УДК 517.9

КОМПЕНСИРУЮЩАЯ РОЛЬ САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕСИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО ШАРА

М. А. Гузев[*,**], В. Лю[***], Ч. Ци[***], Е. П. Рябоконь[**]

[*] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия
[**] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990 Пермь, Россия
[***] Пекинский университет строительства и архитектуры, 100044 Пекин, Китай
E-mails: guzev@iam.dvo.ru, 373994209@qq.com, qichengzhi@bucea.edu.cn, riabokon.evgenii@gmail.com

На основе неевклидовой модели сплошной среды построено самоуравновешенное поле напряжений для несжимаемого шара. Полное поле напряжений представлено в виде суммы упругого и самоуравновешенного полей. С учетом условия отсутствия вкладов сингулярных решений в поле напряжений коэффициенты при сингулярностях упругого и самоуравновешенных полей напряжений можно связать линейным преобразованием, при этом сингулярности исчезают. Это позволяет построить несингулярное равновесное поле напряжений в случае сферически-симметричного состояния сплошной среды.

Ключевые слова: условие несовместности, неевклидова модель сплошной среды, сингулярности, самоуравновешенное поле напряжений.

DOI: 10.15372/PMTF20210504

Введение. Как известно, в инженерных конструкциях существуют внутренние самоуравновешенные (остаточные) напряжения, не исчезающие при снятии внешних нагрузок. Согласно определению [1] поле напряжений внутри тела обладает свойством самоуравновешенности, если суммарная сила и момент, действующие на тело, равны нулю. Попытка описать самоуравновешенные напряжения привела к необходимости введения в теоретические модели, описывающие физико-механические свойства материалов, дополнительных характеристик внутренней структуры материалов, в том числе скалярных и тензорных характеристик поврежденности, дефектности и т. п. В то же время изучение микрохарактеристик различных материалов физическими методами обусловило введение таких понятий дефектов кристаллического строения, как дислокации, дисклинации, вакансии и др.

Сингулярное поле напряжений вокруг дислокаций рассматривалось в работе [2]. Обзор различных способов устранения сингулярностей в континуальной теории дислокаций,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 19-19-00408).

предложенных начиная с 60-х гг. XX в., приведен в [3]. Исследования, выполненные в [4], посвящены разработке несингулярной модели, описывающей поле упругих напряжений и деформаций при наличии дислокаций и дисклинаций в рамках градиентной теории Миндлина. В [5] построены несингулярные решения уравнений градиентной упругости для дислокаций и трещин.

В работе [6] рассматривалось плоскодеформированное состояние сплошной среды на основе неевклидовой модели, в которой не выполняется условие совместности Сен-Венана. Построено решение для внутренних самоуравновешенных напряжений в полярной системе координат (r, φ) и показано, что поле полных внутренних напряжений представляет собой сумму поля упругих напряжений классической теории упругости и неевклидова поля самоуравновешенных напряжений, определяемого через функцию несовместности. Несмотря на то что каждое из этих полей напряжений имеет сингулярность при $r \to 0$, полное поле не является сингулярным. Это позволило использовать теоретические данные для обработки результатов эксперимента по измерению остаточных напряжений для систем с цилиндрической симметрией [6].

В данной работе для неевклидовой модели сплошной среды строится классическое сферически-симметричное поле остаточных напряжений [7], компенсирующее сингулярности упругого поля напряжений. В работе [8] с использованием неевклидовой модели сплошной среды для системы со сферической и цилиндрической симметрией построены поля остаточных напряжений, в которых имеются особенности в распределении напряжений в центре шара и на оси цилиндра. Решение, которое строится в данной работе, не содержит сингулярностей в центре шара.

