УДК 519.3; 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ГЮНТЕРА НА ЛИПШИЦЕВЫ ОБЛАСТИ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ В ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ УПРУГИХ ВОЛН

А. Бендали[*,**], С. Тордье[***], Ю. М. Волчков[****,*****]

[*] Университет г. Тулузы, Тулуза, Франция
[**] Институт математики г. Тулузы, Тулуза, Франция
[***] Университет г. По, По, Франция
[****] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
[*****] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: abendali@insa-toulouse.fr, sebastien.tordeux@inria.fr, volk@hydro.nsc.ru

Предложенная ранее для областей класса $\mathcal{C}^2$ регуляризация следов и операторов напряжений потенциалов упругих волн обобщается на случай липшицевых областей. В частности, это обобщение позволяет достаточно легко получить свойства отображений потенциалов упругих волн из свойств отображений потенциалов скалярного уравнения Гельмгольца, не используя общую теорию систем эллиптических уравнений для липшицевых областей. Скалярные производные Гюнтера функции, определенной на границе трехмерной области, выражаются через компоненты повернутого поверхностного градиента $\nabla_{\partial\Omega} u \times \boldsymbol{n}$ этой функции в каноническом базисе пространства, содержащего эту область. Установлено, что эти производные определяют на границе липшицевой области ограниченные операторы, действующие из H^s в H^{s-1} $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, которые можно использовать в численных алгоритмах метода граничных элементов. Дается представление оператора Гюнтера и потенциалов простого и двойного слоев упругих волн в двумерном случае.

Ключевые слова: граничные интегральные операторы, производные Гюнтера, упругие волны, поверхностные потенциалы, липшицевы области.

DOI: 10.15372/PMTF20200115

Введение. В данной работе через Ω^+ и $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$ обозначаются соответственно ограниченная липшицева область в пространстве $\mathbb{R}^3$ и ее внешность. Следовательно, Ω^+ и Ω^- имеют общую границу, которая обозначается через $\partial\Omega$. Поверхность $\partial\Omega$ имеет лебегову меру s и единичную нормаль $\boldsymbol{n}$ (рис. 1), определенную почти всюду по мере s и направленную во внешность области Ω^+ [1. P. 96]. Скалярное произведение двух вектор-столбцов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с тремя компонентами a_j и b_j, $j = 1, 2, 3$ (вещественными или комплексными) определяется квадратичной формой

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\text{т}} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\text{т}} \boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j,$$

где $\boldsymbol{a}^{\text{т}}$ — вектор, транспонированный к вектору $\boldsymbol{a}$.

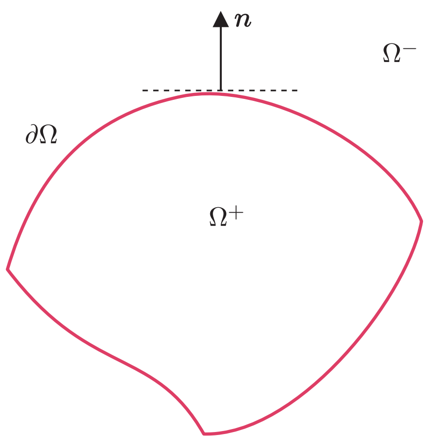

Рис. 1. Геометрия рассматриваемой области

Далее общепринятые обозначения, используемые в теории дифференциальных уравнений в частных производных [2], не поясняются. В данной работе используются пространства Фреше

$$H^m_{loc}(\mathbb{R}^3) = \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3); \quad \varphi v \in H^m(\mathbb{R}^3) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\},$$

$$H^m_{loc}(\overline{\Omega^-}) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega^-); \quad \exists V \in H^m_{loc}(\mathbb{R}^3), \ v = V|_{\Omega^-}\},$$

$$H^m_{comp}(\mathbb{R}^3) = \{v \in H^m(\mathbb{R}^3); \quad \exists R > 0, \ v|_{|x| \geqslant R} = 0\},$$

$$H^m_{comp}(\overline{\Omega^-}) = \{v \in H^m(\Omega^-); \quad \exists V \in H^m_{comp}(\mathbb{R}^3), \ v = V|_{\Omega^-}\},$$

определенные для любого целого n.

