

УДК 539.37

АНАЛИЗ ИЗГИБА КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЯ СОПРОТИВЛЕНИЙ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

И. Е. Петраков, В. М. Садовский, О. В. Садовская

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия

E-mails: petrigr@gmail.com, sadov@icm.krasn.ru, o_sadov@icm.krasn.ru

На основе метода конечных элементов разработан вычислительный алгоритм для решения ограниченного класса задач об изгибе композитных пластин, армированных системами однонаправленных высокопрочных волокон. Предполагается, что в области пластины существует нейтральная плоскость, поведение которой подобно поведению гибкой недеформируемой мембраны, и перемещения пластины в продольном направлении линейны по толщине. В случае разномодульных волокнистых композитов с разными упругими свойствами при растяжении и сжатии нейтральная плоскость, вообще говоря, не совпадает со срединной. Задача минимизации функционала упругой энергии в соответствии с вариационным принципом Лагранжа приводит к эллиптическому дифференциальному уравнению четвертого порядка для прогиба. Изгибные жесткости пластины, входящие в коэффициенты уравнения, вычисляются с учетом того, что упругие характеристики армирующих волокон при растяжении и сжатии существенно различаются. Численное решение уравнения получено конечно-элементным методом с использованием треугольного элемента Белла. Приводятся результаты расчетов изгиба слоистых пластин прямоугольной формы, в которых волокна уложены в различных направлениях.

Ключевые слова: волокнистый композит, техническая теория пластин, разномодульная упругость.

DOI: 10.15372/PMTF20210517

Введение. Теория тонких пластин разработана достаточно полно. Ее простейшим вариантом является основанная на гипотезах Кирхгофа — Лява техническая теория [1, 2], в которой деформация обжатия по толщине пластины и поперечные сдвиги считаются пренебрежимо малыми, а продольные перемещения — линейными по толщине и равными нулю в срединной плоскости. Уточненные уравнения Тимошенко учитывают влияние поперечных сдвигов [3]. Для описания изгиба многослойных пластин предложены модели различного уровня сложности [4–7].

При построении уравнений изгиба пластин из волокнистых композитов необходимо учитывать, что армирующие волокна, как правило, являются существенно разномодульными. При деформировании совместно с матрицей композита их поведение в условиях

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2021-1384), а также Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-31-90032).

© Петраков И. Е., Садовский В. М., Садовская О. В., 2021

растяжения и сжатия различается. Например, сопротивление растяжению льда, армированного геосинтетическими сетками, за счет жесткости и в то же время гибкости нитей значительно больше сопротивления сжатию. Основной вклад в сопротивление растяжению льда вносит арматура, в то время как при сжатии ее вклад практически отсутствует.

Особенность слоистых пластин из материалов такого типа состоит в том, что состояние изгиба характеризуется не одной, а двумя изгибными жесткостями (в зависимости от направления стрелы прогиба), которые могут существенно различаться. В частности, изгиб двухслойной ледяной пластины с армированным нижним слоем при одних и тех же по абсолютной величине поперечных нагрузках меньше, если стрела прогиба направлена вниз (волокна растягиваются), а не вверх (волокна сжимаются). Таким образом, жесткость двухслойной пластины на изгиб со стрелой прогиба в направлении армированного слоя всегда больше жесткости на изгиб в противоположном направлении.

В данной работе рассматривается класс задач об изгибе слоистых пластин из композитных материалов с различным сопротивлением при растяжении и сжатии под действием внешних напряжений, при котором в области пластины существует нейтральная плоскость. Линейные элементы, расположенные в нейтральной плоскости, не деформируются, а в остальной части пластины деформации в продольном направлении линейны по толщине.

1. Нейтральная плоскость при изгибе. Рассмотрим однослойную пластину постоянной толщины h в декартовой системе координат, координатная плоскость (x_1, x_2) которой связана с нижней стороной пластины в естественном недеформированном состоянии, ось x_3 направлена по толщине, а ось x_1 — в направлении армирования. В рамках технической теории пластин с учетом малости толщины пластины по сравнению с остальными размерами используется следующее представление для компонент вектора перемещений:

$$u_1 = -(x_3 - \eta) \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -(x_3 - \eta) \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2). \quad (1)$$

В классической теории пластин Кирхгофа — Лява нейтральная плоскость $x_3 = \eta$, в точках которой отсутствуют продольные перемещения, совпадает со срединной плоскостью $\eta = h/2$. При учете различия сопротивлений материала растяжению и сжатию положение нейтральной плоскости при чистом изгибе смещается от срединной плоскости в направлении увеличения жесткости, т. е. в направлении растягиваемых волокон.