1. Основные соотношения. Рассмотрим твердое тело, находящееся в состоянии равновесия при отсутствии массовых сил внутри объема V. В этом случае справедливы уравнения равновесия Коши

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{1}$$

В [9] показано, что решения σ_{ij} уравнений (1) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + T_{ij}. \tag{2}$$

Компоненты тензора σ_{ij} включают поле упругих напряжений τ_{ij} и поле самоуравновешенных напряжений T_{ij}. При этом поточечно удовлетворяются условия отсутствия внешних сил на поверхности тела

$$(\tau_{ij} n_j + T_{ij} n_j)\big|_{\partial V} = 0,$$

т. е. совместное действие указанных напряжений позволяет телу сохранять заданную форму. Один из способов описания поля самоуравновешенных напряжений предложен в работе [10].

Пусть реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и деформаций ε_{ij} является линейным (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{3}$$

(λ, μ — феноменологические параметры Ламе). В классической теории упругости компоненты ε_{ij} определяются через поле смещений u_i в виде $\varepsilon_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$. Как известно, необходимым и достаточным условием такого представления для тензора ε_{ij} является выполнение требования [11]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{li}}{\partial x^j\, \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j\, \partial x^l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x^i\, \partial x^k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^i\, \partial x^l} = 0. \tag{4}$$

Шесть линейных уравнений (4) называются условиями совместности Сен-Венана. Для плоскодеформированного состояния среды условие совместности редуцируется к единственному соотношению, что отличает двумерный случай от трехмерного.

Полагая, что напряжения σ_{ij} в (3) являются известными, запишем деформации ε_{ij} через них:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\Big(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\frac{\lambda\sigma}{3\lambda + 2\mu}\Big), \qquad \sigma = \sigma_{kk}. \tag{5}$$

Деформации ε_{ij} (5) не удовлетворяют условиям совместности Сен-Венана (4) для произвольного поля равновесных напряжений. Поэтому естественными дополнительными параметрами в модели являются функции несовместности

$$-R_{ij,kl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{li}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l}. \tag{6}$$

Если ввести метрический тензор $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$, то с математической точки зрения тензор Римана $R^q_{j,kl} = g^{qi} R_{ij,kl}$ ($g^{ki} g_{ij} = \delta^k_j$) характеризует отличие внутренней геометрии моделируемого объекта от евклидовой геометрии (формула (6) определяет линейную по ε_{ij} составляющую в тензоре Римана при малых деформациях) [12].

Расширение классической теории упругости, обусловленное исключением условия совместности и введением дополнительных параметров (6), соответствует переходу к неевклидовой модели сплошной среды. В этой модели [9] набор функций, определяющих тензор T_{ij}, достаточно велик и его уменьшение вызвано использованием гипотезы о геометрической структуре многообразия, порождаемого внутренней структурой материала. Рассмотрим случай, когда число таких функций минимально и равно единице. В этом случае самоуравновешенные напряжения T_{ij} можно представить следующим образом:

$$T_{ij} = \frac{\sigma_0 l^2}{4}\Big(\delta_{ij}\,\Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big). \tag{7}$$

Здесь постоянные σ_0 и l имеют размерность напряжения и длины соответственно; Δ — оператор Лапласа; функция F является неизвестной в общем случае. Выражения (7) тождественно удовлетворяют уравнениям (1) и интегральным условиям равновесия для сил и моментов. В неевклидовой модели функцию F следует параметризовать через математические объекты, отсутствующие при евклидовом геометрическом описании деформационных свойств упругой сплошной среды. Из сказанного выше следует, что таким объектом является тензор Римана. В трехмерном пространстве для вычисления тензора Римана достаточно знать симметричный тензор Риччи $R_{jl} = R^k_{j,kl}$ [12], который определяется своими инвариантами. Поскольку введена одна функция F, при переходе к неевклидовой модели естественно расширить классическую теорию упругости по параметру, связанному с одним из инвариантов тензора Риччи. Выберем след тензора Риччи $R = g^{lj} R_{jl}$, называемый скалярной кривизной, в качестве такого параметра и установим соотношение между R и F. Используя (6), запишем представление для следа тензора Риччи при малых деформациях в следующем виде:

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x^j\,\partial x^j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^j\,\partial x^k}. \tag{8}$$

Подставляя (5) в (8) и используя (1), получаем уравнение для первого инварианта тензора напряжений

$$\Delta\sigma = \frac{E}{2(1-\nu)}\,R, \qquad E = \mu\,\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{9}$$

В силу (2) решение для σ имеет структуру $\sigma = \tau + T$, где $\tau = \tau_{ii}$, $T = T_{ii}$,

$$\Delta\tau = 0, \qquad \Delta T = \frac{E}{2(1-\nu)}\,R. \tag{10}$$

Поскольку $T_{kk} = \sigma_0 l^2 \Delta F/2$ (7), из (10) следует неоднородное бигармоническое уравнение для определения функции F:

$$\Delta^2 F = \frac{E}{(1-\nu)\sigma_0 l^2}\,R.$$

Скалярная кривизна R введена в качестве термодинамического параметра при анализе явления зональной дезинтеграции [13], а также в моделях сплошных сред с внутренней структурой [14]. В предположении, что зависимость внутренней энергии среды от термодинамических переменных является квадратичной, в [14] получено стационарное уравнение для R:

$$\Delta^2 R = \gamma R, \qquad \gamma \neq 0.$$

Параметр γ зависит от пространственного масштаба задачи, и его размерность равна размерности длины в минус четвертой степени. Поскольку $\Delta^2 - \gamma = (\Delta + \sqrt{\gamma}\,)(\Delta - \sqrt{\gamma}\,)$, решение для R задается формулой $R = R_+ + R_-$, где R_+, R_- удовлетворяют уравнениям

$$(\Delta + \sqrt{\gamma}\,)R_+ = 0, \qquad (\Delta - \sqrt{\gamma}\,)R_- = 0. \tag{11}$$

Тогда $T = T_+ + T_-$, причем

$$\Delta T_+ = \frac{E}{2(1-\nu)}\,R_+, \qquad \Delta T_- = \frac{E}{2(1-\nu)}\,R_-.$$

Отсюда и из (11) получаем

$$T_+ = -\frac{E}{2(1-\nu)\sqrt{\gamma}}\,R_+, \qquad T_- = \frac{E}{2(1-\nu)\sqrt{\gamma}}\,R_-. \tag{12}$$

2. Сферическая симметрия. Сферически-симметричное поле напряжений σ_{ij} представим в сферических координатах (r, φ, θ), компоненты поля, которые являются главными вследствие симметрии, обозначим через σ_r, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$. Соотношения (2) записываются в виде

$$\sigma_r = \tau_r + T_r, \quad \sigma_\varphi = \tau_\varphi + T_\varphi, \quad \sigma_\theta = \tau_\theta + T_\theta, \quad \tau_\varphi = \tau_\theta, \quad T_\varphi = T_\theta,$$

где функции зависят только от переменной r. Введем безразмерную переменную $s = \sqrt[4]{\gamma}\,r$, тогда каждое из полей τ, T удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{d\tau_r}{ds} + \frac{2(\tau_r - \tau_\varphi)}{s} = 0, \qquad \frac{dT_r}{ds} + \frac{2(T_r - T_\varphi)}{s} = 0. \tag{13}$$

Первое уравнение (10) для инварианта $\tau = \tau_r + 2\tau_\varphi$ тензора упругих напряжений в сферических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + \frac{2}{s}\,\frac{d\tau}{ds} = 0.$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\tau = c_0 - c_1/s.$$

В классической теории упругости естественным физическим требованием для функции τ является отсутствие сингулярности при $s \to 0$. В данной работе полагаем, что полное поле напряжений не является сингулярным, а упругое может иметь особенность. Это позволяет сохранить слагаемое, содержащее c_1. Тогда нетрудно записать решения для компонент тензора упругих напряжений первого уравнения (13):

$$\tau_r = \frac{c_0}{3} - \frac{c_1}{2s} + \frac{c_2}{s^3}, \qquad \tau_\varphi = \tau_\theta = \frac{c_0}{3} - \frac{c_1}{4s} - \frac{c_2}{2s^3}. \tag{14}$$