Поскольку область Ω^+ ограничена, пространства $H^m_{loc}(\overline{\Omega^+})$ и $H^m_{comp}(\overline{\Omega^+})$ совпадают с пространством $H^m(\Omega^+)$. Для пространства H^0 используется общепринятое обозначение L^2.

Обозначим через $u^+ = (u|_{\Omega^+})|_{\partial\Omega}$ $(u^- = (u|_{\Omega^-})|_{\partial\Omega})$ след на границе $\partial\Omega$ сужения функции u на Ω^+ (Ω^-). Далее для функции с нулевым скачком при переходе через границу $(u^+ = u^-)$ термин “след” не используется. Для обозначения функциональных пространств векторов, компоненты которых принадлежат некоторому скалярному функциональному пространству, используются общепринятые обозначения (например, $H^s(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ обозначает пространство векторов $\boldsymbol{u}$, компоненты которых u_j $(j = 1, 2, 3)$ принадлежат пространству $H^s(\partial\Omega)$).

Для $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$ и $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ производная Гюнтера

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij} u = n_j \, \partial_{x_i} u - n_i \, \partial_{x_j} u \tag{1}$$

принадлежит пространству $L^2(\partial\Omega)$, так как следы частных производных $\partial_{x_i} u$ и $\partial_{x_j} u$ принадлежат $H^{1/2}(\partial\Omega)$, а компоненты n_i и n_j вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности $\partial\Omega$ принадлежат $L^\infty(\partial\Omega)$. Напомним, что если область Ω^+ достаточно регулярна, например является $\mathcal{C}^{1,1}$-областью, то производная $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij} u$ принадлежит пространству $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Иными словами, если регулярность области только липшицева, происходит потеря гладкости $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij} u$ на $1/2$ порядка.

Приведем известные свойства производных Гюнтера для областей Ω^+, гладкость которых не ниже класса $\mathcal{C}^{1,1}$. Пусть

$$\{\boldsymbol{e}_j = [\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j}]^{\mathrm{T}}\}_{j=1}^3 \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \ \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j) \text{ —}$$

канонический базис в $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, $n_j = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_j$, $j = 1, 2, 3$. Определим для $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, $i \neq j$

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = n_j \boldsymbol{e}_i - n_i \boldsymbol{e}_j. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u = \nabla u \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} = \partial_{\boldsymbol{\tau}_{ij}} u,$$

где

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}$ являются тангенциальными производными на $\partial\Omega$ и, следовательно, могут быть вычислены, по крайней мере для функций $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ и областей Ω^+ класса $\mathcal{C}^1$, без использования значений функции u в Ω^+ или Ω^-. Эти производные введены Н. М. Гюнтером [3]. В работе [4] показано, что они могут быть использованы для установления связи между граничными потенциалами системы уравнений Ламе и уравнения Лапласа (см. [4. P. 314; 5. P. 48]). В работах [5. P. 49; 6] производные Гюнтера использованы для записи оператора напряжений, соответствующего потенциалу двойного упругого слоя. В [7] эти производные использованы при исследовании поверхностных потенциалов уравнения распространения упругих волн. Во всех перечисленных выше работах предполагалось, что область Ω^+ принадлежит классу $\mathcal{C}^2$ (в действительности достаточно принадлежности классу $\mathcal{C}^{1,1}$).

Целью данной работы является определение производной Гюнтера для липшицевых областей, т. е. для областей класса $\mathcal{C}^{0,1}$. Это позволит обобщить полученные ранее результаты на области с часто встречающейся в прикладных задачах геометрией. Более того, определенные таким образом производные Гюнтера можно использовать для аппроксимации применяемых в методе граничных конечных элементов операторов напряжения, соответствующих потенциалу простого слоя и потенциалу двойного слоя системы уравнений Ламе и системы волновых уравнений теории упругости.