Выражения для отличных от нуля компонент тензора малых деформаций пластины принимают вид

$$\varepsilon_{11} = -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{12} = -(x_3 - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений в зоне сжатия армирующих волокон определяются на основе уравнений закона Гука ортотропной теории упругости:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}}{E_2}, \quad \varepsilon_{22} = -\nu_1 \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}.$$

Входящие в эти уравнения модуль Юнга E_1 в направлении вдоль волокон и модуль Юнга E_2 в поперечном направлении с соответствующими коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 удовлетворяют условию симметрии $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$, которое гарантирует существование упругого потенциала. Модуль сдвига G определяется независимо от модулей Юнга и коэффициентов Пуассона.

Обращая закон Гука, можно выразить напряжения:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\nu_1 \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12}. \quad (3)$$

В области сжатия упругий потенциал напряжений Φ^- , для которого

$$\frac{\partial \Phi^-}{\partial \varepsilon_{11}} = \sigma_{11}, \quad \frac{\partial \Phi^-}{\partial \varepsilon_{22}} = \sigma_{22}, \quad \frac{\partial \Phi^-}{\partial \varepsilon_{12}} = 2\sigma_{12},$$

равен

$$\Phi^- = \frac{1}{2(1 - \nu_1\nu_2)} (E_1\varepsilon_{11}^2 + (\nu_1E_2 + \nu_2E_1)\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + E_2\varepsilon_{22}^2) + 2G\varepsilon_{12}^2.$$

Условие положительной определенности потенциала, обеспечивающее термодинамическую корректность модели, выполняется, если

$$E_1 > \nu_1^2 E_2 > 0, \quad E_2 > \nu_2^2 E_1 > 0, \quad G > 0.$$

В области растяжения волокон выражение для потенциала деформаций $\Phi^+ = \Phi^- + b\varepsilon_{11}^2/2$ содержит дополнительное квадратичное слагаемое с модулем упругости b , характеризующим увеличение жесткости композита при деформациях растяжения. В этой области первое уравнение системы (3) заменяется уравнением

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} (\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}) + b\varepsilon_{11}.$$

Для термодинамической корректности определяющих уравнений необходимо, чтобы потенциал напряжений Φ , равный Φ^+ в области растяжения волокон и Φ^- в области сжатия, при переходе через нейтральную плоскость $x_3 = \eta$ являлся непрерывно дифференцируемой функцией, так как в этой плоскости $\varepsilon_{11} = 0$.

Параметры упругости разномодульной композитной пластины меняются по толщине, принимая постоянные значения в областях растяжения и сжатия, каждой из которых соответствует одно из условий: $0 < x_3 < \eta$ или $\eta < x_3 < h$, в зависимости от направления стрелы прогиба. Простой способ задания положения нейтральной плоскости, применимый при анализе изгиба пластин со свободным краем, следует из условия равенства нулю мембранного усилия в направлении укладки волокон:

$$\int_0^h \sigma_{11} dx_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \int_0^\eta (\eta - x_3) dx_3 = \left(\frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} + b \right) \int_\eta^h (x_3 - \eta) dx_3.$$

При записи этих формул предполагается, что область растяжения расположена над областью сжатия, т. е. стрела прогиба направлена вверх. Отсюда получаем

$$\eta = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} h, \quad \varkappa = \sqrt{1 + (1 - \nu_1\nu_2) \frac{b}{E_1}}. \quad (4)$$

Заметим, что формула (4) не гарантирует, вообще говоря, отсутствие мембранных усилий в направлении, перпендикулярном направлению армирования. Для того чтобы напряженное состояние, определяемое вектором перемещений (1) и тензором деформаций (2), удовлетворяло условиям равновесия, необходимо, чтобы на краях пластины действовала система сил, определяемая с помощью уравнений (3) по найденному прогибу. Вместе с тем существуют частные случаи изгиба пластин со свободными краями или с заданными изгибающими моментами и перерезывающими силами, но без мембранных усилий на краях, когда формула (4) применима, например случай цилиндрического изгиба, при котором прогиб w не зависит от координаты x_2 .

Заметим также, что изменение направления стрелы прогиба приводит к симметричному по толщине пластины смещению нейтральной плоскости. Поэтому в задачах с переменным направлением изгиба, когда различные части пластины прогибаются в противоположных направлениях, параметр η в формулах (1) должен меняться скачкообразно в зависимости от расположения областей растяжения и сжатия.

Если параметр η задан произвольно, то возникает обратная задача — выбрать значение параметра η таким образом, чтобы с минимальной погрешностью выполнялись граничные условия для напряжений на краях пластины. Эта задача может быть решена, например, с помощью метода наименьших квадратов, но она не рассматривается в данной работе.

Для обоснования гипотезы о существовании нейтральной плоскости проведена серия расчетов для случая цилиндрического изгиба на основе нелинейных уравнений разномодульной теории упругости без использования упрощающих гипотез теории пластин. Задача решалась численно в плоской постановке на основе метода конечных элементов. Математическая модель и реализующий ее вычислительный алгоритм описаны в работе [8].

