

ОСОБЫЙ ВИХРЬ *

Л. В. Овсянников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

В процессе реализации программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики [1] выяснилось, что они обладают многими частично инвариантными решениями, большинство которых ранее сколько-нибудь подробно не изучалось. Такие решения требуют специального, подчас нетривиального анализа. Наше внимание привлекли решения, порождаемые допускаемой уравнениями газовой динамики группой вращений $O(3)$. Здесь специфика состоит в том, что достаточно хорошо изученные инвариантные относительно $O(3)$ решения (см., например, [2]), известные как сферически-симметричные, с точки зрения группового анализа являются особыми инвариантными решениями. Однако для группы $O(3)$ выполнены необходимые условия существования неособых частично инвариантных решений ранга два и дефекта один. Эти решения характерны тем, что их инвариантная составляющая сферически-симметрична, но касательная к сферам компонента вектора скорости отлична от нуля. Оказалось, что здесь открывается достаточно широкий класс новых решений.

Настоящая работа посвящена установлению факта существования таких решений и их общему анализу. Кинематика и динамика соответствующих движений газа весьма сложны и в деталях пока еще не очень ясны. Особый вихрь выделяется как точное решение со специальным начальным распределением касательной компоненты. Здесь приводятся частные примеры таких точных решений. Дополнительно рассмотрен случай установившегося течения несжимаемой жидкости, где решения типа особого вихря тоже существуют и достаточно обозримы.

1. Сферические координаты. В пространстве $R^3(x)$ наряду с декартовыми координатами точки $x = (x, y, z)$ и соответствующими компонентами вектора скорости $u = (u, v, w)$ вводятся сферические координаты (r, θ, φ) по формулам

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.1)$$

и соответствующие компоненты вектора скорости (U, V, W)

$$\begin{aligned} U &= u \sin \theta \cos \varphi + v \sin \theta \sin \varphi + w \cos \theta, \\ V &= u \cos \theta \cos \varphi + v \cos \theta \sin \varphi - w \sin \theta, \\ W &= -u \sin \varphi + v \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

На сферах $r = \text{const}$ компонента U равна величине нормальной составляющей вектора скорости, а (V, W) есть его касательная компонента. Вектор (V, W) характеризуется его модулем H и углом ω отклонения от меридиана:

$$V = H \cos \omega, \quad W = H \sin \omega. \quad (1.3)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17326).

В этих переменных базисные операторы допускаемой уравнениями газовой динамики группы вращений $O(3)$ таковы:

$$\begin{aligned} X_7 &= -\sin \varphi \partial_\theta - \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta \partial_\varphi + \cos \varphi (\sin \theta)^{-1} \partial_\omega, \\ X_8 &= \cos \varphi \partial_\theta - \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \partial_\varphi + \sin \varphi (\sin \theta)^{-1} \partial_\omega, \\ X_9 &= \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\partial_\theta = \partial/\partial\theta$ и т. д.

В переменных (1.1), (1.2) исходные уравнения газовой динамики имеют вид

$$\begin{aligned} DU + \rho^{-1} p_r &= r^{-1}(V^2 + W^2), \\ DV + (\rho r)^{-1} p_\theta &= r^{-1}(-UV + \operatorname{ctg} \theta W^2), \\ DW + (\rho r \sin \theta)^{-1} p_\varphi &= r^{-1}(-UW - \operatorname{ctg} \theta VW), \\ D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad DS = 0, \quad p = f(\rho, S), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где ρ — плотность; p — давление; S — энтропия газа; D и div — операторы:

$$\begin{aligned} D &= \partial_t + U \partial_r + r^{-1} V \partial_\theta + (r \sin \theta)^{-1} W \partial_\varphi, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= r^{-2} (r^2 U)_r + (r \sin \theta)^{-1} (\cos \theta V + \sin \theta V_\theta + W_\varphi) \end{aligned} \quad (1.6)$$

(индексами обозначены соответствующие частные производные). Функция f в (1.5) задает фиксированное уравнение состояния газа.

