

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА

Б. В. Новожилов

(Москва)

Исследуется процесс горения пороха, температура поверхности которого T_s зависит от давления p и начальной температуры T_0 , при гармонически меняющемся давлении. Нелинейность уравнения теплопроводности и зависимостей скорости горения u и температуры поверхности от давления и начальной температуры приводит к изменению нулевой и появлению высших гармоник скорости горения и температуры пороха. Рассмотрен случай нелинейного резонанса, когда частота изменения давления близка к собственной частоте пороха. Показано, что при постоянном давлении возможны автоколебательные режимы горения.

1. Постановка задачи и основные уравнения. В работе [1] показано, что рассмотрение нестационарных процессов при горении порохов с переменной температурой поверхности может быть проведено вполне аналогично случаю постоянной температуры T_s , исследованному Я. Б. Зельдовичем [2, 3]. Если пренебрегать инерционностью всех процессов за исключением теплопроводности в конденсированной фазе, то можно показать, что температура поверхности пороха T_s , так же как и скорость горения u при нестационарном горении, определяется мгновенными значениями давления и внутреннего градиента температуры на поверхности пороха f . Зависимости $u(f, p)$ и $T_s(f, p)$ могут быть получены из законов стационарного горения $u^\circ(T_0, p)$ и $T_s^\circ(T_0, p)$ путем замены в них начальной температуры пороха T_0 ее выражением через u , T_s и f

$$\kappa f^\circ = u^\circ (T_s^\circ - T_0) \quad (1.1)$$

справедливым в стационарном режиме (κ — температуропроводность пороха).

В [4] в линейном приближении был изучен процесс горения пороха при гармонически меняющемся давлении. В настоящей работе рассмотрены нелинейные эффекты в том числе нелинейный резонанс и автоколебательные режимы.

Пусть среднее значение давления равно p° , а скорость горения и температура поверхности в стационарном режиме при такой величине давления равны соответственно u° и T_s° .

Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s^\circ - T_0}, \quad \xi = \frac{u^\circ}{\kappa} x, \quad \tau = \frac{(u^\circ)^2}{\kappa} t, \quad v = \frac{u}{u^\circ}, \quad \eta = \frac{p}{p^\circ}, \quad \Psi = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \quad (1.2)$$

Здесь x — координата ($x < 0$), t — время. Тогда в единственной инерционной области — прогревом слое конденсированной фазы — будет справедливо уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$\theta|_{\xi=0} = \vartheta, \quad \theta|_{\xi \rightarrow \infty} = 0 \quad \left(\vartheta = \frac{T_s - T_v}{T_s - T_v} \right) \quad (1.4)$$

Система уравнений будет полной, если к (1.3) и (1.4) добавить зависимости скорости горения и температуры поверхности от давления и градиента

$$v = v(\varphi, \eta), \quad \vartheta = \vartheta(\varphi, \eta) \quad (1.5)$$

и давление как функцию времени, которую выберем в симметричном относительно синуса и косинуса виде

$$\eta = 1 + h(\cos \gamma\tau + \sin \gamma\tau) \quad (1.6)$$

причем $\sqrt{2} h = H$ — амплитуда давления.

Система (1.3) — (1.6) позволяет найти зависимость скорости горения и температуры пороха от времени, однако точное ее решение при произвольных функциях (1.5) невозможно. В связи с этим воспользуемся методом разложения решения в ряд по малому параметру — амплитуде давления.

2. Скорость горения и распределение температур в третьем приближении. Воздействие гармонически меняющейся во времени силы на нелинейную колебательную систему приводит к появлению всех гармоник колебательного движения. Если амплитуда силы мала, то поправка к постоянной составляющей и вторая гармоника пропорциональны квадрату амплитуды, а первая гармоника по сравнению с линейным приближением меняется на величины третьего порядка по амплитуде (см., например, [5-7]).

Стационарный режим горения при давлении $\eta = 1$ описывается решением

$$\theta = e^{\xi}, \quad v = 1, \quad \vartheta = 1, \quad \varphi = 1 \quad (2.1)$$

В случае меняющегося по закону (1.6) давления будем искать решение для вышеприведенных величин в виде

$$v(\tau) = 1 + v_{1c} \cos \gamma\tau + v_{1s} \sin \gamma\tau + w_2 + v_{2c} \cos 2\gamma\tau + v_{2s} \sin 2\gamma\tau \quad (2.2)$$

$$\vartheta(\tau) = 1 + \vartheta_{1c} \cos \gamma\tau + \vartheta_{1s} \sin \gamma\tau + \psi_2 + \vartheta_{2c} \cos 2\gamma\tau + \vartheta_{2s} \sin 2\gamma\tau \quad (2.3)$$

$$\varphi(\tau) = 1 + \varphi_{1c} \cos \gamma\tau + \varphi_{1s} \sin \gamma\tau + f_2 + \varphi_{2c} \cos 2\gamma\tau + \varphi_{2s} \sin 2\gamma\tau \quad (2.4)$$

$$\theta(\xi_1\tau) = e^{(1+w_2)\xi} [1 + \theta_{1c}(\xi) \cos \gamma\tau + \theta_{1s}(\xi) \sin \gamma\tau + \Psi_2(\xi) + \theta_{2c}(\xi) \cos 2\gamma\tau + \theta_{2s}(\xi) \sin 2\gamma\tau] \quad (2.5)$$

Подставим выражения для скорости (2.2) и температуры (2.5) в уравнение теплопроводности, перемножим тригонометрические функции, удерживая только нулевую, первую и вторую гармоники, и приравняем члены при одинаковых тригонометрических функциях. Тогда получим пять обыкновенных дифференциальных уравнений для величин θ_{1c} , θ_{1s} , Ψ_2 , θ_{2c} и θ_{2s} .