Расчеты проводились для удлиненной прямоугольной области длиной $l = 100$ мм и шириной $h = 5$ мм. Были выбраны параметры упругости углепластика с объемной долей армирующего углеграфитового волокна 50 % [9]: $E_1 = 57$, $E_2 = 6$, $G = 3,5$, $b = 57,2$ ГПа, $\nu_1 = 0,19$, $\nu_2 = 0,02$. Верхняя и нижняя стороны прямоугольной области считались свободными от напряжений.

1.1. *Консольный изгиб.* На боковых сторонах прямоугольной области ставились граничные условия, соответствующие консольному изгибу: $u_1 = u_3 = 0$ при $x_1 = 0$ и $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{13} = -\tau^*$ при $x_1 = l$. В расчетах величина касательного напряжения τ^* на правой стороне полагалась равной 10 МПа. На рис. 1 представлены поля напряжения σ_{11} , полученные с учетом различия сопротивлений композита растяжению и сжатию (см. рис. 1,а) и без учета этого эффекта в предположении, что модули упругости при растяжении и сжатии одинаковы и равны модулю упругости в случае растяжения (см. рис. 1,б). Штриховыми линиями показаны расчетные линии уровня, соответствующие нулевому напряжению (нейтральные линии). В отсутствие разномодульности нейтральная линия совпадает со срединной линией. В случае разномодульного материала наблюдается смещение этой линии относительно средней линии прямоугольной области в направлении области растяжения. Из результатов расчетов следует, что максимальные вертикальные перемещения для разномодульного материала (21 мм) и материала с одинаковыми модулями упругости при растяжении и сжатии (14 мм) различаются в 1,5 раза.

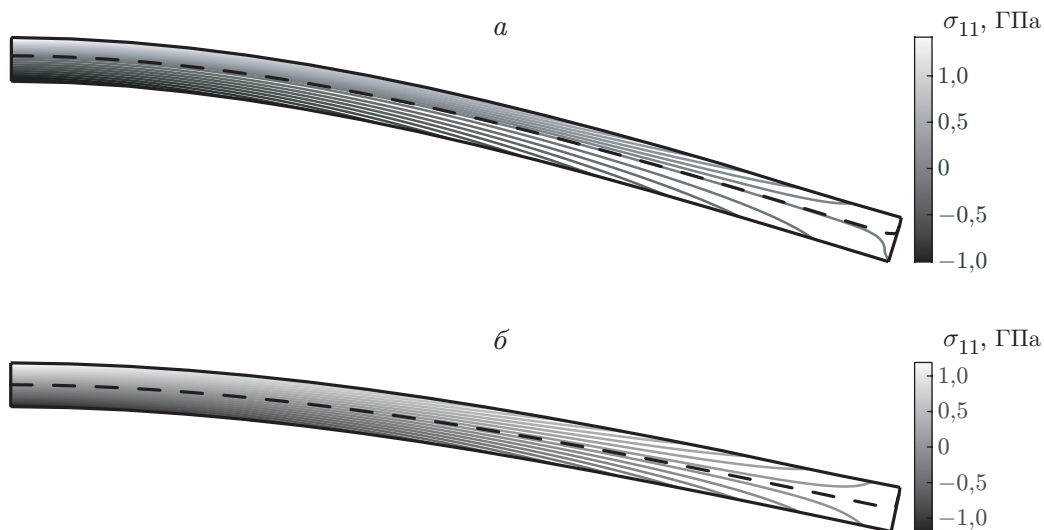


Рис. 1. Линии уровня напряжения σ_{11} при консольном изгибе с учетом (а) и без учета (б) различия сопротивлений материала растяжению и сжатию (штриховые кривые — нейтральные линии, соответствующие нулевому напряжению)

Проведено сравнение расчетного поля перемещений с распределением прогиба, полученным в результате решения краевой задачи для однородного уравнения Софи Жермен

$$\frac{d^4 w}{dx_1^4} = 0, \quad w(0) = \frac{dw(0)}{dx_1} = 0, \quad \frac{d^2 w(l)}{dx_1^2} = 0, \quad D \frac{d^3 w(l)}{dx_1^3} = \tau^* h.$$

Изгибные жесткости пластины из разномодульного материала и пластины из материала с одинаковыми модулями упругости при растяжении и сжатии вычислялись соответственно по формулам

$$D = \frac{E_1}{3(1 - \nu_1 \nu_2)} (\eta^3 + \chi^2 (1 - \eta)^3), \quad D = \left(\frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} + b \right) \frac{h^3}{12}.$$

Параметр η определен в уравнении (4). Следует отметить, что в отличие от многослойных пластин изгибная жесткость однослойной разномодульной пластины не меняется при изменении положения областей растяжения и сжатия, так как параметры η и $1 - \eta$ входят в выражение для изгибной жесткости симметрично.