2. Представление частично инвариантных решений. В пространстве переменных $t, r, \theta, \varphi, U, H, \omega, \rho, S$ группа $O(3)$ с операторами (1.4) имеет инварианты t, r, U, H, ρ, S . Здесь искомая величина ω является «лишней» функцией. Поэтому, согласно [3], возможны частично инвариантные решения ранга два и дефекта один, в которых U, H, ρ, S зависят только от t, r , а ω является, вообще говоря, функцией всех независимых переменных t, r, θ, φ . Следовательно, исходное представление искомым частично инвариантных решений имеет вид

$$U = U(t, r), \quad H = H(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad S = S(t, r), \quad \omega = \omega(t, r, \theta, \varphi). \quad (2.1)$$

В результате подстановки этого представления в систему (1.5), после комбинирования второго и третьего уравнений система распадается на две подсистемы: инвариантную

$$D_0 U + \rho^{-1} p_r = r^{-1} H^2, \quad D_0(rH) = 0, \quad D_0 S = 0 \quad (p = f(\rho, S)) \quad (2.2)$$

с оператором $D_0 = \partial_t + U \partial_r$ и дополнительную

$$\begin{aligned} k \sin \theta D_0 \omega + \sin \theta \cos \omega \omega_\theta + \sin \omega \omega_\varphi &= -\cos \theta \sin \omega, \\ \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi &= \cos \theta \cos \omega + h \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введены обозначения вспомогательных функций, зависящих только от t, r :

$$k = r/H, \quad h = k(\rho^{-1} D_0 \rho + r^{-2} (r^2 U)_r). \quad (2.4)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что $H \neq 0$. Если $H = 0$, то в силу (1.3) касательная компонента вектора скорости равна нулю и система (1.5) превращается в известную систему уравнений сферически-симметричных движений газа. Поэтому новые решения существуют, толь-

ко если переопределенная система (2.3) из двух уравнений для одной «лишней» функции ω имеет решения.

Для доказательства существования решений у системы (2.3) удобно перейти к отысканию их в неявной форме

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi, \omega) = 0 \quad (\Phi_\omega \neq 0). \quad (2.5)$$

Тогда функция Φ должна быть инвариантом двух линейных дифференциальных операторов, получаемых из уравнений (2.3):

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= k \sin \theta D_0 + \sin \theta \cos \omega \partial_\theta + \sin \omega \partial_\varphi - \cos \theta \sin \omega \partial_\omega, \\ \Omega_2 &= \sin \theta \sin \omega \partial_\theta - \cos \omega \partial_\varphi + (\cos \theta \cos \omega + h \sin \theta) \partial_\omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подсчет коммутатора этих операторов приводит к тождеству

$$[\Omega_1, \Omega_2] + \cos \theta \sin \omega \Omega_1 - (\cos \theta \cos \omega + h \sin \theta) \Omega_2 = \sin^2 \theta (k D_0 h - h^2 - 1) \partial_\omega.$$

Отсюда следует, что операторы (2.6) находятся в инволюции тогда и только тогда, когда функции k, h удовлетворяют уравнению

$$k D_0 h = h^2 + 1. \quad (2.7)$$

Это уравнение вместе с (2.4) пополняет инвариантную подсистему (2.2) до замкнутой относительно искомым U, H, ρ, S, h . В силу (2.7) система (2.3) является пассивной, и ее общее решение зависит от произвольной функции двух переменных.

Для построения общего решения системы (2.3) вместо t, r вводятся новые независимые переменные: лагранжева координата $\xi = \xi(t, r)$ и модифицированное время $\tau = \tau(t, r)$ согласно уравнениям

$$D_0 \xi = 0, \quad \xi(0, r) = r, \quad k D_0 \tau = 1, \quad \tau(0, r) = 0. \quad (2.8)$$

Тогда $k D_0 = \partial_\tau$. При этом уравнение (2.7) интегрируется и с условием $h(0, r) = 0$ дает $h = \operatorname{tg} \tau$. После перехода от операторов (2.6) к операторам Ω_3, Ω_4 по формулам $\sin \theta \Omega_3 = \cos \omega \Omega_1 + \sin \omega \Omega_2, \hat{\Omega}_4 = \sin \omega \Omega_1 - \cos \omega \Omega_2$ и введения вместо ω величины

$$\eta = \cos \tau \sin \theta \cos \omega - \sin \tau \cos \theta \quad (2.9)$$

новые операторы примут вид

$$\Omega_3 = \cos \omega \partial_\tau + \partial_\theta, \quad \hat{\Omega}_4 = \sin \theta \sin \omega \partial_\tau + \partial_\varphi. \quad (2.10)$$

Тем самым два инварианта системы операторов (2.6) уже найдены: это величины ξ, η . Интегрированием системы (2.10) находится третий независимый инвариант ζ , неявно определяемый соотношением

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin(\zeta + \varphi) = \cos \tau \cos \theta \cos \omega + \sin \tau \sin \theta. \quad (2.11)$$

Следовательно, общее решение системы (2.3), где $k D_0 = \partial_\tau$ и $h = \operatorname{tg} \tau$, выраженное в неявной форме (2.5), есть

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (2.12)$$

с произвольной функцией F .

