [4] с использованием метода наименьших квадратов. Во всех проведенных расчетах принималось  $E = 10^{16} \text{ Па} \cdot \text{с}$  (см. (4)), что соответствует вязкопластической модели, приближенной к модели жестковязкопластического тела.

Для тестирования изложенного в п. 2 метода сравним результаты численных расчетов с известным аналитическим решением [1], полученным по идеальной жесткопластической схеме ( $E_s = 0$ ) для шарнирно опертой пластины постоянной толщины  $H_*$  при динамической нагрузке (31). Согласно [1] следует различать два уровня нагружения: 1) нагрузки малой и средней интенсивности, при которых

$$p_s < p_0 \leq 2p_s; \quad (33)$$

2) нагрузки высокой интенсивности, при которых

$$p_0 > 2p_s. \quad (34)$$

В (33), (34)

$$p_s = 6M_s/r_1^2, \quad M_s = \sigma_s H_*^2/4, \quad (35)$$

$M_s$  — предельный момент;  $p_s$  — предельная равномерно распределенная поперечная нагрузка.

При уровнях нагрузки (33) в пластине не возникают поступательно движущиеся пластические зоны, время  $T_f$  остановки движения определяется следующим образом:

$$T_f = p_0 T_0 / p_s, \quad (36)$$

а остаточный прогиб вычисляется по формуле

$$w(r, T_f) = \frac{p_0(p_0 - p_s)}{\rho H_* p_s} T_0^2 \left(1 - \frac{r}{r_1}\right), \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad (37)$$

т. е. срединная плоскость пластины деформируется в конус. При уровнях нагрузки (34) движение пластины сопровождается возникновением поступательно движущейся пластической круговой зоны, которая с течением времени уменьшается и стягивается к центру

Сравнение аналитических и численных решений задачи  
о неупругой динамике круглой пластины из малоуглеродистой стали

Решение	$p_0 = 2p_s = 1,1904$ МПа		$p_0 = 4p_s = 2,3808$ МПа	
	$T_f$ , с	$W_{\max}$	$T_f$ , с	$W_{\max}$
Аналитическое	0,2	0,744	0,4	3,72
Численное	0,193 (3,5 %)	0,581 (22,0 %)	0,388 (3,0 %)	3,60 (3,14 %)

пластины. Время остановки и в этом случае определяется равенством (36), а остаточный прогиб вычисляется по формуле

$$w(r, T_f) = \begin{cases} \frac{p_0 T_0^2}{2\rho H_*} \left[ \frac{p_0}{2p_s} \left( 3 - \frac{r}{r_1} - \frac{r^2}{r_1^2} - \frac{r^3}{r_1^3} \right) - 1 \right], & 0 \leq r \leq r_p, \\ \frac{p_0 T_0^2}{2\rho H_*} \left[ \frac{p_0}{2p_s} \left( 3 - \frac{r_p}{r_1} - \frac{r_p^2}{r_1^2} - \frac{r_p^3}{r_1^3} \right) - 1 \right] \left( 1 - \frac{r_p - r}{r_p - r_1} \right), & r_p < r \leq r_1, \end{cases} \quad (38)$$

где значение  $r_p$  определяется уравнением

$$\frac{p_0}{2p_s} = \frac{r_1^3}{(r_1 - r_p)^2(r_1 + r_p)}. \quad (39)$$

В таблице приведены точные, рассчитанные по формулам (36)–(39), и приближенные, рассчитанные по схеме, изложенной в п. 2, значения времени остановки  $T_f$  и максимального безразмерного остаточного прогиба  $W_{\max} = H_* w_{\max} / (2r_1^2)$ , который возникает в центре пластины. В расчетах характерный период времени  $T = 1$  с, в течение которого изучалось движение пластины, разбивался на 1000 слоев ( $\tau = T/1000$ ), а по радиусу пластины вводился 201 узел. Расчеты проводились для нагрузки средней интенсивности ( $p_0 = 1,1904$  МПа), что для пластины из малоуглеродистой стали толщиной  $H_* = 0,04$  м соответствует значению  $p_0 = 2p_s$ , а также при нагрузке большой интенсивности ( $p_0 = 2,3808$  МПа), что соответствует значению  $p_0 = 4p_s$  (см. (35)). Время действия нагрузки (31)  $T_0 = 0,1$  с. В таблице в скобках указаны расхождения численного и аналитического решений, выраженные в процентах.