В потенциалах теории упругости производные Гюнтера содержатся в виде компонент $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ кососимметричной матрицы $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$, действующей на векторфункцию $\boldsymbol{u}$:

$$(\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{u})_i = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где $(\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{u})_i$ и u_j $(j = 1, 2, 3)$ — компоненты векторов $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}$ соответственно. В [5] эта матрица называется производными Гюнтера в матричной форме. В данной работе будем называть $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{u}$ матрицей производных Гюнтера.

Матрица производных Гюнтера порождает различные операторы, имеющие различные представления. Использование этих операторов позволило развить теорию поверхностных потенциалов уравнений Ламе в статических задачах теории упругости [4–7], а также разработать алгоритмы предобусловливания в методе граничных элементов решения задач рассеивания упругих волн [8]. В ряде работ оператор $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ используется без упоминания производных Гюнтера [9, 10]. Во всех указанных выше представлениях производных Гюнтера используются либо значения функции внутри области, как, например, в определении (1), либо кривизна поверхности $\partial\Omega$. Это затрудняет применение такого рода представлений производных Гюнтера в методе конечных граничных элементов или их использование при определении числа обусловленности матрицы в численных алгоритмах.

В п. **1** данной работы показано, что величины $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}u$ являются компонентами повернутого поверхностного градиента $\nabla_{\partial\Omega}u \times \boldsymbol{n}$ функции u в ортонормированном базисе пространства, в которое погружена рассматриваемая область. Это свойство в совокупности с некоторыми свойствами двойственности позволяет определить данные производные как ограниченные операторы, действующие из $H^s(\partial\Omega)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega)$ для $0 \leqslant s \leqslant 1$. Это утверждение эквивалентно утверждению, что $u \to \nabla_{\partial\Omega}u \times \boldsymbol{n}$ является ограниченным оператором, действующим из $H^s(\partial\Omega)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ для $0 \leqslant s \leqslant 1$ (данный результат получен другим методом для $s = 1/2$ в работе [11]). Из последнего утверждения следует, что сопряженный указанному выше оператор, сопоставляющий поверхностный ротор $\nabla_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$ векторному полю $\boldsymbol{u}$ [12. P. 73], также определяет ограниченный оператор, действующий из $H^s(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega)$ для $0 \leqslant s \leqslant 1$. Следует отметить, что в [12. P. 73] поверхностный ротор рассматривался только для касательных векторных полей. Однако, поскольку в его определении содержится векторное произведение, этот оператор можно обобщить на случай произвольного векторного поля.

Далее в работе показано, что производные Гюнтера $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}$ можно представить в виде дифференциальных форм и получить для этих операторов формулу интегрирования по частям на участке $\partial\Omega$. Эта формула получена прямым вычислением в работе [3]. Однако формализм дифференциальных форм позволяет понять основные принципы, используемые при получении этой формулы. Также формализм дифференциальных форм применяется в данной работе для получения явных выражений для производных Гюнтера кусочно-гладкой функции, определенной на границе криволинейного многогранника, что позволяет использовать их в алгоритмах метода граничных элементов.

В п. **2** приводятся различные известные представления матрицы производных Гюнтера $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$. С использованием векторной формулы Грина, введенной для частного случая в [13] и в более общей форме в [9, 10], получено вариационное выражение матрицы производных $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ через объемные интегралы.

В п. **3** дается обобщение на случай липшицевых областей метода регуляризации (способа сведения интегралов с сингулярными ядрами, содержащихся в поверхностных потенциалах, к интегралам, сходящимся в обычном смысле), предложенного в [7] для случая поверхностных потенциалов упругих волн. Следует отметить, что для численного решения задач о рассеивании упругих волн были предложены и другие, значительно более сложные способы регуляризации сингулярных интегралов (см., например, [14–19]).

Наконец, в п. **4** с использованием связи между двумерными и трехмерными ядрами Грина уравнения Гельмгольца методы регуляризации, применяемые при исследовании трехмерных задач, обобщаются на случай задач о распространении плоских упругих волн.