3. Анализ решения. Задачу построения решения системы (2.3) можно рассмотреть с другой точки зрения. Первое из этих уравнений является эволюционным относительно модифицированного времени τ :

$$\omega_\tau = -\cos \omega \omega_\theta - (\sin \omega / \sin \theta) \omega_\varphi - \operatorname{ctg} \theta \sin \omega. \quad (3.1)$$

Его решение $\omega(\tau, \theta, \varphi)$ определяется заданием начального условия

$$\omega(0, \theta, \varphi) = \omega_0(\theta, \varphi). \quad (3.2)$$

Если с этим решением положить

$$N(\tau, \theta, \varphi) = \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi - \cos \theta \cos \omega - \operatorname{tg} \tau \sin \theta,$$

то второе уравнение (2.3) будет $N = 0$. Оно не содержит производной по τ и потому накладывает *необходимое* условие на функцию (3.2), а именно:

$$N(0, \theta, \varphi) = 0. \quad (3.3)$$

Предложение 1. Для решений уравнения (3.1) справедливо тождество

$$\sin \theta N_\tau + \cos \theta \cos \omega N_\theta + \sin \omega N_\varphi = N^2 + \operatorname{ctg} \theta \cos \omega N.$$

В силу этого тождества из (3.3) следует $N(\tau, \theta, \varphi) = 0$ при всех τ , т. е. условие (3.3) является и *достаточным*.

Решение уравнения (3.1) методом характеристик сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\theta'}{d\tau} = \cos \omega', \quad \frac{d\varphi'}{d\tau} = \frac{\sin \omega'}{\sin \theta'}, \quad \frac{d\omega'}{d\tau} = -\operatorname{ctg} \theta' \sin \omega' \quad (3.4)$$

с начальными данными при $\tau = 0$

$$\theta'(0) = \theta, \quad \varphi'(0) = \varphi, \quad \omega'(0) = \omega_0(\theta, \varphi), \quad (3.5)$$

где функция ω_0 та же, что и в (3.2). В силу предложения 1 это решение будет порождать решение всей системы (2.3), если и только если функция ω_0 удовлетворяет уравнению (3.3).

С другой стороны, уравнения траекторий частиц $dx/dt = u$, записанные в сферических переменных (1.1)–(1.3) с модифицированным временем τ , имеют вид

$$\frac{dr}{d\tau} = kU, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \cos \omega, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\sin \omega}{\sin \theta}. \quad (3.6)$$

Здесь $\omega = \omega(\tau, \theta, \varphi)$; последние два уравнения совпадают с первыми двумя из системы (3.4). Следовательно, характеристики уравнения (3.1) являются радиальными проекциями траекторий частиц газа на единичную сферу S_1 ($r = 1$). Поэтому решение системы (3.4) описывает *сферические траектории* частиц и эволюцию угла ω вдоль этих траекторий.

Непосредственно проверяется, что вдоль характеристик инварианты η и ζ из (2.9), (2.11), а также величина $\sigma = \sin \theta' \sin \omega'$ сохраняют постоянные значения. Поэтому уравнения характеристик (3.4), определяющие сферические траектории частиц, оказываются автоматически проинтегрированными в виде

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \tau \cos \theta - \sin \tau \sin \theta \cos \omega, \\ \sin \theta' \sin(\varphi' - \varphi) &= \sin \tau \sin \omega, \quad \sin \theta' \sin \omega' = \sin \theta \sin \omega, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\omega = \omega_0(\theta, \varphi)$.

Наглядное геометрическое представление поведения сферических траекторий частиц получается, если вернуться к декартовым координатам на сфере S_1 , положив $r = 1$ в формулах (1.1). Тогда точка (θ, φ) определяется вектором $\mathbf{x} = (x, y, z)$, а точка (θ', φ') — вектором $\mathbf{x}' = (x', y', z')$.