На рис. 1 представлены эпюры безразмерных остаточных прогибов  $W(x) = H_* w(x) / (2r_1^2)$ ,  $x = r/r_1$ , определенные численно и по формулам (37)–(39). (Максимальные значения прогибов на кривых 1, 1', 2, 2' приведены в таблице.) Из таблицы и рис. 1 следует, что время остановки  $T_f$ , определенное численно, хорошо согласуется со значением  $T_f$ , полученным из формулы (36); остаточный же прогиб, вычисленный по схеме, изложенной в п. 2, при нагрузках малой и средней интенсивности может на десятки процентов отличаться от аналитического решения (37) (ср. кривые 1, 1'), но при нагрузках высокой интенсивности различие между численным и аналитическим (38), (39) решениями быстро уменьшается по мере увеличения амплитуды нагрузки, и уже при  $p_0 = 4p_s$  оно составляет примерно 3 % (см. таблицу и кривые 2, 2' на рис. 1). При дальнейшем увеличении интенсивности нагрузки  $p_0$  погрешность численного решения существенно не меняется. Так, при  $p_0 = 8p_s = 4,7616$  МПа значения  $T_f$  и  $W_{\max}$ , определенные численно и аналитически, различаются на 2 и 3 % соответственно.

Следует отметить, что численное решение, полученное по схеме, изложенной в п. 2, не может быть неограниченно приближено к аналитическому (37)–(39). Это обусловлено тремя факторами. Во-первых, аналитическое решение (37)–(39) получено на основе идеальной жесткопластической модели, а численное решение — на базе вязкопластической модели (4), при использовании которой решение зависит от линейной вязкости  $E \neq \infty$ ,



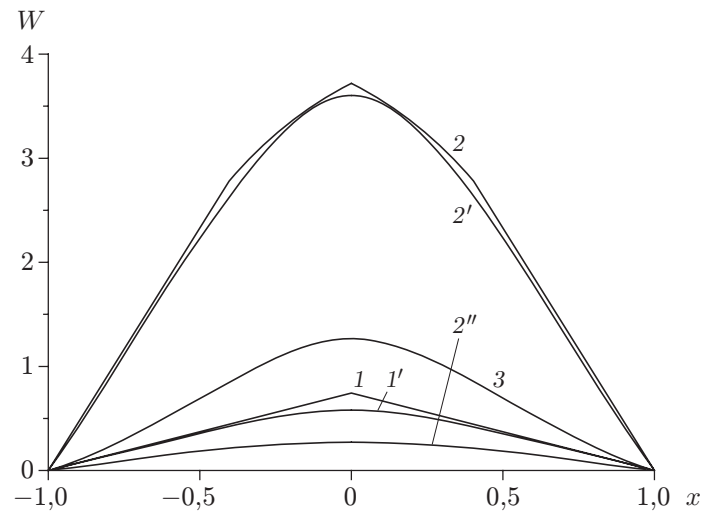


Рис. 1. Сравнение остаточных прогибов круглой пластины, определенных аналитически и численно:

1 — расчет по формуле (37) при  $p_0 = 2p_s$ ; 1' — численный расчет при  $p_0 = 2p_s$ ; 2 — расчет по формулам (38), (39) при  $p_0 = 4p_s$ ; 2' — численный расчет при  $p_0 = 4p_s$ ; 2'' — численный расчет при  $p_0 = 4p_s$  с учетом вязкого упрочнения; 3 — численный расчет для жесткозашемленной пластины при  $p_0 = 4p_s$