С использованием решения плоской задачи и выражения для прогиба, полученного с помощью теории пластин:

$$w(x_1) = \frac{\tau^* h x_1^2}{2D} \left(\frac{x_1}{3} - l \right),$$

вычислялась относительная погрешность

$$\delta = \max_{x_1, x_3} |u_3(x_1, x_3) - w(x_1)| / \max_{x_1, x_3} |u_3(x_1, x_3)|, \quad (5)$$

которая оказалась равной 1,4 % без учета различия сопротивлений композита растяжению и сжатию и 0,6 % при учете различия сопротивлений.

1.2. *Изгиб вследствие сдвига.* Аналогичные расчеты проводились при кинематических граничных условиях: $u_1 = u_3 = 0$ при $x_1 = 0$ и $u_1 = 0$, $u_3 = w^*$ при $x_1 = l$ ($w^* = 10$ мм). Такие условия соответствуют изгибу вследствие относительного сдвига боковых сторон прямоугольной области. На рис. 2,а приведены поля напряжения σ_{11} для разномодульного материала, на рис. 2,б — для материала с одинаковыми модулями упругости при растяжении и сжатии. Также на рис. 2 показаны нейтральные линии, соответствующие нулевому напряжению (штриховые кривые).

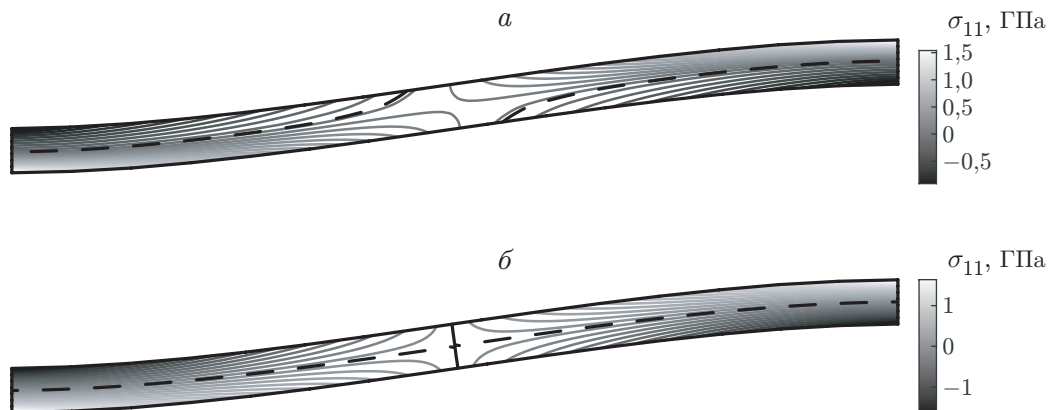


Рис. 2. Линии уровня напряжения σ_{11} при изгибе вследствие сдвига с учетом (а) и без учета (б) различия сопротивлений материала растяжению и сжатию (штриховые кривые — нейтральные линии, соответствующие нулевому напряжению)

Соответствующие граничные условия для уравнения Софи Жермен формулируются в виде

$$w(0) = \frac{dw(0)}{dx_1} = 0, \quad w(l) = w^*, \quad \frac{dw(l)}{dx_1} = 0.$$

Решение уравнения с такими условиями

$$w(x_1) = \frac{w^* x_1^2}{l^2} \left(3 - \frac{2x_1}{l} \right)$$

не зависит от изгибной жесткости, поэтому должно приближенно описывать оба случая. Из результатов расчетов следует, что для разномодульного материала относительная погрешность теории пластин δ , определенная по формуле (5), равна 0,8 %, для материала с одинаковыми модулями упругости при растяжении и сжатии — 0,9 %.

1.3. *Изгиб при кручении.* Решалась также задача с граничными условиями $u_1 = \gamma^*(x_3 - h/2)$, $u_3 = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_1 = l$, описывающими поворот боковых сторон прямоугольной области на один и тот же угол $\gamma^* = 0,2$ рад. Такой поворот приводит к изгибу вследствие кручения. Линии уровня напряжения σ_{11} с учетом и без учета различия сопротивлений материала приведены на рис. 3, а, б соответственно. На рис. 3, а виден характерный скачок нейтральной поверхности (штриховая линия) относительно срединной линии прямоугольной области, который обусловлен изменением направления стрелы прогиба.

Для уравнения Софи Жермен граничные условия записываются в виде

$$w(0) = w(l) = 0, \quad \frac{dw(0)}{dx_1} = \frac{dw(l)}{dx_1} = \gamma^*.$$

Прогиб пластины определяется по формуле

$$w(x_1) = \gamma^* x_1 \left(1 - \frac{3x_1}{l} + \frac{2x_1^2}{l^2} \right).$$

Согласно результатам расчетов в случае разномодульного материала относительная погрешность равна $\delta = 9,2$ %, в случае материала с одинаковыми модулями упругости при растяжении и сжатии $\delta = 9,6$ %.