В этих обозначениях формулы (3.7) приводят к следующему описанию движения по сфере S_1 :

$$R\mathbf{x}'(\tau) = l(\tau)\mathbf{x} + \mathbf{m} \sin \tau \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (3.8)$$

Здесь

$$l = \cos \tau \sin \theta + \sin \tau \cos \theta \cos \omega, \quad \mathbf{m} = (-y \sin \omega, x \sin \omega, -\cos \omega). \quad (3.9)$$

Предложение 2. При движении (3.8) сферическая траектория любой точки \mathbf{x} есть большая окружность (геодезическая) на S_1 , а скорость ее перемещения (относительно времени τ) равна единице.

Для доказательства достаточно заметить, что существует единственный (с точностью до знака), не зависящий от времени τ вектор \mathbf{x}_0 , удовлетворяющий уравнению (символ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ обозначает скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b})

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}_0 = 0 \quad (|\mathbf{x}_0| = 1). \quad (3.10)$$

Действительно, в силу (3.8) при произвольном τ уравнение (3.10) сводится к системе

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0 = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}_0 = 0 \quad (|\mathbf{x}_0| = 1),$$

единственное решение которой дается формулой

$$R\mathbf{x}_0 = (-y, x, 0) \cos \omega + (-xz, -yz, R^2) \sin \omega. \quad (3.11)$$

Вектор \mathbf{x}_0 указывает точку на S_1 , называемую *полюсом* той сферической траектории (большой окружности), плоскость которой перпендикулярна \mathbf{x}_0 .

4. Начальное распределение. В силу предыдущего окончательное решение системы (2.3) сводится к отысканию функции $\omega_0(\theta, \varphi)$, которая должна быть решением уравнения (3.3). Прямой подстановкой проверяется, что это уравнение имеет два независимых интеграла, получаемых из (2.9) и (2.11) при $\tau = 0$:

$$\eta_0 = \sin \theta \cos \omega_0, \quad \sqrt{1 - \eta_0^2} \sin(\zeta_0 + \varphi) = \cos \theta \cos \omega_0. \quad (4.1)$$

Поэтому искомое решение ω_0 можно найти в неявной форме из дополнительного соотношения вида $\eta_0 = \chi(\zeta_0)$ с произвольно заданной функцией χ . Следовательно, ω_0 определена с точностью до произвольной функции одного аргумента.

Функция $\omega_0(\theta, \varphi)$ должна быть однозначной всюду, где она определена (кроме полюсов $\theta = 0$ и $\theta = \pi$). Для выделения конкретных решений можно потребовать еще определенности этой функции на всей сфере S_1 (свойство *полноты*).

Предложение 3. Свойство полноты для ω_0 может быть выполнено, если и только если $\omega_0 = \pi/2$ на всей сфере S_1 , кроме полюсов.

Действительно, первое уравнение (4.1) показывает, что необходимо должно быть $\eta_0 = 0$. Тогда $\cos \omega_0 = 0$ и $\omega_0 = \pi/2$. При этом второе уравнение (4.1) будет удовлетворено при $\zeta_0 = -\varphi$. Это означает, что в дополнительном соотношении $\eta_0 = \chi(\zeta_0)$ будет $\chi = 0$ тождественно.

5. Особый вихрь. Начальное значение $\omega_0 = \pi/2$ определяет конкретное движение, которое будет называться *особым вихрем*. Подстановка $\omega = \pi/2$ в уравнение сферических траекторий (3.8) приводит к выражению

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cos \tau + R^{-1}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{x}) \sin \tau \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (5.1)$$

где единичный вектор \mathbf{i}_z указывает северный полюс ($z = 1$), а \times есть символ векторного произведения. Полюс траектории (5.1) находится из (3.11) при $\omega = \pi/2$:

$$\mathbf{x}_0 = R^{-1}(-xz, -yz, R^2). \quad (5.2)$$

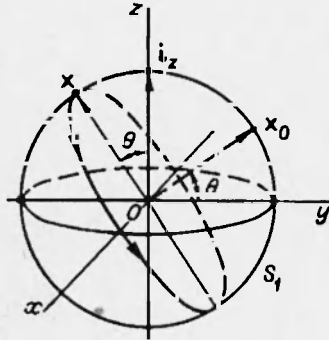


Рис. 1

Полученное решение инвариантно относительно поворотов вокруг оси z . Векторы \mathbf{x} , \mathbf{x}_0 и \mathbf{i}_z лежат в одной диаметральной плоскости, причем $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0 = 0$. Взаимное расположение сферической траектории, проходящей через типичную точку \mathbf{x} , и ее полюса \mathbf{x}_0 показано на рис. 1.