1. Обобщение производных Гюнтера на случай липшицевых областей. Ниже устанавливаются некоторые свойства оператора производных Гюнтера для липшицевых областей. Далее показано, что с использованием оператора звезды Ходжа производные Гюнтера можно представить в виде дифференциальной 2-формы. Это позволяет получить формулу интегрирования по частям на участке $\partial\Omega$. Также получено представление производных Гюнтера, которое можно использовать в алгоритмах граничных элементов (в программных комплексах, использующих метод граничных элементов).

1.1. *Свойства оператора производных Гюнтера для липшицевых областей.* В силу равенства (3) и в соответствии с определением, приведенным в работе [1. P. 147], оператор $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}$ является касательным (тангенциальным) дифференциальным оператором первого порядка на $\partial\Omega$. Отсюда следует первое свойство оператора производных Гюнтера, доказательство которого содержится в лемме 4.23 в [1].

Предложение 1. *Для любой функции* $u \in H^1(\partial\Omega)$ *выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^1(\partial\Omega)}, \tag{4}$$

причем константа C *не зависит от функции* u.

Заметим, что вектор $\boldsymbol{\tau}_{ij}$, определенный в соотношении (2), с использованием двойного векторного произведения можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 3).$$

Тогда производная Гюнтера $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u$ представляется в виде

$$\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u = \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j). \tag{5}$$

Действительно, из элементарных свойств скалярного тройного произведения следует, что в формуле (5) $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u$ представляется в качестве компоненты (или компоненты с противоположным знаком) поверхностного ротора u в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})} u = \nabla_{\partial\Omega} u \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \tag{6}$$

(см., например, определение и свойства поверхностного градиента $\nabla_{\partial\Omega} u$ и поверхностного ротора функции в случае, когда Ω^+ принадлежит классу $\mathcal{C}^2$ [13. P. 69]).

Замечание 1. Формула (6) получена в работе [4] (формула (1.12) в гл. 5), в которой производная Гюнтера представлена через компоненты поверхностного градиента $\nabla_{\partial\Omega} u$, компоненты вектора единичной нормали $\boldsymbol{n}$ и символы Леви-Чивиты ε_{ijk}:

$$\mathcal{M}_{jk}^{(\boldsymbol{n})} u = -\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_{s_i} u, \tag{7}$$

где

$$\partial_{s_k} u = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} n_i (\nabla_{\partial\Omega} u)_j.$$

Поскольку

$$\partial_{s_i} u = (\boldsymbol{n} \times \nabla_{\partial\Omega} u)_i,$$

с учетом равенства

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{8}$$

формулу (7) можно записать в виде

$$\mathcal{M}_{jk}^{(\boldsymbol{n})} u = \sum_{i=1}^{3} (\nabla_{\partial\Omega} u \times \boldsymbol{n})_i\, \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k.$$

Из последнего равенства следует формула (6). Заметим, что компактная формула (5) и формула (6), в которой производная Гюнтера $\mathcal{M}_{jk}^{(\boldsymbol{n})} u$ выражается через компоненты вектора $\nabla_{\partial\Omega} u \times \boldsymbol{n}$, в явном виде не были приведены ни в [4], ни в других работах. Однако это не только различные записи одной и той же формулы, как следует из доказательства приведенной ниже леммы.

Справедлива следующая лемма, доказанная в [3] только для областей класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha \leqslant 1$) более сложным способом.

Лемма 1. *Для функций $u, v \in \mathcal{C}^1_{comp}(\mathbb{R}^3)$ справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_{\partial\Omega} v\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}u\,ds = \int\limits_{\partial\Omega} u\mathcal{M}_{ji}^{(\boldsymbol{n})}v\,ds. \tag{9}$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из равенства

$$\nabla\times(uv\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j) = v\nabla\times(u\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j) - u\nabla\times(v\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_i)$$

и формулы Грина, справедливой для липшицевых областей (см. теорему 3.34 в [1]):

$$\int\limits_{\Omega^\pm} \nabla\cdot\nabla\times(uv\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)\,dx = \pm\int\limits_{\partial\Omega}(\nabla\times(uv\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j))\cdot\boldsymbol{n}\,ds =$$

$$= \mp\Big(\int\limits_{\partial\Omega} v\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}u\,ds - \int\limits_{\partial\Omega} u\mathcal{M}_{ji}^{(\boldsymbol{n})}v\,ds\Big),$$

$$\nabla\cdot\nabla\times(uv\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j) = 0.$$

Докажем теорему, выражающую оптимальные свойства отображения оператора производных Гюнтера.

