Теплофизика и аэромеханика, том 6, №1, 1999 г.

УДК 532.526

О МЕТОДЕ ДВУХМАСШТАБНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ И ПАРАБОЛИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

С.А. ГАПОНОВ

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск

В статье проанализированы два метода расчета возмущений в пограничном слое. Установлено, что гарантированная точность двух методов одинакова. Показано, что параболизованные уравнения не являются параболическими по существу и контроль за точностью их решения затруднен. В работе предложена их регуляризация на основе метода двухмасштабных разложений.

ВВЕДЕНИЕ

Характерная особенность течения в пограничном слое — медленное изменение стационарных параметров в направлении основного потока. С другой стороны, масштабы возмущения в областях, предшествующих ламинарно-турбулентному переходу, малы в сравнении с геометрическими размерами обтекаемых моделей и близки к толщине слоя. В классических работах [1, 2] по устойчивости используется приближенный метод, основанный на замене реального стационарного течения в пограничном слое плоско параллельным. В этом случае нормальными к поверхности модели течениями и производными по продольной координате x пренебрегают и учитывается изменение продольной скорости и температуры только от нормальной координаты y. Тогда решение соответствующих линейных по отношению к возмущениям уравнений можно искать в виде

$$q(x,y,z,t) = q_0(y)\exp[-i(\omega t - \alpha x - \beta z)],$$

здесь x, y, z — координаты, t — время. При исследовании на пространственную неустойчивость частота ω и волновое число β берутся реальными и фиксируются. Волновое число α находится как собственное значение и является комплексной величиной, по знаку мнимой части которой определяется устойчивость течения.

Недостаток классического подхода состоит в следующем. Как показывают эксперимент и теоретический анализ, интенсивность нарастания возмущения зависит от нормальной координаты, что не учитывается теорией локально-параллельного потока. В силу того, что решения в двух соседних сечениях по x строятся независимо, трудно обосновать связь между их амплитудами. Указанные факторы, а также желание оценить точность и улучшить результаты классической теории устойчивости привели к построению новых моделей. Более надежной, но и трудоемкой, является теория, основанная на прямом численном решении полных нестационарных уравнений динамики сжимаемого газа [3, 4]. В настоящей работе рассмотрены два других приближенных метода, учитывающих непараллельность течения в пограничном слое и конкурирующих между собой в части надежности результатов и простоты их получения. Первый метод основан на асимптотическом разложении решения уравнений динамики с использованием малого параметра непараллельности $\varepsilon \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$, где Re_x — число Рейнольдса, построенное по продольной координате, и многомасштабного разложения продольной координаты. При реализации второго метода применяются так называемые параболизованные уравнения устойчивости (ПУУ).

МНОГОМАСШТАБНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Начало исследованиям первым методом было положено в [5], где изучалось развитие возмущений в дозвуковом пограничном слое. Этот подход получил развитие в [6, 7] и других работах по устойчивости течений несжимаемой жидкости. Для случая сверхзвукового пограничного слоя он использовался, в частности, в [8, 9]. Более полный обзор по данной проблеме можно найти в [10, 11]. На основе указанных исследований неопределенности классической теории в целом снимались. За исключением узких областей в пограничном слое, можно было рассчитать степень нарастания возмущения любой физической величины в зависимости от y. Устанавливалось полное соответствие между амплитудами возмущений в разных сечениях через полученное амплитудное уравнение.

В настоящее время принято излагать суть этого метода следующим образом. В рассмотрение вводятся две продольные координаты: x и $X = \varepsilon x$, первая из которых характеризует в основном изменение комплексной фазы $\Phi(x, z, t)$, а вторая — основное течение и частично амплитуду и параметры волны возмущения. Поэтому решение, описывающее возмущение, ищется в виде

$$\vec{\psi} = e^{i\phi}\left(C(x)\vec{F}_0\left(y, X\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_1^i \vec{F}_i\left(y, X\right)\right). \tag{1}$$

Как и в теории локально-параллельного течения, $\Phi_t = -\omega$, $\Phi_z = \beta$ — фиксируемые постоянные, а величина $\Phi_x = \alpha(X)$ — медленно меняющаяся функция x. Последняя величина и $\vec{F}_0(y, X)$ находятся по классической теории устойчивости локально-параллельных течений и соответствуют нулевому приближению. Значение X входит как параметр. Логарифмическая производная $\dfrac{1}{C}\dfrac{dC}{dx}$ определяется из условия разрешимости первого приближения. Так как в нулевом приближении существует целый набор собственных значений $\alpha^k(X)$ и соответствующих функций $\vec{F}_0^k(X)$, указанная схема позволяет уточнить все нулевые приближения независимо друг от друга. Как показано в [12], это возможно при условии, если спектр задачи нулевого приближения простой и отсутствует пересечение спектральных значений α^i и α^j при изменении X. При этих условиях погрешность двух первых приближений составляет величину порядка $\varepsilon^2 \approx 1/\mathrm{Re}_x$. Учитывая, что погрешность основного течения в пограничном слое имеет тот же порядок, дополнительные приближения для возмущений в этом случае рассматривать нецелесообразно.