В случае сферической симметрии система (11) записывается в следующей форме:

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}\Big(s^2\,\frac{\partial R_\pm}{\partial s}\Big) \pm R_\pm = 0.$$

В результате подстановки $R_\pm = f_\pm/\sqrt{s}$ это уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 f_\pm}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial f_\pm}{\partial s} \pm f_\pm - \frac{f_\pm}{4s^2} = 0.$$

Решения данного уравнения записываются через функции Бесселя с индексом $1/2$: $J_{1/2}(s)$ и $N_{1/2}(s)$ — функции Бесселя и Неймана соответственно, $K_{1/2}(s)$ — функция Макдональда, $I_{1/2}(s)$ — модифицированная функция Бесселя. Поскольку эти функции представляются через элементарные, имеем

$$R_+ = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(a\sin s - b\cos s), \quad R_- = \frac{1}{s}\Big(c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-s} + d\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,(\mathrm{e}^{s} - \mathrm{e}^{-s})\Big), \tag{15}$$

где размерность коэффициентов a, b, c, d равна размерности длины в минус второй степени. С учетом (12) получаем

$$T = T_+ + T_- = -\frac{E}{2(1-\nu)\sqrt{\gamma}}\,\frac{1}{s}\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(a\sin s - b\cos s) +$$
$$+ \frac{E}{2(1-\nu)\sqrt{\gamma}}\,\frac{1}{s}\,\Big(c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-s} + d\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,(\mathrm{e}^{s} - \mathrm{e}^{-s})\Big). \tag{16}$$

Поле T_r (13) вычисляется через квадратуры:

$$T_r = \frac{1}{s^3}\int^{s} \tilde{s}^2 T\,d\tilde{s} = T_{r,+} + T_{r,-}, \qquad T_{r,+} = \frac{1}{s^3}\int^{s} \tilde{s}^2 T_+\,d\tilde{s}, \qquad T_{r,-} = \frac{1}{s^3}\int_{s_0}^{s} \tilde{s}^2 T_-\,d\tilde{s}. \tag{17}$$

В результате несложных вычислений получаем

$$T_{r,+} = -\frac{E}{2s^3(1-\nu)\sqrt{\gamma}}\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(a\sin s - as\cos s - bs\sin s - b\cos s),$$
$$T_{r,-} = \frac{E}{2s^3(1-\nu)\sqrt{\gamma}}\,\Big(-c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-s(1+s)} + d\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\big(\mathrm{e}^{s(-1+s)} + \mathrm{e}^{-s(1+s)}\big)\Big). \tag{18}$$

3. Несингулярные решения. Поле упругих напряжений τ_r, τ_φ, τ_θ (14) имеет сингулярность при $s \to 0$. Функции T, T_r в (16)–(18) также содержат особенность при $s \to 0$. Условие отсутствия сингулярных вкладов в полных полях напряжений $\sigma_r = \tau_r + T_r$ и $\sigma = \tau + T$ приводит к тому, что коэффициенты в (14)–(16) не могут быть произвольными: их следует выбрать таким образом, чтобы сингулярности одного типа компенсировали друг друга.

Главная по s сингулярность τ_r, T_r имеет порядок $1/s^3$. Приравнивая к нулю комбинацию коэффициентов при $1/s^3$ в выражении $\sigma_r = \tau_r + T_r$, получаем

$$c_2 = -\sqrt{2/\pi}\,b + \sqrt{\pi/2}\,c. \tag{19}$$

Следующая сингулярность имеет порядок $1/s$. Из условия обращения в нуль набора коэффициентов при $1/s$ в выражении $\sigma_r = \tau_r + T_r$ следует

$$c_1 = \sqrt{2/\pi}\, b + \sqrt{\pi/2}\, c. \tag{20}$$

Главная по s сингулярность τ, T имеет порядок $1/s$. Однако требование отсутствия сингулярности в выражении $\sigma = \tau + T$ имеет вид (20), что не приводит к появлению дополнительного условия. Таким образом, при выполнении условий (19), (20) поля напряжений σ_r, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ не содержат сингулярностей.