Достаточно большие погрешности в данной задаче обусловлены сдвиговой деформацией ε_{12} , которой нельзя пренебрегать вблизи боковых поверхностей пластины. В этом

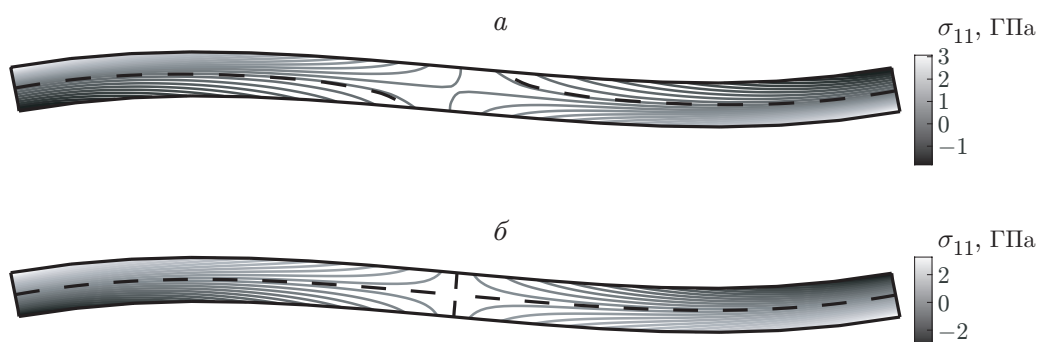


Рис. 3. Линии уровня напряжения σ_{11} при изгибе вследствие кручения с учетом (а) и без учета (б) различия сопротивлений материала растяжению и сжатию (штриховые кривые — нейтральные линии, соответствующие нулевому напряжению)

случае более точно описывает изгиб система уравнений Тимошенко с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{d^3\varphi}{dx_1^3} = 0, \quad \frac{dw}{dx_1} = \varphi - f \frac{d^2\varphi}{dx_1^2}, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = \gamma^*, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Здесь $f = D/(kGh)$; $k = 5/6$ — корректирующий множитель. Точное решение для прогиба принимает вид

$$w(x_1) = \frac{\gamma^* x_1}{1 + \beta} \left(1 - \frac{3x_1}{l} + \frac{2x_1^2}{l^2} \right), \quad \beta = \frac{12f}{l^2}.$$

Относительная погрешность расчетов с использованием теории пластин Тимошенко в случае материала с одинаковыми модулями упругости при растяжении и сжатии равна 0,46 %, в случае разномодульного материала — 2,9 %.

В целом результаты решения задач с удовлетворительной точностью описывают цилиндрический изгиб на основе уравнений технической теории пластин как при учете, так и без учета различия сопротивлений композита растяжению и сжатию. При этом в задачах типа задач о консольном изгибе, в которых параметры изгибной жесткости пластины входят явным образом в граничные условия или в коэффициенты уравнения, необходимо учитывать этот эффект.

2. Уравнение изгиба слоистой пластины. В случае слоистых пластин также будем предполагать, что существует нейтральная плоскость и распределение перемещений по толщине определяется уравнениями (1), ограничивая тем самым класс решаемых задач. В этом случае параметр η не может быть найден по формуле (4), поэтому далее в расчетах задается его значение в интервале $(0, h)$ и проводится анализ соответствующих граничных условий для мембранных усилий на краях пластины.

При описании изгиба закон Гука для отдельных слоев, армированных в различных направлениях, записывается в ортогональной системе координат $Ox_1x_2x_3$, не связанной с направлениями армирования. Для этого сначала оси x_1 и x_2 в каждом слое поворачиваются таким образом, чтобы ось x_1 была направлена вдоль волокон. Уравнения (3) ортотропной теории упругости для слоя записываются в полученной таким образом системе координат, а затем преобразуются с помощью поворота к исходной системе.

Пусть h_k ($k = 1, 2, \dots$) — толщины слоев, α_k — углы армирования, отсчитываемые от оси x_1 против часовой стрелки. В результате описанных выше преобразований уравнения закона Гука для k -го слоя в области сжатия приводятся к матричной форме

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} R(-\alpha_k) \begin{bmatrix} E_1^k & \nu_1^k E_2^k & 0 \\ \nu_1^k E_2^k & E_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1^k \nu_2^k)G^k \end{bmatrix} R(\alpha_k) \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix},$$

где $R(\alpha)$ — матрица преобразования поворота на угол α :

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -(1/2) \sin 2\alpha & (1/2) \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

В области растяжения уравнения записываются в такой же форме с точностью до замены модуля Юнга E_1^k модулем $E_1^k + (1 - \nu_1^k \nu_2^k)b^k$, в который входит параметр повышения

жесткости материала b^k при растяжении. Таким образом, определяющие уравнения упругой слоистой пластины, связывающие напряжения и деформации, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + G_{11}\varepsilon_{12}, & \sigma_{22} &= E_{12}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + G_{22}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{12} &= G_{11}\varepsilon_{11} + G_{22}\varepsilon_{22} + G_{12}\varepsilon_{12}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь коэффициенты E_{ij} , G_{ij} — кусочно-постоянные по толщине пластины функции, принимающие значения модулей упругости E_{ij}^{\pm} и G_{ij}^{\pm} в слоях в соответствии с расположением областей растяжения и сжатия.