При пересечении спектральных значений построение решения указанным методом усложняется и в настоящее время никем не осуществлено. Частично эта проблема рассматривается в [12].

ПАРАБОЛИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

В последние годы широкое распространение получил метод, основанный на параболизованных уравнениях устойчивости, по-видимому, впервые предложенный в [13]. Здесь, как и в методе многих масштабов, решение представляется в виде

$$\vec{\psi} = e^{i\varphi}\vec{F}(x,y)\ . \tag{2}$$

Как и в классической задаче устойчивости, чаще всего делается предположение, что $\varphi_t = \omega$ и $\varphi_z = \beta$ — фиксированные реальные величины, а величины $a(x) = \varphi_x$ и $\vec{F}$ — медленно меняющиеся функции продольной координаты x. На этом основании вторыми производными от них и произведениями первых производных по x пренебрегают. Полученные уравнения для $\vec{F}$ в результате такого приближения называют параболизованными. Эти уравнения решаются маршевым методом в направлении основного потока. При этом кроме $\vec{F}$ при наложении специальных ограничений на $\vec{F}\ (x,\ y)$ определяется дополнительная неизвестная величина $a(x)$. Основным ограничением здесь является условие слабого изменения F от x. В работе [14] это достигается путем требования постоянства максимального значения амплитуды возмущения продольной скорости внутри слоя. Там же рассмотрены и другие аналогичные ограничения. В силу того, что окончательные результаты мало отличаются от принятого ограничения, их преимущества друг перед другом здесь не обсуждаются. Ввиду того, что погрешность ПУУ связана, в первую очередь, с пренебрежением вторыми производными от $a(x)$ и $F(x,\ y)$, легко показать, что она имеет порядок ε^2 и сравнима с погрешностью метода многих масштабов в областях с простым спектром соответствующей классической задачи устойчивости.

Рассмотрим более подробно различие решения ПУУ и теории двухмасштабного разложения. С этой целью, следуя [14], запишем в операторной форме

$$B\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x} = A\vec{\psi}\ . \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), получим

$$B\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} = \left(A - aB\right)\vec{F}\ . \tag{4}$$

Одно из важных допущений ПУУ состоит в предположении, что $\vec{F}$ — медленно меняющаяся вектор-функция по x. Поэтому правые части (4) должны быть малы. Это возможно только при условии, что

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \varepsilon\vec{F}_1,\ \ a = \alpha_0 + \varepsilon a_1\ ,$$

где ε — малый параметр неоднородности потока по x, а $\vec{F}$ и α — собственный вектор и собственные значения, удовлетворяющие уравнению локально-параллельной теории: $\left(A - \alpha_0\ B\right)\vec{F}_0 = 0$. Не нарушая общности, перепишем уравнение (4) в виде

$$B\frac{\partial\vec{F}_1}{\partial x} = \left(A - \alpha_0\ B\right)\vec{F}_1 - \frac{B}{\varepsilon}\frac{\partial\vec{F}_0}{\partial x} - \alpha_1\ B\vec{F}_0 - \varepsilon\,\alpha\ B\vec{F}_1\ . \tag{5}$$

Напомним, что в теории многомасштабного разложения $\vec{F}$ и a ищутся в виде

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \bar{\vec{F}}_i , a = \alpha_0 + \sum_i \varepsilon^i \bar{\alpha}_i \ .$$

При этом поправки $\bar{\vec{F}}$ и $\bar{\alpha}_1$ удовлетворяют уравнению

$$\left(A - \alpha_0 B\right)\bar{\vec{F}}_1 - \frac{B}{\varepsilon}\frac{\partial \vec{F}_0}{\partial x} - \bar{\alpha}_1 B \vec{F}_0 = 0 \ . \quad (6)$$

Сопоставляя (5) и (6) и учитывая, что $\bar{F}_1$, как и $\vec{F}$, медленно меняются по x, а производная $\dfrac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} \sim \varepsilon$, замечаем близость функций $\vec{F}_1$ и $\bar{\vec{F}}_1$ и величин α_1 и $\bar{\alpha}_1$. Соответствующие различия имеют порядок ε. Отличие же решения ПУУ и двух приближений метода многомасштабного разложения составляет величину порядка $\varepsilon^2 = 1/\mathrm{Re}_x$. Таким образом, разница решений не превышает ошибку стационарного пограничного слоя по отношению к полным уравнениям Навье — Стокса. Поэтому гарантированная точность двух методов одинакова. Полное соответствие двух методов установлено в [14].