Введем комплексные величины

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_{nc} + i\theta_{ns}, & v_n &= v_{nc} + iv_{ns} \\ \varphi_n &= \varphi_{nc} + i\varphi_{ns}, & \vartheta_n &= \vartheta_{nc} + i\vartheta_{ns} \end{aligned} \quad (n=1,2) \quad (2.6)$$

Тогда вместо пяти будет только три уравнения — два комплексных и одно вещественное

$$\theta_1'' + \theta_1' - i\gamma\theta_1 = \quad (2.7)$$

$$= v_1 - w_2\theta_1' + v_1(w_2 + \Psi_2' + \Psi_2) + \frac{1}{2}i\bar{v}_1(\theta_2' + \theta_2) + \frac{1}{2}i v_2(\bar{\theta}_1' + \theta_1) \\ \Psi_2'' + \Psi_2' = \frac{1}{4}v_1(\bar{\theta}_1' + \bar{\theta}_1) + \frac{1}{4}\bar{v}_1(\theta_1' + \theta_1) \quad (2.8)$$

$$\theta_2'' + \theta_2' - 2i\gamma\theta_2 = v_2 - \frac{1}{2}i\bar{v}_1(\theta_1' + \theta_1) \quad (2.9)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ξ , а черта — комплексное сопряжение. В линейном приближении (2.7) имеет решение [4]

$$\theta_1 = \vartheta_1 + A_1(e^{z_1\xi} - 1), \quad A_1 = \vartheta_1 - i v_1 / \gamma \quad (2.10)$$

причем

$$z_1 = \frac{1}{2}(\gamma / R_1 - 1) + iR_1, \quad R_1 = [\frac{1}{8}(V\sqrt{16\gamma^2 + 1} - 1)]^{1/2} \quad (2.11)$$

Полезно отметить, что

$$z_1^2 + z_1 - i\gamma = 0, \quad 4R_1^4 + R_1^2 - \gamma^2 = 0 \quad (2.12)$$

Имея выражение для $\theta_1(\xi)$ в первом приближении, можно из уравнений (2.8) — (2.9) найти соответственно $\Psi_2(\xi)$ и $\theta_2(\xi)$ во втором приближении. Для постоянной составляющей имеем

$$\Psi_2 = \psi_2 + \frac{i}{4\gamma} [\bar{A}_1 v_1 (1 + \bar{z}_1) (e^{\bar{z}_1 \xi} - 1) - A_1 \bar{v}_1 (1 + z_1) (e^{z_1 \xi} - 1)] \quad (2.13)$$

Координатная зависимость второй гармоники температуры конденсированной фазы выражается в виде

$$\theta_2 = \vartheta_2 + \left(A_2 - \frac{i v_1^2}{4\gamma^2} \right) (e^{z_2 \xi} - 1) + \frac{v_1 A_1}{2\gamma} (1 + z_1) (e^{z_1 \xi} - e^{z_2 \xi}) \quad (2.14)$$

где

$$A_2 = \vartheta_2 - \frac{i v_2}{2\gamma}, \quad z_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\gamma}{R_2} - 1 \right) + iR_2, \quad R_2 = \left[\frac{1}{8} (V\sqrt{64\gamma^2 + 1} - 1) \right]^{1/2} \\ z_2^2 + z_2 - 2i\gamma = 0, \quad 4R_2^4 + R_2^2 - 4\gamma^2 = 0 \quad (2.15)$$

Наконец, подставляя выражения (2.10) и (2.13) в правую часть уравнения (2.7) и решая последнее, получим амплитуду первой гармоники с точностью до членов третьего порядка включительно

$$\theta_1 = \vartheta_1 + \left(A_1 + A_3 - \frac{i\bar{v}_1 v_2}{4\gamma^2} \right) (e^{z_1 \xi} - 1) - \frac{A_1 \bar{v}_2 \bar{z}_1}{1 + 2\bar{z}_1} \xi e^{z_1 \xi} - \\ - \frac{A_1 (1 + \bar{z}_1)}{4\gamma} \left[v_2 + \frac{v_1^2}{2\gamma} (1 + \bar{z}_1) \right] (e^{\bar{z}_1 \xi} - e^{z_1 \xi}) + \\ + \frac{v_1}{2\gamma} (1 + z_2) (e^{z_2 \xi} - e^{z_1 \xi}) \left[A_2 - \frac{v_1 A_1}{2\gamma} (1 + z_1) - \frac{i}{4\gamma^2} v_1^2 \right] \quad (2.16)$$

$$A_3 = -\frac{i}{\gamma} v_1 \left\{ w_2 + \psi_2 - \frac{v_1 \bar{v}_1}{8\gamma^2} - \frac{i}{4\gamma} [\bar{A}_1 v_1 (1 + \bar{z}_1) - A_1 \bar{v}_1 (1 + z_1)] \right\}$$