Найденное представление сферических траекторий частиц обнаруживает некоторые особенности движения газа в особом вихре. Например, согласно (5.1), $z' = z \cos \tau$. Поэтому при $\tau > 0$ точки \mathbf{x}' заполняют не всю сферу S_1 , а только сферический пояс $\tau < \theta' < \pi - \tau$. Кроме того, вычисление нормальной к S_1 компоненты

вихря $\Omega(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ показывает, что для начального распределения поля скоростей в любой точке \mathbf{x}_0 , отличной от полюсов, $\Omega(\mathbf{x}_0) = 0$, т. е. это распределение поверхностно-безвихревое. Однако для полюсов $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \pm 1)$ $\Omega(\mathbf{x}_0) = \infty$.

6. Радиальное движение. В проведенном выше анализе значение лагранжевой координаты ξ (инварианта системы (2.3)) оставалось произвольно фиксированным. Представление полной картины движения, в частности, физических траекторий частиц газа возможно лишь с учетом радиального движения, описываемого решением инвариантной подсистемы (2.2), (2.4), (2.8). Здесь второе и третье уравнения (2.2) интегрируются в виде $rH = H_0(\xi)$, $S = S_0(\xi)$ с произвольными функциями H_0 , S_0 лагранжевой координаты ξ . Поэтому остается следующая подсистема уравнений радиального движения для искомых функций U , ρ , ξ , τ переменных t , r :

$$\begin{aligned} U_t + UU_r + \rho^{-1}p_r &= r^{-3}H_0^2(\xi), \\ \rho^{-1}(\rho_t + U\rho_r) + r^{-2}(r^2U)_r &= r^{-2}H_0(\xi)\text{tg } \tau, \\ \xi_t + U\xi_r &= 0, \quad \tau_t + U\tau_r = r^{-2}H_0(\xi). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $p = f(\rho, S_0(\xi))$ с заданной функцией f . Начальные данные для системы (6.1) имеют вид

$$U(0, r) = U_0(r), \quad \rho(0, r) = \rho_0(r), \quad \xi(0, r) = r, \quad \tau(0, r) = 0. \quad (6.2)$$

В системе (6.1) функции $H_0(\xi) \neq 0$ и $S_0(\xi)$ рассматриваются как произвольно заданные априори. Их задание выделяет конкретный класс движений газа.

Например, при выборе $H_0 = L\xi^n$, где $L, n = \text{const}$ и $S_0 = \text{const}$, система (6.1) имеет автомодельные решения, в которых искомые U , ρ , p , τ зависят только от $\lambda = r/t$, а $\xi = t^{1/n}\sigma(\lambda)$. В этих переменных (6.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (U - \lambda)U' + \rho^{-1}p' &= L^2\lambda^{-3}\sigma^{2n}, \\ \lambda^2\rho^{-1}(U - \lambda)\rho' + (\lambda^2U)' &= L\sigma^n\text{tg } \tau, \\ n(U - \lambda)\sigma' + \sigma &= 0, \quad \lambda^2(U - \lambda)\tau' = L\sigma^n, \end{aligned}$$

где $p = f(\rho, S_0)$; штрих — символ производной по λ .

Для специального уравнения состояния вида $p = A\rho + B$ с постоянными A, B существует решение системы (6.1), описывающее изэнтропическое движение ($S_0 = \text{const}$), в котором $U = 0$, т. е. отсутствует радиальное движение частиц газа. Это решение дается формулами

$$\xi = r, \quad H_0 = \mu r^2, \quad \tau = \mu t, \quad \rho = \rho_0(r) / \cos \mu t. \quad (6.3)$$

Здесь

$$\rho_0(r) = \rho_{00} \exp((\mu^2/2A)(r^2 - r_0^2))$$

с постоянными $\mu > 0, \rho_{00}, r_0$. Если в качестве начальной конфигурации взять сферический слой $0 < r_1 < r < r_2$ и задать распределение типа особого вихря, т. е. $\omega = \pi/2$ при любом r из интервала (r_1, r_2) , то с течением времени этот сферический слой будет сжиматься в виде тороподобного тела и коллапсировать к кольцу с данными радиусами $r_1 < r_2$ на плоскости $z = 0$ в момент времени $t = \pi/2\mu$.