необходимой для обеспечения однозначности зависимости  $\sigma \sim \xi$ . Во-вторых, аналитическое решение получено с использованием критерия текучести Треска [1], а численное — с использованием критерия текучести Мизеса [6]. В-третьих, из (36)–(38) следует, что величина остаточных прогибов и время остановки существенно зависят от избыточного давления (от величины  $p_0/p_s > 1$ ), вызывающего движение пластины. Если интенсивность нагрузки  $p_0$  фиксирована, то величина избыточного давления определяется значением предельной нагрузки  $p_s$ , которая при использовании критерия текучести Треска вычисляется по формуле (35). В случае использования критерия текучести Мизеса  $p_s \approx 6,33M_s/r_1^2$  [16] (т. е. на 5,5 % больше значения, полученного по формуле (35)), что приводит к уменьшению избыточного давления. Указанные факторы обуславливают уменьшение времени остановки и величины остаточных прогибов, определенных по схеме, изложенной в п. 2, по сравнению с аналитическим решением (36)–(39), особенно при нагрузках малой и средней интенсивности. Как известно, вычисленные аналитически остаточные прогибы (37)–(39) превышают экспериментальные значения на 30–80 %, поэтому полученное численное решение лучше согласуется с экспериментом, чем аналитическое [2].

Результаты, приведенные в таблице, получены по идеальным жесткопластической и вязкопластической схемам ( $E_s = 0$ ). Если учесть зависимость предела текучести малоуглеродистой стали от скорости деформаций ( $E_s \neq 0$ ), то получим другие значения времени остановки и остаточных прогибов. Так, кривая 2'' на рис. 1 характеризует остаточные прогибы пластины с учетом вязкого упрочнения ее материала при  $p_0 = 4p_s$ . Результаты сравнения кривых 2', 2'' показывают: учет зависимости предела текучести от скорости деформации приводит к существенному снижению максимальных величин остаточных прогибов (почти в 14 раз), что согласуется с экспериментальными данными [2].

Кроме того, на величину остаточных прогибов значительное влияние оказывает способ закрепления пластины. Кривая 3 на рис. 1 характеризует эпюру остаточных прогибов жесткозашемленной пластины при интенсивности нагрузки  $p_0 = 4p_s = 2,3808$  МПа без учета вязкого упрочнения ( $E_s = 0$ ). Результаты сравнения кривых 2' и 3 показывают, что