Из (2.4), (2.5) следует

$$\varphi_1 = (1 + w_2) \vartheta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad f_2 = w_2 + \psi_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad \varphi_2 = \vartheta_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$$

Подставляя в эти выражения производные, вычисленные из (2.16), (2.12) и (2.14), получим три алгебраических уравнения, связывающих

девять величин — постоянные составляющие и амплитуды первых двух гармоник градиента и температуры на поверхности и скорости горения

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \vartheta_1(1 + w_2) + A_1 z_1 + \left(A_3 - \frac{i \bar{v}_1 v_2}{4 \gamma^2} \right) z_1 - \frac{A_1 w_2 z_1}{1 + 2 z_1} - \\ & - \frac{A_1(1 + \bar{z}_1)(\bar{z}_1 - z_1)}{4 \gamma} \left[v_2 + \frac{v_1^2}{2 \gamma} (1 + \bar{z}_1) \right] + \\ & + \frac{\bar{v}_1}{2 \gamma} (1 + z_2)(z_2 - z_1) \left[A_2 - \frac{v_1 A_1}{2 \gamma} (1 + z_1) - \frac{i}{4 \gamma^2} v_1^2 \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$f_2 = w_2 + \psi_2 + \frac{1}{4} (\bar{\vartheta}_1 v_1 + \vartheta_1 \bar{v}_1) \quad (2.18)$$

$$\varphi_2 = \vartheta_2 + \frac{i v_1 A_1}{2} + z_2 \left[A_2 - \frac{i v_1^2}{4 \gamma^2} - \frac{\bar{v}_1 A_1}{2 \gamma} (1 + z_1) \right] \quad (2.19)$$

Еще шесть уравнений можно получить путем разложения функций $v(\varphi, \eta)$ и $\vartheta(\varphi, \eta)$ в ряд Тейлора вплоть до членов третьего порядка. После перемножения тригонометрических функций и приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках находим для скорости горения

$$\begin{aligned} v_1 = & \frac{\partial v}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \left(\varphi_1^2 + \frac{i \bar{\varphi}_1 \varphi_2}{2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \eta} \left(\eta_1^2 + \frac{i \bar{\eta}_1 \eta_2}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \varphi_1^3 + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^2 \partial \eta} (2 \varphi_1 \bar{\varphi}_1 \eta_1 + \varphi_1^2 \bar{\eta}_1) + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial \eta^2} (2 \varphi_1 \eta_1 \bar{\eta}_1 + \bar{\varphi}_1 \eta_1^2) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$w_2 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} f_2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \varphi_1 \bar{\varphi}_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \eta} (\varphi_1 \bar{\eta}_1 + \bar{\varphi}_1 \eta_1) + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \eta_1 \bar{\eta}_1 \right] \quad (2.21)$$

$$v_2 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \varphi_2 - \frac{i}{4} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \varphi_1^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \eta} \varphi_1 \eta_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \eta_1^2 \right] \quad (2.22)$$

причем $\eta_1 = h(1 + i)$. Для ϑ_1 , ψ_2 и ϑ_2 естественно получаются такие же выражения, отличающиеся только заменой производных от v на производные от ϑ по φ и η .

Из девяти полученных уравнений можно найти постоянные составляющие и первые две гармоники скорости горения w_2 , v_1 и v_2 , температуры ψ_2 , ϑ_1 и ϑ_2 и градиента f_2 , φ_1 и φ_2 на поверхности пороха. После этого из (2.14)–(2.16) находится распределение температур внутри пороха. Решение этих алгебраических уравнений проще всего провести методом, примененным для решения системы (2.7)–(2.9). Сначала ϑ_1 , φ_1 и v_1 находятся в линейном приближении, затем можно найти постоянные составляющие и вторые гармоники во втором приближении и, наконец, находятся первые гармоники в третьем приближении.

3. Резонанс. В работе [4] показано, что порох, имеющий переменную температуру поверхности, представляет собой колебательную систему, собственная частота γ_0 и декремент затухания которой λ равны

$$\gamma_0 = \frac{V \bar{k}}{r}, \quad \lambda = \frac{r(k+1) - (k-1)^2}{2r^2} \quad (3.1)$$

где k и r — параметры пороха, характеризующие зависимость скорости горения и температуры поверхности от начальной температуры

$$k = (T_s^\circ - T_0) \left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial T_0} \right)_p, \quad r = \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial T_0} \right)_p \quad (3.2)$$

Если частота изменения давления γ близка к собственной частоте пороха ($\gamma = \gamma_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \gamma_0$), а декремент затухания $\lambda \ll \gamma_0$ (режим горения вблизи границы устойчивости $r = (k-1)^2 / (k+1)$), то зависимость

первой гармонике скорости горения от частоты, найденная в линейном приближении [4], имеет резонансный характер

$$v_1 (\varepsilon - i\lambda) = f(k, v, \mu) \eta_1 \quad (3.3)$$

Амплитуда скорости горения зависит, конечно, от параметров

$$v = \left(\frac{\partial \ln u^\circ}{\partial \ln p} \right)_{T_0}, \quad \mu = \frac{1}{T_s^\circ - T_0} \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial \ln p} \right)_{T_0} \quad (3.4)$$

показывающих, насколько сильно меняются скорость горения и температура поверхности при изменении давления.