Теорема 1. *Пусть Ω^+ — ограниченная липшицева область. Тогда продолжение производной Гюнтера $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}$ на пространство $H^s(\partial\Omega)$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$, является ограниченным линейным оператором, действующим из $H^s(\partial\Omega)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega)$.*

Доказательство. При $s = 1$ утверждение теоремы непосредственно следует из оценки (4). В силу свойства симметрии (9) и принципа двойственности это утверждение также верно при $s = 0$. Методом интерполяции утверждение теоремы обобщается на случай $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Следствие 1. *Из теоремы 1 следует, что тангенциальный вектор поворота является ограниченным линейным оператором $u \to \nabla_{\partial\Omega}u\times\boldsymbol{n}$, действующим из $H^s(\partial\Omega)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ для $0 \leqslant s \leqslant 1$. Следовательно, оператор $\boldsymbol{u} \to \nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}$ также является ограниченным оператором, действующим из $H^s(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega)$ для $0 \leqslant s \leqslant 1$.*

Доказательство. Действительно, компоненты вектора $\nabla_{\partial\Omega}u\times\boldsymbol{n}$ являются не чем иным, как производными Гюнтера, а $\boldsymbol{u} \to \nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}$ — оператор, сопряженный с оператором $u \to \nabla_{\partial\Omega}u\times\boldsymbol{n}$.

Замечание 2. В [11. P. 855] установлено, что если u — функция, принадлежащая $H^1(\mathbb{R}^3)$, то: 1) вектор $\nabla u\times\boldsymbol{n}$ хорошо определен на пространстве $H_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$, двойственном пространству

$$H_\parallel^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) = \{\boldsymbol{v}\in L^2(\partial\Omega;\mathbb{C}^3);\quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{w}\in H^1(\Omega^\pm;\mathbb{C}^3)\};$$

2) вектор $\nabla u\times\boldsymbol{n}$ зависит только от следа $u|_{\partial\Omega}$ функции u на $\partial\Omega$. Также в [11. P. 850–851] доказано, что пространство $H_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ может быть отождествлено с замкнутым подпространством $H^{-1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ (частный случай следствия 1 при $s = 1/2$).

Свойство симметрии для гладких областей и достаточно регулярных функций ($u \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $s > 1$) известно достаточно давно [4. P. 284] и является непосредственным следствием определения матрицы производных Гюнтера, а также свойства симметрии и свойств отображения оператора $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}$.

Следствие 2. *Матрица производных Гюнтера* $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ *определяет ограниченный линейный оператор, действующий из* $H^s(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ *в* $H^{s-1}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ *для* $0 \leqslant s \leqslant 1$, *со следующим свойством симметрии:*

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}\rangle_{1-s,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{u}, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{v}\rangle_{s,\partial\Omega}, \qquad \boldsymbol{u} \in H^s(\partial\Omega;\mathbb{C}^3), \quad \boldsymbol{v} \in H^{1-s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3). \tag{10}$$

Ниже как для билинейной формы, определенной на произведении сопряженных пространств $H^s(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ *и* $H^{-s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$, *так и для билинейной формы, определенной на* $H^s(\partial\Omega) \times H^{-s}(\partial\Omega)$, *используется обозначение*

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{l}\rangle_{s,\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \langle v_i, l_i\rangle_{s,\partial\Omega}, \qquad \boldsymbol{v} \in H^s(\partial\Omega;\mathbb{C}^3), \quad \boldsymbol{l} \in H^{-s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3).$$

Замечание 3. Двойственное произведение $H^s(\partial\Omega)$ и $H^{-s}(\partial\Omega)$ обычно обозначается через $\langle l, v\rangle_{s,\partial\Omega}$ для $l \in H^{-s}(\partial\Omega)$ и $v \in H^s(\partial\Omega)$. Такое обозначение удобно использовать при исследовании потенциала простого слоя в теории распространения упругих волн, которое проводится ниже.