Уравнение изгиба получим на основе вариационного принципа Лагранжа, согласно которому действительное распределение прогибов пластины минимизирует на множестве вариаций, согласованных с главными краевыми условиями, интегральный функционал упругой энергии:

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left(\int_0^h \Phi dx_3 - qw \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(Qw + M \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds.$$

Здесь Ω — двумерная область с границей Γ , являющаяся нижней поверхностью пластины; $q(x_1, x_2)$ — распределенная поперечная нагрузка; $Q(x_1, x_2)$, $M(x_1, x_2)$ — поперечное усилие и изгибающий момент на границе Γ ; $\partial/\partial n$ — оператор производной в направлении внешней нормали к границе; ds — элемент дуги.

Главные краевые условия записываются в виде одного из двух или обоих уравнений

$$w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2), \quad (7)$$

с помощью которых задаются прогиб пластины и угол поворота на границе. Функции Q и M используются для задания в общей форме естественных граничных условий. Эти функции должны быть определены в точках границы Γ , где прогиб и (или) угол поворота не заданы главными граничными условиями (7).

Потенциал напряжений Φ определяется по формуле

$$2\Phi = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12}.$$

После исключения напряжений в силу уравнений (6) и подстановки выражений для деформаций (2) функционал преобразуется к виду

$$\begin{aligned}J(w) &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(D_{11} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right|^2 + D_{22} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + F_{12} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2F_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2F_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2qw \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left(Qw + M \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds,\end{aligned}$$

где D_{ij} , F_{ij} — изгибные жесткости пластины:

$$D_{ij} = \int_0^h (x_3 - \eta)^2 E_{ij} dx_3, \quad F_{ij} = \int_0^h (x_3 - \eta)^2 G_{ij} dx_3.$$

В результате варьирования функционала из принципа минимума потенциальной энергии получаем следующее дифференциальное уравнение для прогиба, обобщающее уравнение Софи Жермен в классической теории пластин:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + (2D_{12} + F_{12}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2F_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2F_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} = q. \quad (8)$$

Варьирование позволяет также получить естественные граничные условия в общем виде, записанные через производные от прогиба. Однако в данной работе они не приводятся, поскольку в явном виде эти условия не используются при конечно-элементной аппроксимации задачи.

3. Результаты расчетов. Для численного решения уравнения (8) разработаны вычислительный алгоритм и компьютерная программа на основе конечно-элементного метода. В качестве конечного элемента используется треугольный элемент Белла класса \mathbb{C}^1 с 18 степенями свободы [10].

При численном решении задачи в области Ω строится нерегулярная треугольная сетка и вводится вектор обобщенных координат W размерности $6n$, где n — число узлов сетки. Координатами этого вектора служат узловые значения прогиба и его производных первого и второго порядка. Функционал $J(w)$ представляется в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(W) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} [(W^l)^T D_l^T K D_l W^l - Q^T W] dx_1 dx_2$$

(Ω_l — область, представляющая собой l -й конечный элемент; W^l — локальный вектор обобщенных координат; K — матрица изгибных жесткостей; D_l — матрица дифференцирования; Q — глобальный вектор обобщенных сил).

Глобальная матрица жесткости C составляется путем сложения элементов локальных матриц жесткости $C_l = D_l^T K D_l$ в определенных позициях. В результате получаем функционал

$$J(W) = \frac{1}{2} W^T C W - Q W,$$

минимальное значение которого определяется системой уравнений, служащей для вычисления прогибов:

$$\frac{\partial J}{\partial W} \equiv C W - Q = 0. \quad (9)$$

Компьютерная программа, реализующая метод конечных элементов, составлена на языке программирования Python. Для решения системы уравнений (9) в ней используются встроенные библиотечные процедуры. Глобальная матрица жесткости является сильно-разреженной, содержит приблизительно 95 % нулей, поэтому для ее хранения применяются специальные структуры, предназначенные для работы с разреженными матрицами [11].

На рис. 4 приведены результаты расчетов изгиба двухслойной пластины размером 100×100 мм (толщина слоев 2,5 мм) из углепластика с объемной долей армирующего углеграфитового волокна 50 %. Пластина жестко закреплена по двум боковым краям, параллельным оси x_2 . В центре пластины действует сосредоточенная поперечная нагрузка $q = 10$ кН.

На рис. 4,а,б показаны прогибы пластины с конфигурацией армирования слоев ($0^\circ, 90^\circ$) и линии уровня прогиба с учетом различия сопротивлений материала растяжению и сжатию, на рис. 4,в,г — аналогичные результаты для пластины с конфигурацией армирования ($90^\circ, 0^\circ$). Порядок слоев указан начиная с верхнего.