Рассмотрим теперь резонанс в нелинейном приближении. Как известно из теории механических и электрических нелинейных колебаний [5-7], при нелинейном резонансе амплитуда первой гармонике — порядка корня кубического из амплитуды вынуждающей силы, а постоянная составляющая и вторая гармоника — порядка квадрата амплитуды первой гармонике. В связи с этим уравнения (2.20)–(2.22) и аналогичные им уравнения для температуры поверхности могут быть упрощены. А именно, при производных второго и третьего порядков должны быть опущены члены, содержащие η_1 , так как, например, $\eta_1 f_2 \sim \eta_1 v_1^2 \sim \eta_1^{5/3}$, в то время как члены типа $\varphi_1 f_2$ порядка $v_1^3 \sim \eta_1$, т. е. много больше.

Таким образом, зависимости $v(\varphi, \eta)$ и $\vartheta(\varphi, \eta)$ дают шесть уравнений, содержащих амплитуду давления только в первой степени в линейных членах

$$v_1 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \varphi_1 f_2 + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \varphi_1^2 \bar{\varphi}_1 \quad (3.5)$$

$$\vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \eta_1 + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} \varphi_1 f_2 + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \varphi^3} \varphi_1^2 \bar{\varphi}_1$$

$$w_2 = \frac{\partial w}{\partial \varphi} f_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \varphi_1 \bar{\varphi}_1, \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} f_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \varphi_1 \bar{\varphi}_1 \quad (3.6)$$

$$v_2 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \varphi_2 - \frac{i}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \varphi_1^2, \quad \vartheta_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \varphi_2 - \frac{i}{4} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} \varphi_1^2 \quad (3.7)$$

Соотношения (2.17)–(2.19), полученные из уравнения теплопроводности, естественно, не меняются.

Получим теперь из этой системы уравнение для амплитуды первой гармонике скорости горения. В линейном приближении

$$\varphi_1 = \vartheta_1 + A_1 z_1, \quad v_1 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_1, \quad \vartheta_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \eta_1 \quad (3.8)$$

Выразим постоянные составляющие скорости горения, температуры поверхности и градиента — w_2 , ψ_2 и f_2 через v_1 . Для этого в уравнения (2.18) и (3.6) подставим ϑ_1 и φ_1 , найденные в линейном приближении.

Из двух последних уравнений (3.8) имеем

$$\varphi_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^{-1} v_1, \quad \vartheta_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} v_1$$

члены, содержащие амплитуду давления, удерживать не надо, так как во втором приближении они приведут к выражениям типа $v_1 \eta_1 \sim \eta_1^{4/3}$, которыми пренебрегаем по сравнению с $v_1^2 \sim \eta_1^{2/3}$. Таким образом, (2.18) и (3.6) дадут три алгебраических уравнения первой степени для w_2 , ψ_2 и f_2 , содержащие члены с $|v_1|^2$. Решая их, найдем, что все постоянные составляющие пропорциональны квадрату модуля амплитуды первой гармонике $|v_1|^2$.

Поступая аналогичным образом с уравнениями для вторых гармоник (2.19) и (3.7), получим, что вторые гармоники скорости горения, температуры и градиента на поверхности пороха v_2 , ϑ_2 и φ_2 пропорциональны квадрату амплитуды первой гармоники скорости горения v_1^2 .

В уравнениях же для первой гармоники (2.17) и (3.5) постоянные составляющие множатся всегда на амплитуды первых гармоник, а вторые гармоники — на комплексно сопряженные амплитуды первых гармоник. Поэтому все члены третьего порядка будут пропорциональны $v_1 |v_1|^2$.

Таким образом, (2.17) и (3.5) дают

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \vartheta_1 + A_1 z_1 + C_1 v_1 |v_1|^2, \quad v_1 = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_1 + C_2 v_1 |v_1|^2 \quad (3.9) \\ \vartheta_1 &= \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \eta_1 + C_3 v_1 |v_1|^2\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 зависят от частоты и производных от v и ϑ по φ . В членах первого порядка, считая ε и λ малыми, можно перейти [4] от r и γ к λ и ε

$$\begin{aligned}r &= \frac{(k-1)^2}{k+1} \left[1 + 2 \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \lambda \right] \\ \gamma &= \frac{\sqrt{k}(k+1)}{(k-1)^2} \left[1 + \frac{(k-1)^2}{\sqrt{k}(k+1)} \varepsilon - 2 \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \lambda \right] \quad (3.10)\end{aligned}$$

а в членах третьего порядка γ нужно заменить резонансной частотой на границе устойчивости ($\lambda = 0$)

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{k}(k+1)}{(k-1)^2}$$

Тогда для амплитуды первой гармоники получим уравнение

$$v_1 [\varepsilon - i\lambda + (\alpha_1 - i\alpha_2) |v_1|^2] = f(k, v, \mu) \eta_1 \quad (3.11)$$

где α_1 и α_2 — функции, зависящие от k , вид которых определяется производными скорости горения и температуры поверхности по градиенту, а

$$f(k, v, \mu) = \frac{(k+1)(k^2+6k+1)\{v(k^2-1) + [v(k-1)^2 - \mu k(k+1)](1+i\sqrt{k})\}}{2(k-1)^4[-\sqrt{k}(k-1) + i(3k+1)]} \quad (3.12)$$

та же функция, что и в линейном приближении (3.3).