Некоторые преимущества ПУУ могут иметь место в областях пересечения спектров соответствующей задачи на собственные значения, так как при интегрировании ПУУ спектральная задача не используется и процедура интегрирования не зависит от области, в которой ведется интегрирование маршевым методом. Ниже, однако, будет показано, что при интегрировании на протяженных участках желательно, а возможно и необходимо, знать спектр соответствующей задачи и при построении решения на основе ПУУ.

Кажущаяся простота решения задачи о развитии возмущений на основе ПУУ не соответствует действительности. Хорошо известно [14], что с уменьшением шага интегрирования по x решения начинают сильно осциллировать. Причина этого кроется в плохой обусловленности задачи Коши для этих уравнений. Для специалистов по теории гидродинамической неустойчивости плохая обусловленность задачи Коши может быть объяснена следующим образом. Согласно [15], ПУУ могут применяться к течениям, обладающим только конвективной неустойчивостью. Однако наряду с конвективной неустойчивостью для сверхзвукового пограничного слоя в [16] была установлена абсолютная неустойчивость, а в [17, 18] теоретически и экспериментально обнаружены возмущения, распространяющиеся вверх по потоку с сильным затуханием. Заметим, что понятия о направлении распространения возмущений и характере неустойчивости устанавливается при пространственно-временном рассмотрении. Исключая время, как это сделано при выводе ПУУ, понятие скорости распространения возмущения теряется. Поэтому можно говорить только о решениях, нарастающих и затухающих вниз по потоку. Распространяющимся вверх по течению возмущениям с сильным затуханием соответствуют решения, быстро нарастающие по x. Исследования по устойчивости показали, что распространяющимся вниз по течению возмущениям могут соответствовать как затухающие, так и слабо нарастающие решения по продольной координате (волны Толлмина — Шлихтинга) При интегрировании ПУУ маршевым методом без специальных ограничений при любых начальных данных за счет вычислительных ошибок решение будет притягиваться не к решению, соответствующему конвективной неустойчивости, а к решению, обеспечивающему наиболее быстрое нарастание по x.

Для случая пограничных слоев эти решения, по-видимому, будут соответствовать возмущениям, распространяющимся вверх по течению с затуханием.

По-видимому, последнее является главной причиной того, что с увеличением числа Рейнольдса и области интегрирования по x наблюдаются осцилляции решения. Увеличение шага интегрирования приводит к более гладким решениям. Это можно объяснить тем, что для коротковолновых возмущений, какими являются возмущения, распространяющиеся с сильным затуханием вверх по течению, требуется малый шаг интегрирования. При увеличении шага интегрирования подавляются мелкомасштабные возмущения, которые оказываются за пределами разрешения, в то время как крупномасштабные определяются достаточно точно. Другой путь частичного исключения возмущений, распространяющихся вверх по течению, состоит в пренебрежении продольным градиентом амплитуды давления в ПУУ, ответственным за передачу возмущений навстречу основному потоку. Для сверхзвукового пограничного слоя распространение возмущений вверх по потоку осуществляется в областях дозвукового течения. Обе процедуры подавления осцилляций применялись в [19]. Но как в первом, так и во втором случае устойчивость счета нарушалась при достаточно малых шагах интегрирования по x.

Заметим, кроме того, что пренебрежение градиентом амплитуды давления по x оправдано, возможно, для длинноволновых возмущений, когда она слабо изменяется по нормали к поверхности, а поэтому отсутствует ее деформация по x. Для коротких волн (например, вторая мода в теории устойчивости сверхзвукового пограничного слоя) амплитуда возмущения давления сильно зависит от нормальной координаты. Ее распределение, кроме того, будет зависеть, как и распределение других амплитуд, от x параметрически. В этом случае процедура пренебрежения деформацией амплитуды возмущений давления будет приводить к ошибкам порядка ε, что, в свою очередь, приводит к бессмысленности использования ПУУ.

На основании сопоставления двух методов исследования развития возмущений в пограничном слое отмечаем, что точности их решений одинаковы. Используемые в настоящее время процедуры решения ПУУ плохо поддаются контролю, особенно в части точности результатов. В этом отношении представляется более надежным метод малого параметра в совокупности с двухмасштабным разложением продольной координаты.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

В тех случаях, когда предпочтение отдается ПУУ, можно рекомендовать регуляризацию их решения с использованием метода двухмасштабного разложения продольной координаты — слабонепараллельной теории. В силу того, что гарантированная точность ПУУ не превышает точности слабонепараллельной теории, можно воспользоваться следующими соображениями. Умножая (5) на ε и прибавив справа член $\left(A-\alpha_0 B\right)\vec{F}_0$, равный нулю, можно получить следующее соотношение:

$$(A-\alpha_0 B)\vec{F} - B\frac{\partial \vec{F}_0}{\partial x} - \Delta\alpha B\vec{F}_0 = \varepsilon B\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \alpha_1 B_1 \vec{F}_1 = O\left(\varepsilon^2\right). \qquad (7)$$