1.2. *Явные выражения для производных Гюнтера.* Ранее производная Гюнтера была определена в смысле распределений: $\mathcal{M}_{ij}^{(\boldsymbol{n})}u \in H^{s-1}(\partial\Omega)$ для $u \in H^s(\partial\Omega)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. При решении прикладных задач в качестве границы области $\partial\Omega$ часто требуется рассматривать криволинейный многогранник. Такая поверхность возникает после аппроксимации $\partial\Omega$ поверхностью, состоящей из криволинейных граней и ребер, а также из вершин (см. [20. P. 15]). Это означает, что граница $\partial\Omega$ может быть покрыта непересекающейся декомпозицией $\mathcal{T}$:

$$\partial\Omega = \cup_{\omega\in\mathcal{T}}\overline{\omega}$$

($\mathcal{T}$ — конечное множество открытых областей $\omega \subset \partial\Omega$, такое что для всех $\omega, \upsilon \in \mathcal{T}$, $\omega \cap \upsilon = \emptyset$, если $\omega \neq \upsilon$). Предполагается, что каждый элемент ω представляет собой “полигональную поверхность” в том смысле, что $\overline{\omega} \subset U_\omega$ (U_ω — открытая $\mathcal{C}^\infty$-параметризуемая поверхность в $\mathbb{R}^3$), ее граница $\partial\omega$ является кусочно-гладкой кривой, ω — липшицева область в U_ω. Липшицева область на гладком многообразии определяется так же, как и липшицева область в $\mathbb{R}^N$ с заменой “жестких перемещений” (см. определение 3.28 в [1]) на локальные $\mathcal{C}^\infty$-диффеоморфизмы в области, лежащие в $\mathbb{R}^2$. Напомним, что Ω^+ является глобально липшицевой областью. Это исключает наличие на $\partial\Omega$ остроконечных пиков. Примером такой поверхности является сетка, образующаяся при триангуляции поверхности класса $\mathbb{R}^3$. На рис. 2 показана поверхностная триангуляция $C^{1,1}$-области. Область и поверхностная сетка построены в программе *Gmsh* [21]. Для точной поверхности ω и U_ω описываются в локальных системах координат (локальных картах) (см., например, [22]). На аппроксимированной поверхности ω является треугольником в $\mathbb{R}^3$, а U_ω — плоскостью, в которой лежит этот треугольник.

Граничные конечные элементы обычно образуют подпространства следующего пространства:

$$\mathcal{P}_{m,\mathcal{T}}(\partial\Omega) = \{u \in L^\infty(\partial\Omega); \quad u|_\omega \circ \Phi_\omega \in \mathbb{P}_m^{(2)} \ \forall\omega \in \mathcal{T}\},$$

где Φ_ω: $D_\omega \subset \mathbb{R}^2 \to U_\omega$ — локальная система координат на U_ω (см., например, [22. P. 111]); $\mathbb{P}_m^{(2)}$ — пространство полиномов степени не больше m от двух переменных с комплексными коэффициентами. Такие пространства содержатся в $H^s(\partial\Omega)$ для $1/2 \leqslant s \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда они содержатся в

$$\mathcal{C}_\mathcal{T}(\partial\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega); \quad u|_\omega \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega}) \ \forall\omega \in \mathcal{T}\}$$

(см., например, [23] для случая $\partial\Omega = \mathbb{R}^2$).

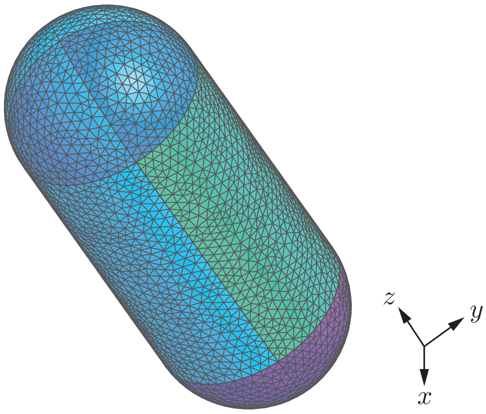

Рис. 2. Область в форме многогранника, полученная с помощью поверхностной триангуляции $C^{1,1}$-области