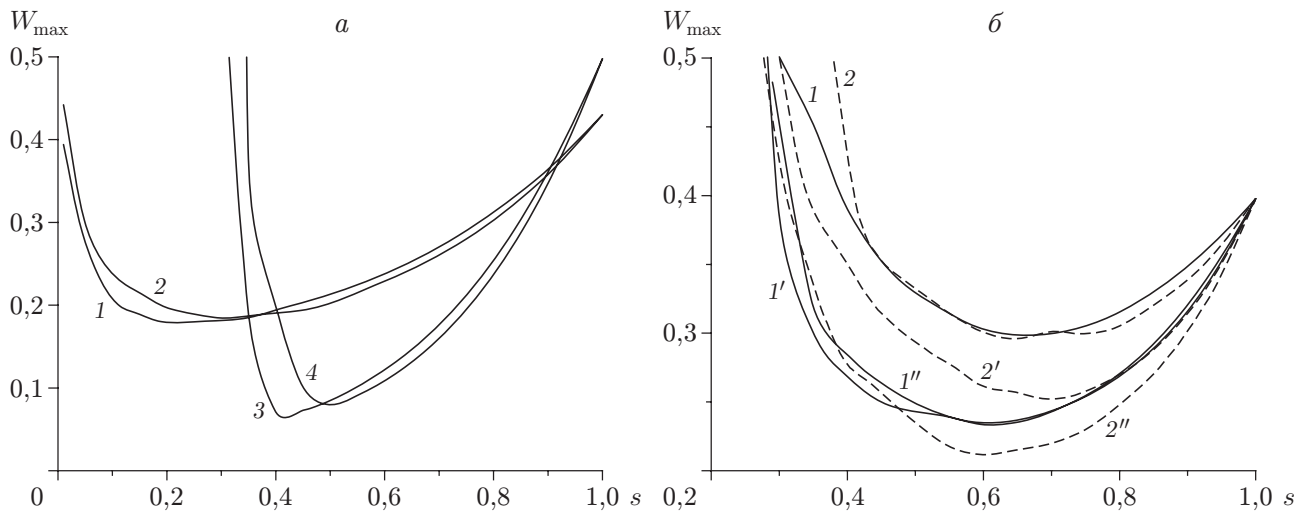


Рис. 2. Зависимости максимумов остаточных прогибов шарнирно опертых (*a*) и жесткозащемленных (*б*) круглых пластин от параметра профилирования:

*a* — 1, 2 — расчет по формулам (27), (28) для стальных пластин; 3, 4 — расчет по формулам (27), (28) для алюминиевых пластин; *б* — сплошные линии — расчет с использованием профилей (29), штриховые — расчет с использованием профилей (30); 1, 2 —  $r_{\min} = 0,9r_1$ , 1', 2' —  $r_{\min} = 0,8r_1$ , 1'', 2'' —  $r_{\min} = 0,7r_1$

замена шарнирно опертой пластины на жесткозащемленную приводит к уменьшению максимального остаточного прогиба почти в три раза. Если учесть вязкое упрочнение стали, то максимальный остаточный прогиб защемленной пластины будет почти в 30 раз меньше максимума на кривой 3.

Выше исследовалась динамика пластин постоянной толщины  $H_*$ . Варьируя форму профиля пластины, можно управлять остаточными прогибами, величины которых в рамках вязкопластической модели характеризуют степень повреждаемости конструкции. На рис. 2 приведены зависимости максимальных остаточных прогибов  $W_{\max}$  шарнирно опертых (рис. 2, *a*) и жесткозащемленных (рис. 2, *б*) пластин от значения параметра профиля  $s$  в (27)–(30) при нагрузках взрывного типа (32) разной интенсивности  $p_0$ . Кривые 1, 2 на рис. 2, *a* рассчитаны соответственно с использованием равенств (27), (28) для стальных пластин при характерных размерах  $H_* = 0,04$  м,  $r_1 = 1$  м с учетом вязкого упрочнения материала при начальной нагрузке  $p_0 = 5$  МПа. Кривые 3, 4 получены соответственно на основании формул (27), (28) для пластин при тех же характерных размерах из сплава Д16 и  $p_0 = 1,8$  МПа (предел текучести алюминиевых сплавов не зависит от скорости деформаций [17]). На рис. 2, *б* все кривые определены для стальных защемленных пластин при тех же характерных размерах и начальной нагрузке  $p_0 = 15$  МПа. Сплошные линии рассчитаны с использованием профилей (29), штриховые — с использованием профилей (30) при различных значениях параметра  $r_{\min}$ . Так, кривые 1, 2 получены при  $r_{\min} = 0,9r_1$ , кривые 1', 2' — при  $r_{\min} = 0,8r_1$ , а кривые 1'', 2'' — при  $r_{\min} = 0,7r_1$ .

Все кривые на рис. 2 имеют локальные минимумы, причем значения  $W_{\max}$  в этих минимумах в несколько раз меньше, чем при  $s = 1$  (для пластин постоянной толщины). Следовательно, за счет рационального подбора толщины пластины остаточные прогибы можно уменьшить в несколько раз. На рис. 3 приведены эпюры остаточных прогибов  $W(x)$  для некоторых профилированных (кривые 1'–3') и непрофилированных (кривые 1–3) пластин.