Беря модуль выражения (3.11), найдем уравнение резонансной кривой, дающей связь амплитуды первой гармоники с частотой при заданных декременте затухания λ и амплитуде давления H

$$|v_1|^2 [(\varepsilon + \alpha_1 |v_1|^2)^2 + (\lambda + \alpha_2 |v_1|^2)^2] = |f|^2 H^2 \quad (3.13)$$

Таким образом, учет нелинейных эффектов приводит к зависимости частоты и декремента затухания при резонансе от амплитуды колебаний. Как и в случае обычных нелинейных колебаний электрических и механических систем, поправка к частоте пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Существенным элементом теории является наличие в (3.13) квадратичной по амплитуде поправки к декременту затухания. Это обстоятельство может привести к автоколебательному режиму: при отрицательном α_2 декремент затухания падает с ростом амплитуды и при $\lambda + \alpha_2 |v_1|^2 = 0$ возможны колебания без вынуждающей силы, т. е. при постоянном давлении. Наоборот, если стационарное горение пороха неустойчиво ($\lambda < 0$), то при том же условии возможен автоколебательный режим при $\alpha_2 > 0$. В дальнейшем будем считать $\lambda > 0$, рассмотрение обратного случая может быть проведено аналогично.

Исследование резонансной кривой удобно вести в переменных

$$V^2 = \frac{|\alpha_2| |v_1|^2}{\lambda}, \quad \Omega = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad F^2 = \frac{|f|^2 |\alpha_2| H^2}{\lambda^3}$$

Тогда

$$(\Omega + qV^2)^2 + (1 \pm V^2)^2 = \frac{F^2}{V^2} \quad \left(q = \frac{\alpha_1}{|\alpha_2|} \right) \quad (3.14)$$

Здесь знак плюс соответствует положительному, а минус — отрицательному α_2 . Из (3.14) удобно выразить частоту как функцию амплитуды колебаний

$$\Omega = -qV^2 \pm \sqrt{F^2/V^2 - (1 \pm V^2)^2} \quad (3.15)$$

Знак q существенной роли не играет, так как его изменение (или соответственно изменение знака α_1) эквивалентно замене $\Omega \rightarrow -\Omega$, т. е. отражению резонансной кривой осью $\Omega = 0$. В дальнейшем будем для определенности считать $q > 0$.

Рассмотрим сначала случай $\alpha_2 > 0$ (затухание увеличивается с амплитудой). При малых амплитудах давления, пренебрегая в (3.14) членами со старшими степенями V^2 , получаем выражение для резонанса в линейном приближении

$$V^2 (1 + \Omega^2) = F^2 \quad (3.16)$$

Амплитуда максимальна при $\Omega = 0$. Увеличение амплитуды давления приводит к сдвигу частоты, соответствующей максимальной амплитуде колебаний. Из (3.14) имеем

$$\frac{dV^2}{d\Omega} = \frac{-2V^2(\Omega + qV^2)}{3(q^2 + 1)V^4 + 4(q\Omega + 1)V^2 + \Omega^2 + 1} \quad (3.17)$$

Максимум амплитуды достигается при

$$\Omega_e = -qV_e^2 \quad (3.18)$$

Подстановка этого соотношения в (3.14) дает связь между максимальной амплитудой колебания и заданной амплитудой давления

$$V_e^2 (1 + V_e^2)^2 = F^2 \quad (3.19)$$

Производная (3.17) бесконечна, если

$$3(q^2 + 1)V_i^4 + 4(q\Omega_i + 1)V_i^2 + \Omega_i + 1 = 0 \quad (3.20)$$

Совместное решение этого уравнения с (3.14) дает координаты точек амплитудной кривой, имеющих бесконечную производную, при заданных F и q . Выясним, при каких условиях существуют такие точки (они играют важную роль при исследовании устойчивости колебательных режимов). Уравнение (3.20) квадратично относительно V_i^2 и имеет два совпадающих положительных корня, если

$$\Omega_i^2 (q^2 - 3) + 8q\Omega_i - 3q^2 + 1 = 0, \quad q\Omega_i + 1 < 0$$

При этом

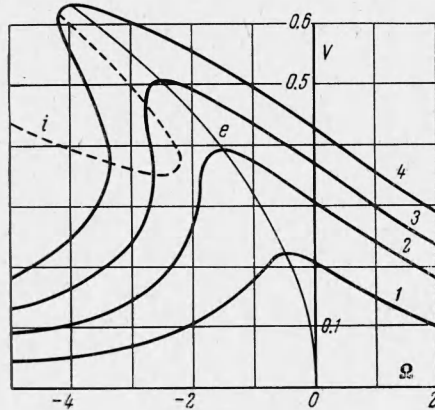
$$V_i^{*2} = \frac{2}{V^3(q - V^3)}, \quad \Omega_i = -\frac{4q + V^3(q^2 + 1)}{q^2 - 3} \quad (3.21)$$

Таким образом, точки с бесконечными производными существуют только при $q > \sqrt{3}$, т. е. при достаточно большом отношении α_1/α_2 .