Полезно заметить, что в случае $H_0 = \text{const} \neq 0$ растяжением переменных делается $H_0 = \pm 1$.

Перечень других случаев упрощения системы (6.1), дающих новые формы особого вихря, может быть составлен на основе полного группового анализа этой системы.

7. Установившееся течение несжимаемой жидкости. В этом случае все выводы, изложенные в пп. 1–5, справедливы со следующими дополнениями. Ввиду независимости решения от времени t лагранжева координата ξ отсутствует. Поэтому $H_0 = \text{const}$ и можно выбрать $H_0 = 1$. Не нарушая общности, принимаем $\rho = 1$. Траектории частиц совпадают с линиями тока, вдоль которых в качестве параметра можно взять r . Представление (5.1) сферических траекторий (линий тока) на сфере S_1 в особом вихре остается в силе. Дифференциальные уравнения радиального движения (6.1) сводятся к следующим:

$$UU_r + p_r = \frac{1}{r^3}, \quad (r^2U)_r = \text{tg } \tau, \quad r^2U\tau_r = 1. \quad (7.1)$$

Первое из них дает интеграл Бернулли

$$\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2r^2} + p = b \quad (b = \text{const}), \quad (7.2)$$

определяющий давление p . Для оставшейся системы из двух последних уравнений (7.1) вводятся начальные данные r_0, U_0 , с которыми $\tau(r_0) = 0, U(r_0) = U_0 > 0$.

Легко проверить, что система (7.1) допускает оператор растяжения $r\partial_r - U\partial_U - 2p\partial_p$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $r_0^2U_0 = 1$. С этим соглашением решение системы (7.1) таково:

$$\sin \tau = \text{th}(r - r_0), \quad r^2U = \text{ch}(r - r_0). \quad (7.3)$$

Особый вихрь в этом решении выделяется тем, что значение $\omega_0 = \pi/2$ задается на сфере S_0 ($r = r_0$), соответствующей $\tau = 0$.

Параметрическое представление линий тока получается из (5.1) с учетом (7.3). Линия тока, проходящая через точку $(x_0, y_0, z_0) \in S_0$, описывается формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{r_0} \frac{r}{\text{ch}(r - r_0)} - \frac{y_0}{R_0} r \text{th}(r - r_0), \\ y &= \frac{y_0}{r_0} \frac{r}{\text{ch}(r - r_0)} + \frac{x_0}{R_0} r \text{th}(r - r_0), \quad z = \frac{z_0}{r_0} \frac{r}{\text{ch}(r - r_0)}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$; $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

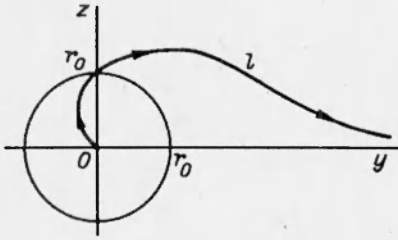


Рис. 2

Каждая линия тока (7.4) лежит в плоскости $x_0x + y_0y = (R_0^2/z_0)z$. Типичная линия тока l , лежащая в плоскости $x = 0$, показана на рис. 2. Все остальные линии тока получают поворотами l вначале вокруг оси y , а затем вокруг оси z . Это дает общее представление об области, занятой жидкостью в течении типа особого вихря. В центре ($r = 0$) находится конусообразный вихресточник с объемным расходом 2π . Через сферу S_0 жидкость вытекает наружу и растекается в виде слоя, сжимающегося к плоскости $z = 0$. Вблизи отрезка $|z_0| < r_0$ находится торовидная плоскость, в которой жидкости нет.

Таким образом, проведенный предварительный анализ показывает, что движение в особом вихре носит весьма сложный характер. В случае движения газа должны появиться новые особенности, связанные с непродолжимостью получаемых в найденном классе решений физических полей скорости, давления, плотности за возможные барьеры (например, в область отрицательных давлений). Поэтому многие вопросы о деталях движения газа в особом вихре пока остаются открытыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30-55.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 31/X 1994 г.