Заметим, что в случае армирования верхнего слоя под углом 90° к оси x_1 величина прогиба значительно больше, поскольку пластина закреплена в направлении, перпендикулярном направлению армирования растягиваемого слоя.

Проведены также расчеты, в которых параметры упругости композита при сжатии полагались равными параметрам упругости при растяжении. На рис. 4,д,е показан прогиб двухслойной пластины с конфигурацией слоев ($90^\circ, 0^\circ$). В этом случае максимальная

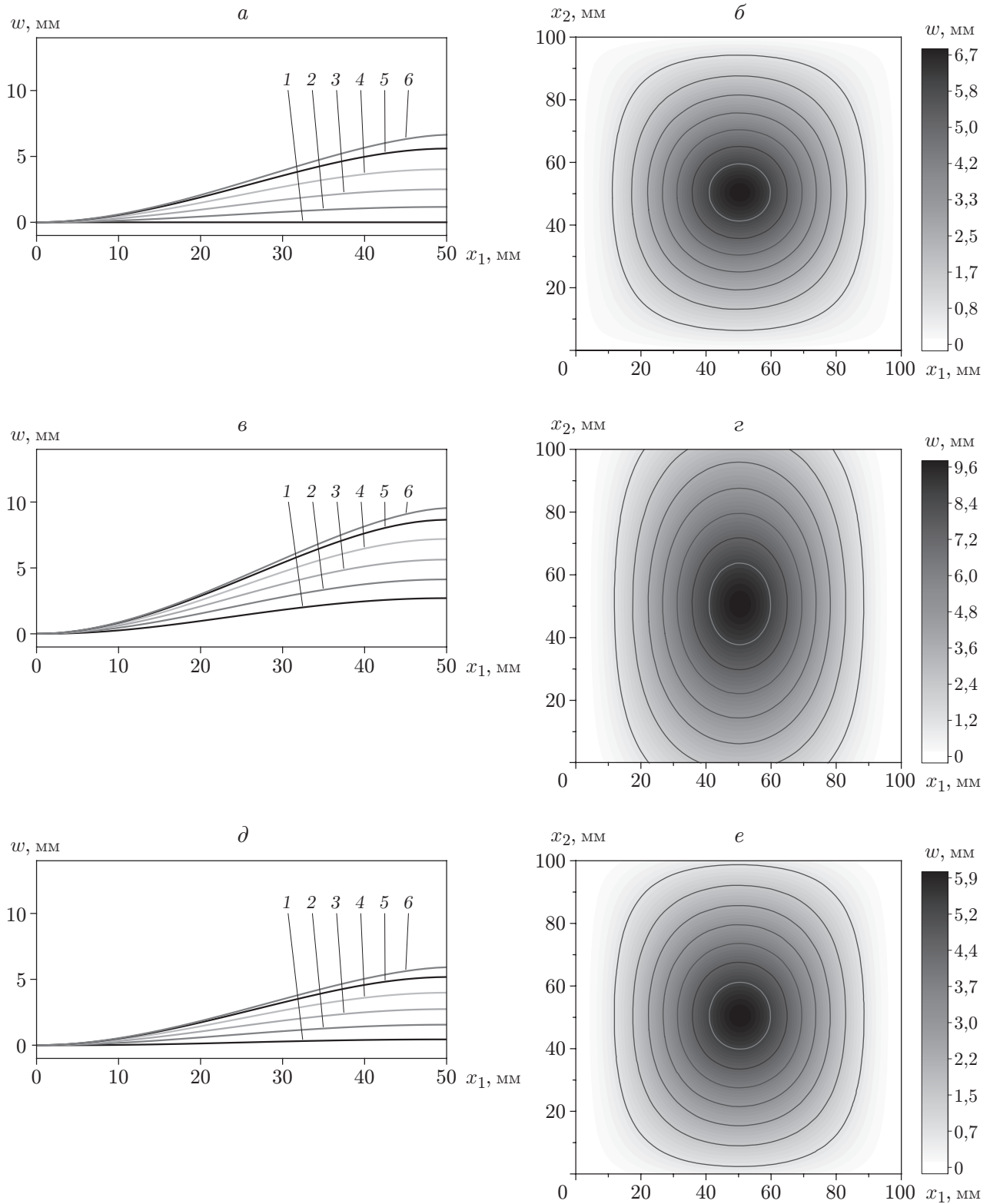


Рис. 4. Прогиб двухслойной пластины с различной конфигурацией армирования слоев (*а, в, д*) и изолинии прогиба (*б, г, е*):

а, б — конфигурация армирования слоев ($0^\circ, 90^\circ$) с учетом различия сопротивлений материала растяжению и сжатию, *в-е* — конфигурация армирования слоев ($90^\circ, 0^\circ$) (*в, г* — с учетом различия сопротивлений материала растяжению и сжатию, *д, е* — без учета различия сопротивлений растяжению и сжатию)