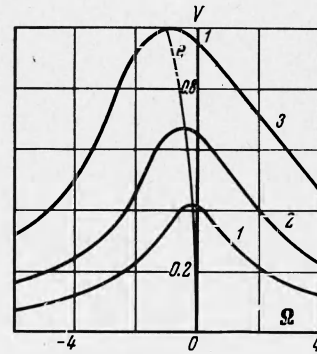
При данном значении q такие точки появляются лишь при амплитуде давления, превышающей критическое значение

$$F_i^2 = \frac{8(q^2 + 1)}{3\sqrt{3}(q - \sqrt{3})^3} \quad (3.22)$$

которое можно получить, подставив (3.21) в (3.14). Если $q < \sqrt{3}$, то резонансная кривая ни при каких значениях амплитуды давления не имеет точек с бесконечными производными.



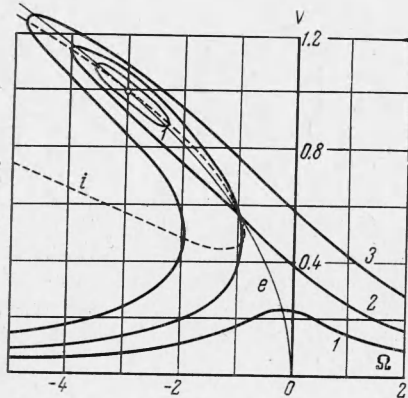
Фиг. 1



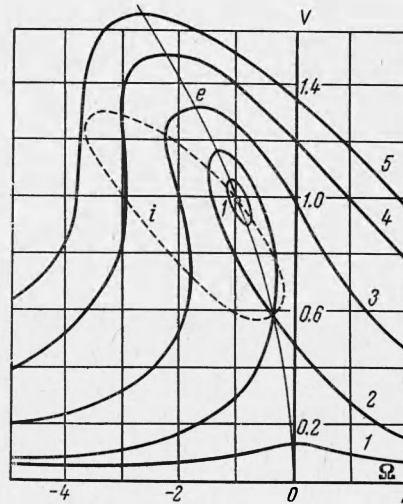
Фиг. 2

На фиг. 1 изображены резонансные кривые для $q = 10$. Кривые 1—4 построены для значений F_i^2 , равных соответственно 0.05, 0.2, 0.4 и 0.8. Геометрическое место максимумов резонансных кривых — линия e , а точки с бесконечными производными лежат на кривой i . Критическое значение квадрата амплитуды давления $F_i^2 = 0.227$.

На фиг. 2 построены резонансные кривые при $q = 1$; цифры 1—3 соответствуют значениям F_i^2 , равным 0.25, 1.00 и 4.00.



Фиг. 3



Фиг. 4

Полезно сравнить полученные результаты с обычным нелинейным резонансом. В нелинейных колебаниях электрических и механических систем коэффициент затухания не изменяется с амплитудой колебаний. Поэтому $\alpha_2 = 0$ и $q = \infty$, т. е. осуществляется резонанс типа, изображенного на фиг. 1: при достаточно большой амплитуде вынуждающей силы резонансные кривые имеют две точки с бесконечными производными, участок кривой между которыми отвечает неустойчивым режимам колебаний. При горении же порохов коэффициент затухания изменяется с амплитудой. Если

$\alpha_1/\alpha_2 < \sqrt{3}$, то уширение резонансной кривой с ростом амплитуды компенсирует ее изгибание, и точек с бесконечными производными нет. При обратном соотношении между α_1 и α_2 (сильный наклон и слабое уширение) такие точки есть. Значение $q = \infty$ соответствует случаю, когда коэффициент затухания не меняется с амплитудой, — приведенные выше формулы переходят в известные выражения теории обычных нелинейных колебаний.

Перейдем теперь к рассмотрению резонансных кривых при $\alpha_2 < 0$, т. е. к случаю уменьшения коэффициента затухания с амплитудой колебаний. Экстремальные значения амплитуды определяются из соотношений

$$\Omega_e = -qV_e^2, \quad V_e^2(1 - V_e^2)^2 = F^2 \quad (3.23)$$

Второе уравнение в зависимости от величины F может иметь либо один, либо три положительных корня V_e^2 . Элементарное исследование показывает, что при малых значениях амплитуды давления

$$F < F_s, \quad F_s^2 = 4/27 \quad (3.24)$$

есть три корня. При $F > F_s$ — только один.