Заключение. Выполненное в работе исследование показало, что при изучении сингулярностей можно применять подходы, основанные на использовании следующего известного в механике сплошной среды факта: при заданном распределении поверхностных и массовых сил поле напряжений определяется неоднозначно [11]. Это позволило представить поле напряжений в виде соотношения (2), а именно в виде суммы поля напряжений в классическом решении теории упругости τ_{ij} и поля самоуравновешенных напряжений T_{ij}. При построении поля T_{ij} использовано решение, которое имеет сингулярность того же типа, что и поле τ_{ij}. Требование отсутствия сингулярностей в полном поле напряжений (2) приводит к тому, что коэффициенты при сингулярностях решения в классической теории упругости вычисляются через параметры поля самоуравновешенных напряжений. Таким образом реализуется возможность компенсации сингулярностей упругого поля за счет самоуравновешенных полей напряжений и построения несингулярного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мясников В. П., Гузев М. А., Ушаков А. А.** Поля самоуравновешенных напряжений в сплошной среде // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 121–130.
2. **Burgers J. M.** Physics. Some considerations on the fields of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice. 1, 2 // Selected papers of J. M. Burgers. Dordrecht: Springer, 1995. P. 335–389. DOI: 10.1007/978-94-011-0195-0_11.
3. **Cai W., Arsenlis A., Weinberger C., Bulatov V.** A non-singular continuum theory of dislocations // J. Mech. Phys. Solids. 2006. V. 54, N 3. P. 561–587. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.09.005.
4. **Po G., Lazar M., Admal N. C., Ghoniem N.** A non-singular theory of dislocations in anisotropic crystals // Intern. J. Plasticity. 2018. V. 103. P. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.10.003.
5. **Parisis K., Konstantopoulos I., Aifantis E. C.** Nonsingular solutions of GradEla models for dislocations: An extension to fractional GradEla // J. Micromech. Molecul. Phys. 2018. V. 3, N 3/4. 1840013. DOI: 10.1142/s2424913018400131.
6. **Liu W., Guzev M., Qi C.** Non-Euclidean model for description of residual stresses in planar deformations // Appl. Math. Modell. 2021. V. 90. P. 615–623. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.001.
7. **Lee E. H., Rogers T. G.** On the generation of residual stresses in thermoviscoelastic bodies // J. Appl. Mech. 1965. V. 32, N 4. P. 874–880. DOI: 10.1115/1.3627329.
8. **Yavari A., Goriely A.** Nonlinear elastic inclusions in isotropic solids // Proc. Roy. Soc. A. 2013. V. 469, N 2160. 20130415. DOI: 10.1098/rspa.2013.0415.
9. **Мясников В. П., Гузев М. А.** Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // Докл. АН. 2001. Т. 380, № 5. С. 627–629.
10. **Киселев С. П.** Внутренние напряжения в твердом теле с дислокациями // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 131-136.

11. **Godunov S. K.** Elements of continuum mechanics and conservation laws / S. K. Godunov, E. I. Romensky. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
12. **Novikov S. P., Taimanov I. A.** Modern geometric structures and fields. Graduate studies in mathematics // J. Amer. Math. Soc. 2006. V. 71. DOI: 10.1090/gsm/071.
13. **Гузев М. А., Парошин А. А.** Неевклидова модель зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 147–156.
14. **Гузев М. А.** Структура кинематического и силового полей в римановой модели сплошной среды // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 5. С. 39–48.

Поступила в редакцию 16/VI 2021 г.,
после доработки — 16/VI 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.