Если $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega)$, то можно определить $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij,\mathcal{T}}u$ почти всюду на $\partial\Omega$:

$$(\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij,\mathcal{T}}u)|_\omega = \nabla_\omega u|_\omega \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \quad \forall \omega \in \mathcal{T}$$

(∇_ω — тангенциальный градиент на ω; $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали на ω, направленный во внешность Ω^+). Покажем, что

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij}u = \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij,\mathcal{T}}u \quad \forall u \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega). \tag{11}$$

Чтобы установить это тождество, необходимо использовать несколько утверждений.

Во-первых, $u|_\omega$ является следом некоторой функции u_ω, принадлежащей классу $\mathcal{C}^\infty$ в $\mathbb{R}^3$-окрестности U_ω. Тогда верно следующее равенство:

$$\nabla_\omega u|_\omega \times \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = (\nabla u_\omega)|_\omega \times \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \times (\nabla u_\omega)|_\omega \cdot \boldsymbol{n}.$$

Используя (8), каноническое отождествление векторных полей с 1-формами на $\mathbb{R}^3$ и оператор звезды Ходжа на $\mathbb{R}^3$, можно записать выражение для $(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \times (\nabla u_\omega)|_\omega$ в следующем виде:

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \times (\nabla u)|_\omega = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} * (dx_k \wedge du_\omega)|_\omega = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} * (d(-u_\omega\, dx_k))|_\omega.$$

Отсюда следует формула, полученная в [3] покомпонентно, без использования формализма дифференциальных форм.

Лемма 2. *Для $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega})$ и $v \in \mathcal{C}^1_{comp}(\mathbb{R}^3)$ справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_\omega v\nabla_\omega u \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j\, ds = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \int_{\partial\omega} uv\, dx_k - \int_\omega u\nabla_\omega v \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j\, ds.$$

Ориентация $\partial\omega$ определяется направлением вектора $\boldsymbol{n}$.

Доказательство. Лемма следует из соотношений

$$\nabla_\omega uv = v\nabla_\omega u + u\nabla_\omega v,$$

$$\int_\omega \nabla_\omega uv \times \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j)\, ds = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \int_\omega *(d(-uv\, dx_k)) \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \int_\omega d(-uv\, dx_k)$$

и формулы Стокса.

Из приведенной ниже теоремы следует простой способ вычисления производных Гюнтера при использовании граничных конечных элементов.

Теорема 2. *Формула* (11) *верна для любой функции* $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega) \subset H^1(\partial\Omega)$. Тогда из свойства симметрии (10) следует, что для любых $u \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega)$ и $v \in \mathcal{C}^\infty_{comp}(\mathbb{R}^3)$ верно

$$\langle v, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij} u\rangle_{1-s,\partial\Omega} = \langle u, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ji} v\rangle_{s,\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} u\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ji,\mathcal{T}} v\, ds.$$

Интегрирование по частям приводит к равенству

$$\int\limits_{\partial\Omega} u\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ji,\mathcal{T}} v\, ds = -\sum_{\omega\in\mathcal{T}}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\int\limits_{\partial\omega} uv\, dx_k + \int\limits_{\partial\Omega} v\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij,\mathcal{T}} u\, ds.$$

Поскольку

$$\sum_{\omega\in\mathcal{T}}\int\limits_{\partial\omega} uv\, dx_k = 0$$

в силу противоположной ориентации на каждом криволинейном ребре неперекрывающейся декомпозиции $\mathcal{T}$ границы $\partial\Omega$, получаем

$$\langle v, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij} u\rangle_{1-s,\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} v\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij,\mathcal{T}} u\, ds.$$

Тогда формула (11) имеет место в силу плотности $\mathcal{C}^\infty_{comp}(\mathbb{R}^3)$ в $H^{1-s}(\partial\Omega)$.