Здесь $\vec{F}$ — решение ПУУ, $\Delta\alpha = a-\alpha_0, \alpha_0, \vec{F}_0$ — собственное значение и собственная функция теории устойчивости локально-однородного по x течения. Поэтому в любом сечении по x должно выполняться неравенство

$$\left\| \left(A-\alpha_0 B\right)\vec{F} - B\frac{\partial \vec{F}_0}{\partial x} - \Delta\alpha\, B\vec{F}_0 \right\| < \delta\,, \qquad (8)$$

где $\varepsilon^2 < \delta < \varepsilon$.

По мере того, как в процессе интегрирования ПУУ неравенство (8) нач и-нает нарушаться в некотором сечении x_n, решение ПУУ заменяется решением, полученным на основе теории двухмасштабного разложения, а величина a — на $\alpha_0 + \frac{1}{C}\frac{dC}{dx}$, где логарифмическая производная от амплитуды собственной функции получена также по слабонепараллельной теории. Практика расчетов показывает, что нерегулярности решений наблюдаются при интегрировании с малым шагом. Использование больших шагов интегрирования уменьшает степень нерегулярности, но ставит под сомнение точность расчетов. В этом случае соотношение (8) можно использовать в качестве контроля и шага и н-тегрирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант № 96-01-01580) и МНТЦ (№ 128).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Линь И.Ц.** Теория гидродинамической устойчивости. — М.: Иностр. лит., 1958.
2. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.
3. **Rist U., Fasel U.F.** Direct numerical simulation of controlled transition in a flat-plate boundary layer // J. Fluid Mech. — 1995. — Vol. 298. — P. 211 – 248.
4. **Eisler W., Bestek H.** Numerical simulations of initial transition in Mach U. & boundary layer at wind-tunnel and flight conditions // Z. Flugwiss. Weltvorumforsch. — 1995. — Vol. 19. — P. 228 – 235.
5. **Bouthier M.** Stability lineaire des econlements presque paralleles // J. Mec. — 1972. — Vol. 11. — P. 599 – 621.
6. **Gasfer M.** On the effects of boundary layer growth on flow stability // J. Fluid Mech. — 1974. — Vol. 66. — P. 465 – 490.
7. **Saric W.S., Nayfeh A.H.** Nonparallel stability of boundary layer pressure gradients and suction // Laminar-Turbulent Transition. — 1977. — AGARD CP-224, hh b/1-21.
8. **El-Hady N.M., Naufeh A.N.** Nonparallel stability of two-dimensional heated boundary layer flows // Proc. Twelf Simp. on Naval Hydrodynamics. — Washington, D.C., 1978.
9. **Гапонов С.А.** Влияние непараллельности течения на развитие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 2. — С. 28 – 31.
10. **Гапонов С.А., Маслов А.А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках. — Новосибирск: Наука, 1980. — 144 с.
11. **Жигулев В.Н., Тумин А.М.** Возникновение турбулентности. — Новосибирск: Наука, 1987.
12. **Гапонов С.А.** О математическом моделировании развития возмущений в пристенных течениях сжимаемого газа // Сиб. физ.-техн. журн. (Изв. СО РАН). — 1993. — № 4.
13. **Herbert T.H., Bertolotti F.P.** Stability analysis of nonparallel boundary layers // Bull. Amer. Phys. Soc. — 1987. — Vol. 32. — P. 20 – 79.
14. **Hanifi A., Henningson D., Hein S., Bertolotti F.P., Simen M.** Linear non-local analysis (the linear NOLOT code). — DLR-IB 223-94 A 43. — Goettingen, 1994.
15. **Bertolotti F.P., Herbert T.H., Spalart P.R.** Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer // J. Fluid. Mech. — 1992. — Vol. 242. — P. 441 – 474.
16. **Petrov G.V.** Stability of thin viscous shock layer on a wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-Turbulent Transition / Ed. V.V. Kozlov. — Berlin et al.: Springer-Verlag. — 1995. — P. 487 – 494.
17. **Гапонов С.А.** О развитии возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. — 1981. — № 6. — С. 98 – 101.
18. **Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.Б.** Экспериментальные исследования нелинейного развития волн неустойчивости на плоской пластине при числе Маха M = 3 // ПМТФ. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 107 – 114.
19. **Li F., Malik M.R.** Mathematical nature of parabolized stability equations. In Laminar-Turbulent Transition / Ed. R. Kobayashi. — Berlin et al.: Springer-Verlag, 1995. — P. 205 – 212.

Статья поступила в редакцию 25 ноября 1997 г.