Координаты точек с бесконечными производными находятся из совместного решения уравнений

$$(\Omega_i + qV_i^2)^2 + (1 - V_i^2)^2 = F^2/V_i^2, \quad (3.25)$$

$$3(q^2 + 1)V_i^4 + 4(q\Omega_i - 1)V_i^2 + \Omega_i^2 + 1 = 0$$

При $q^2 > 3$ второе уравнение дает кривую, ветви которой уходят на бесконечность. Минимальное значение Ω_i и соответствующие V_i^2 и F_i^2 равны

$$\Omega_i^* = \frac{4q - \sqrt{3}(q^2 + 1)}{q^2 - 3}, \quad V_i^{*2} = \frac{2}{\sqrt{3}(q + \sqrt{3})}, \quad F_i^2 = \frac{8(q^2 + 1)}{3\sqrt{3}(q + \sqrt{3})^3} \quad (3.26)$$

При $q^2 < 3$ кривая $V_i(\Omega_i)$ замкнута. Экстремальные значения Ω_i и соответствующие им V_i^2 и F_i^2 даются выражениями

$$\Omega_i^* = \frac{4q + \sqrt{3}(q^2 + 1)}{q^2 - 3}, \quad V_i^{*2} = \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3} \pm q)}, \quad F_i^2 = \frac{8(q^2 + 1)}{3\sqrt{3}(\sqrt{3} \pm q)^3} \quad (3.27)$$

На фиг. 3 и 4 изображены резонансные кривые при $\alpha_2 < 0$. Фиг. 3 построена для $q = 3$ (цифры 1—3 соответствуют значениям F^2 , равным 0.05, $4/27$ и 0.5). Кривая i , отвечающая точкам с бесконечными производными, разомкнута ($q > \sqrt{3}$). Наоборот, на фиг. 4, построенной для $q = 1$ (кривые 1—5 отвечают значениям F^2 , равным 0.02, $4/27$, 1.00, 4.00, 8.00), геометрическое место точек с бесконечными производными изображается замкнутой кривой. Иначе говоря, резонансные кривые, соответствующие большим амплитудам вынуждающей силы, всегда имеют две точки с бесконечной производной, если $q > \sqrt{3}$. В обратном случае ($q < \sqrt{3}$) существует критическое значение амплитуды силы, выше которого на резонансных кривых таких точек нет.

Наиболее интересным свойством резонансных кривых при $\alpha_2 < 0$ является их разделение при $F < F_s = 4/27$ на две ветви (кривые 1). Нижняя ветвь с малыми амплитудами колебаний может быть получена (при достаточно малых F) и в линейном приближении. Наоборот, замкнутый контур, охватывающий точку $(-q, 1)$, является следствием нелинейности теории. В частности при отсутствии вынуждающей силы резонансная кривая вырождается в прямую $V = 0$ и точку $(-q, 1)$, т. е. система может совершать свободные колебания с амплитудой и частотой

$$|v_1| = \sqrt{\lambda/|\alpha_2|}, \quad \varepsilon = -q\lambda$$

При этом эффективный коэффициент затухания обращается в нуль с точностью до членов порядка квадрата амплитуды колебаний. Естественно назвать такое движение системы автоколебательным.

Резонансные кривые такого типа встречаются и в теории нелинейных колебаний электрических систем. Так в [6] рассмотрен пример автоколебательной системы — лампового генератора с обратной связью, в цепь сетки которого включен дополнительный источник, создающий переменное напряжение.

Важным вопросом теории нелинейных колебаний является исследование устойчивости процесса на различных участках резонансной кривой. Решение его должно быть предметом специального исследования, так как в теории нелинейных колебаний механических и электрических систем рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, в то время как в нашем случае колебательный процесс описывается нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных и нелинейными функциональными связями между скоростью горения, температурой и градиентом на поверхности пороха. То же относится и к вопросу о самовозбуждении колебаний — роли знака λ в процессе возбуждения автоколебаний.

4. Вычисление коэффициентов α_1 и α_2 . Вид коэффициентов α_1 и α_2 определяется производными от функций $v(\varphi, \eta)$ и $\Phi(\varphi, \eta)$ вплоть до третьего порядка. Явное вычисление коэффициентов в общем случае, видимо, не имеет смысла, так как приводит к необозримым выражениям. С другой стороны, в настоящее время отсутствует теория, которая давала бы конкретный вид зависимостей скорости горения и температуры поверхности от градиента и давления. В связи с этими обстоятельствами проведено вычисление коэффициентов α_1 и α_2 для частного типа функций $v(\varphi, \eta)$ и $\Phi(\varphi, \eta)$, причем во внимание принимались соображения простоты и соответствия с экспериментом.

Экспериментальные данные по скорости горения порохов в стационарном режиме обычно интерполируются в виде

$$u^\circ(T_0, p) = A(p^\circ)^\nu e^{\alpha T_0} \quad (4.1)$$

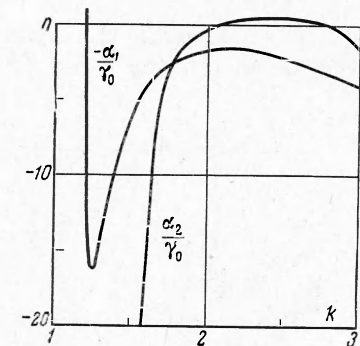
Измерения температуры поверхности пороха при разных начальных температурах и давлениях начали проводиться только в последнее время [8]. Экспериментальные трудности приводят к большим ошибкам измерения; в связи с этим из опытных данных невозможно получить сведения о поведении функции $T_s^\circ(T_0, p)$ с необходимой точностью. Поэтому возьмем интерполяционную формулу — в следующем виде:

$$T_s^\circ = T_0 + B(p^\circ)^\mu e^{\beta T_0} \quad (4.2)$$

С одной стороны, подходящим выбором параметров B , μ и β можно удовлетворить данным опытов с точностью до ошибок измерения, а с другой — такой вид формулы удобен для расчетов, так как содержит небольшое число параметров. То же относится и к (4.1).