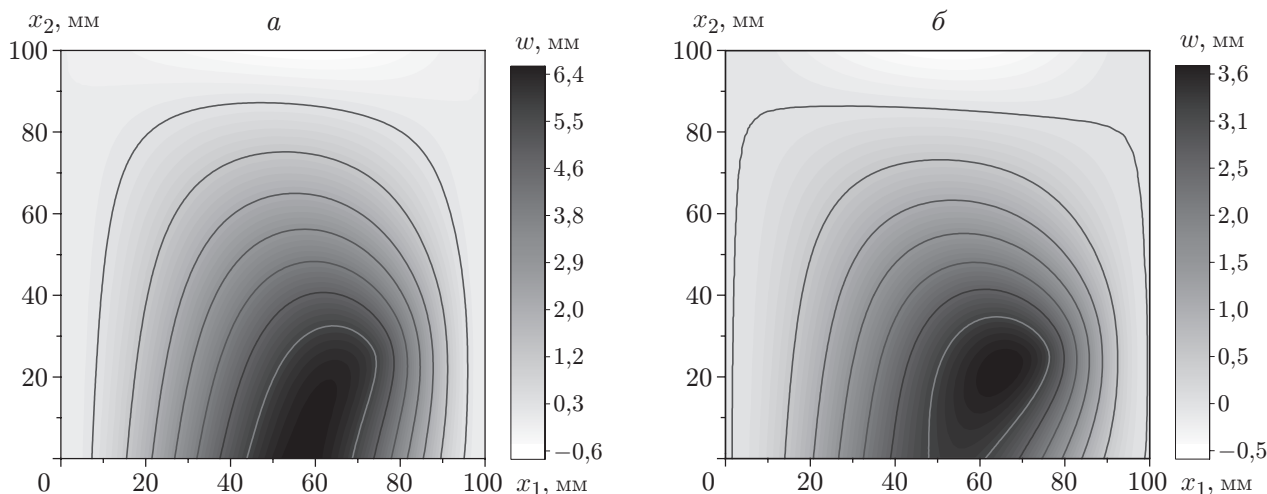


Рис. 5. Прогиб двухслойной пластины с конфигурацией армирования слоев $(90^\circ, 0^\circ)$, нагруженной сосредоточенной силой q , с учетом (а) и без учета (б) различия сопротивлений материала растяжению и сжатию

величина прогиба существенно меньше, чем в случаях, представленных на рис. 4, а–г, так как жесткость пластины на изгиб без учета различия сопротивлений увеличивается. При расчете без учета разномодульности максимальный прогиб равен 5,91 мм, что составляет приблизительно 62 % максимального прогиба с учетом разномодульности, равного 9,54 мм.

На рис. 5 приведены результаты расчетов для пластины с указанными выше характеристиками, конфигурацией армирования слоев $(90^\circ, 0^\circ)$ и нагрузкой $q = 10$ кН, действующей в точке $x_1 = 75$ мм, $x_2 = 25$ мм. В этом случае величины прогибов с учетом и без учета разномодульности составили 6,35 и 3,55 мм соответственно.

Заключение. В работе с использованием гипотез Кирхгофа получено уравнение четвертого порядка в частных производных относительно прогиба с коэффициентами, зависящими от углов армирования и параметров упругости матрицы и армирующих волокон. Разработаны вычислительный алгоритм и компьютерная программа для численного решения уравнения изгиба с граничными условиями различного типа, проведена серия расчетов. Разработанный вычислительный алгоритм является важным элементом решения более общей задачи определения напряженно-деформированного состояния слоистой композитной пластины из разномодульного материала, находящейся под действием произвольно заданной системы внешних сил и заданной системы мембранных усилий, перерезывающих сил и изгибающих моментов на ее краях. Эта задача сводится к решению нелинейной эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных, состоящей из уравнения четвертого порядка относительно прогиба и двух уравнений второго порядка для перемещений в плоскости пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
2. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
3. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.

4. **Алфутов Н. А.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. М.: Машиностроение, 1984.
5. **Болотин В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. М.: Машиностроение, 1980.
6. **Сао Р., Ниу К.** New unified model of composite sandwich panels/beams buckling introducing interlayer shear effects // Composite Structures. 2020. V. 252. 112722.
7. **Delavari K., Dabiryan H.** Mathematical and numerical simulation of geometry and mechanical behavior of sandwich composites reinforced with 1×1 -Rib-Gaiting weft-knitted spacer fabric; compressional behavior // Composite Structures. 2021. V. 268. 113952.
8. **Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Petrakov I. E.** On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension // Composite Structures. 2021. V. 268. 113921.
9. **Anin B. D., Sadovskii V. M., Petrakov I. E., Vlasov A. Yu.** Strong bending of a beam from a fibrous composite, differently resistant to tension and compression // J. Sib. Federal Univ.: Math. Phys. 2019. V. 12, iss. 5. P. 533–542.
10. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
11. **Писсанецки С.** Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.

*Поступила в редакцию 16/VI 2021 г.,
после доработки — 16/VI 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.*