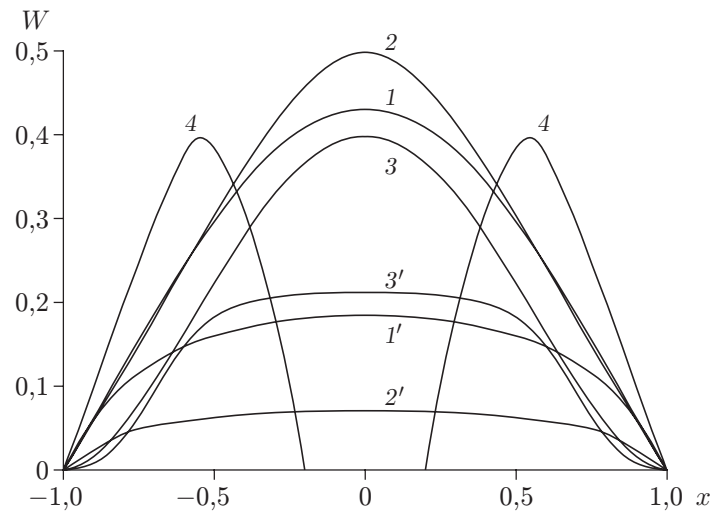


Рис. 3. Остаточные прогибы круглых и кольцевых пластин постоянной и переменной толщины при различных типах закрепления:

1, 1' — шарнирно опертые стальные пластины с распределением толщины в соответствии с зависимостью (28) при  $s = 1,0; 0,3$ ; 2, 2' — шарнирно опертые алюминиевые пластины с распределением толщины в соответствии с зависимостью (27) при  $s = 1,0; 0,4$ ; 3, 3' — защемленные стальные пластины с распределением толщины в соответствии с зависимостью (29) при  $r_{\min} = 0,7r_1$  и  $s = 1,0; 0,6$ ; 4 — кольцевая алюминиевая шарнирно опертая пластина постоянной толщины

Схема (22)–(25) позволяет рассчитывать также неупругую динамику кольцевых пластин. На рис. 3 кривые 4 характеризуют остаточный прогиб кольцевой ( $r_0 = 0,2r_1$ ) алюминиевой шарнирно опертой пластины постоянной толщины  $H_* = 0,04$  м при начальном значении нагрузки  $p_0 = 4,5$  МПа.

**4. Выводы.** Изложенный в данной работе метод позволяет эффективно решать задачи вязкопластической динамики пластин постоянной и переменной толщины при нагрузках взрывного типа. Задание рационального распределения толщины пластины позволяет в несколько раз уменьшить максимальную величину ее остаточных прогибов, а значит, существенно уменьшить ее повреждаемость при фиксированном расходе материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гопкинс, Прагер. Динамика пластической круглой пластинки // Механика. 1955. Вып. 3. С. 112–122.
2. Комаров К. Л. Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
3. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
4. Ворнок Ф., Поуп Дж. Изменение механических свойств мягкой стали при повторных ударах // Механика. 1950. Вып. 2. С. 69–83.
5. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.
6. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
8. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Уругоупругий изгиб прямоугольных пластин, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композит. материалов. 2005. Т. 41, № 1. С. 17–36.

9. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
10. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Обобщение методов Рунге — Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 51–76.
11. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968.
12. **Власов В. З.** Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. М.: Физматгиз, 1960.
13. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.
14. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
15. **Композиционные материалы:** Справ. Киев: Наук. думка, 1985.
16. **Гопкинс, Прагер.** Несущая способность круглых пластинок // Механика. 1955. Вып. 3. С. 100–111.
17. **Мейден, Грин.** Испытание на скоростное деформирование при сжатии для шести материалов при скоростях деформации от  $10^{-3}$  до  $10^4$  мм/мм/сек // Прикл. механика: Тр. амер. о-ва. Сер. Е. 1966. № 3. С. 20–30.

*Поступила в редакцию 6/IV 2006 г.*

---