Воспользовавшись соотношением (1.1) и перейдя к безразмерным переменным, получим

$$v = \eta^\nu e^{k(\Theta - \varphi/v)}, \quad \frac{\Phi}{v} = \eta^\mu e^{(r-1)(\Theta - \varphi/v)} \quad (4.3)$$



Фиг. 5

причем k , r , ν и μ даются выражениями (3.2) и (3.4).

Разложение этих функций в ряды приводит к шести алгебраическим уравнениям, которые представляют соотношения (3.5)—(3.7), написанные для конкретных зависимостей (4.3). Дальнейший ход вычислений подобен изложенному выше: он сводится к алгебраическим преобразованиям комплексных функций, зависящих только от параметра k , так как в членах третьего порядка r и γ заменяются на $(k-1)^2/(k+1)$ и $\sqrt{k(k+1)/(k-1)^2}$. Параметры же ν и μ входят в результат, так же как в линейном приближении (3.11), (3.12). Простые, но трудоемкие преобразования приводят к чрезвычайно громоздким выражениям для $\alpha_1(k)$ и $\alpha_2(k)$. Укажем, что каждый коэффициент представляется дробью, числитель и знаменатель которой есть сумма произведений $\sqrt{k}$ и различных степеней

$$R_2^\circ = \left[\frac{1}{8} \left(64 \frac{k(k+1)^2}{(k-1)^4} - 1 \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2}$$

на полиномы от k шестой — девятой степеней. Численные расчеты приводят к результатам, представленным на фиг. 5 в виде зависимостей отношений $(-\alpha_1)/\gamma_0$ и α_2/γ_0 от k . При $k-1 \ll 1$ справедливы асимптотические выражения

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_0} = -\frac{0.334}{(k-1)^4}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_0} = \frac{1.94}{(k-1)^4} \quad (4.4)$$

Из графика видно, что поправка к декременту затухания $\alpha_2|v_1|^2$ может быть как положительной, так и отрицательной. При $\alpha_2 > 0$ всегда $q > \sqrt{3}$, а для отрицательных α_2 возможны значения и большие, и меньшие $\sqrt{3}$. Таким образом, для рассматриваемой модели пороха, описываемой зависимостями (4.3), возможны резонансные кривые, изображенные на фиг. 1, 3 и 4.

Изменение параметров k и r на эксперименте может быть осуществлено путем нагревания или охлаждения пороха. Каждому значению начальной температуры пороха T_0 на плоскости kr соответствует точка. Как показывают эксперименты [8], повышение T_0 приводит (для пороха H) к росту параметров k и r , причем при достаточно высоких температурах горение происходит вблизи границы устойчивости $r(k+1) = (k-1)^2$. Поэтому следует ожидать, что на опыте могут наблюдаться автоколебательные режимы горения. Так в [8] указывается, что горение пороха H при давлении $p = 1$ атм и $T_0 < 50^\circ \text{C}$ сопровождается пульсациями, частота которых порядка одного герца. Это значение совпадает с ожидаемой частотой автоколебаний. Действительно, порядок частоты колебаний $(u^\circ)^2 / \kappa$. При $\kappa \sim 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}$ и $u^\circ \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ см/сек}$ имеем $\gamma \sim 2 \text{ сек}^{-1}$.

Все предыдущие рассуждения относились к случаю $k > 1$, т. е. к области, в которой возможны свободные колебательные режимы горения. Однако автоколебательные процессы горения пороха могут, видимо, существовать и при $k < 1$. Нелинейные эффекты могут привести к уменьшению и обращению в нуль декремента затухания, даже если малые колебания невозможны. Это можно пояснить на примере обычного маятника, помещенного в среду, вязкость которой уменьшается снизу вверх. Если вязкость около положения равновесия маятника достаточно велика, то малое отклонение его приводит к аperiодическому движению. Представим себе, что при достаточно больших амплитудах маятник попадает в области с отрицательной вязкостью. В этом случае возможны свободные незатухающие колебания большой амплитуды — маятник приобретает энергию в области с отрицательной вязкостью и растрчивает ее, проходя область вблизи положения равновесия. Вполне может оказаться, что горение пороха при $k < 1$ обладает такими особенностями.

В заключение отметим, что, как и всякая нелинейная система, порох должен проявлять резонансы при частотах давления, равных $\gamma_0 p / q$, где p и q — целые числа. Эти ультра- и субгармонические колебания хорошо известны в теории электрических и механических колебаний. Метод, изложенный в предлагаемой работе, позволяет исследовать эти эффекты и в процессе горения пороха.

Автор благодарен Я. Б. Зельдовичу, Г. И. Баренблатту, А. С. Команейцу и О. И. Лейнунскому за обсуждение рассмотренных в работе вопросов и ряд советов.

Поступила 2 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожиллов В. В. Критерий устойчивости стационарного режима горения пороха. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, № 11—12.
3. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
4. Новожиллов В. В. Горение пороха при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1965, № 6.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика, Физматгиз, 1958.
6. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Изд. иностр. лит., 1952.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
8. Зенин А. А., Лейнунский О. И., Марголин А. Д., Нефедова О. И., Похил П. Ф. Поле температур у поверхности горящего пороха и устойчивость горения. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 3.