Замечание 4. Плотность $\mathcal{C}^\infty_{comp}(\mathbb{R}^3)$ в $H^s(\partial\Omega)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ для липшицевой области Ω^+ доказывается так же, как доказывается плотность $\mathcal{C}^\infty_{comp}(\mathbb{R}^3)$ в $L^2(\partial\Omega)$ (см. теорему 4.9 в [24]).

2. Другие представления матрицы производных Гюнтера. Сначала рассмотрим существующие формы представления матрицы производных Гюнтера в том случае, когда область Ω^+ принадлежит классу $\mathcal{C}^{1,1}$, и выясним, можно ли эти представления обобщить на случай липшицевых областей. В частности, напомним вариационную форму записи $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ с помощью объемных интегралов, которая использовалась в других работах.

2.1. *Эквивалентные формы записи матрицы производных Гюнтера.* Сначала приведем компактное выражение для матрицы производных Гюнтера [7]

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3), \tag{12}$$

которое следует из формулы

$$\sum_{j=1}^{3}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{3}\partial_{x_i} u_j n_j - n_i\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j} u_j.$$

Напомним, что градиент $\nabla\boldsymbol{u}$ вектора $\boldsymbol{u}$ является матрицей, j-й столбец которой есть ∇u_j $(j = 1,2,3)$.

Вероятно, для того чтобы отметить, что выражение (12) зависит только от $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}$, в [7] используется запись градиента на $\partial\Omega$

$$\nabla u_j = \nabla_{\partial\Omega} u_j + \boldsymbol{n}\,\partial_{\boldsymbol{n}} u_j \quad (j = 1,2,3),$$

откуда следует

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\boldsymbol{n} - \operatorname{tr}\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}. \tag{13}$$

Здесь $\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}$ определяется аналогично $\nabla\boldsymbol{u}$; $\operatorname{tr}\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}$ — алгебраический след $\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}$. Заметим, что в формуле (13) в работе [7] вместо $\operatorname{tr}\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}$ используется $\nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{u}$. Действительно, выражение для $\operatorname{tr}\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}$ можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{tr}\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u} = \operatorname{tr}\nabla\boldsymbol{u} - \operatorname{tr}\boldsymbol{n}(\partial\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} = \nabla\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{n}\cdot\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}.$$

Так как

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}) + 2\mathcal{H}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\cdot\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u} \text{ на } \partial\Omega, \tag{14}$$

где $\nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{u}$ — поверхностная дивергенция $\boldsymbol{u}$ (см. [12. P. 72, 75]), то

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}(\nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}) + 2\mathcal{H}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}). \tag{15}$$

В (15) $2\mathcal{H} = \operatorname{tr}\mathcal{C}$ — средняя гауссова кривизна поверхности $\partial\Omega$, определенная как алгебраический след оператора гауссовой кривизны $\mathcal{C} = \nabla\boldsymbol{n}$. Формула (14) определена для областей, обладающих гладкостью, по крайнней мере, не ниже $\mathcal{C}^{1,1}$.

В отличие от выражения (10) выражения (13), (15) для матрицы $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ не дают представления о симметричности этого оператора. Заметим, что

$$\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n} = \sum_{j=1}^{3} n_j\nabla_{\partial\Omega}v_j = \sum_{j=1}^{3}\nabla_{\partial\Omega}(n_jv_j) - \sum_{j=1}^{3} v_j\nabla_{\partial\Omega}n_j.$$

Поскольку $\nabla_{\partial\Omega}n_j = \nabla n_j = \mathcal{C}_{*j}$ (j-й столбец матрицы $\mathcal{C}$) и $\mathcal{C}\boldsymbol{n} = 0$, можно записать

$$\nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n} = \nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \mathcal{C}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}),$$

что позволяет (по крайней мере, в том случае, когда Ω^+ является $\mathcal{C}^{1,1}$-областью и $\boldsymbol{u} \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$) представить матричную производную Гюнтера в виде

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \nabla_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n})) - 2\mathcal{H}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}, \tag{16}$$

откуда следует симметричность оператора. Однако, поскольку в выражение (16) в явном виде входят оператор кривизны $\mathcal{C}$ и средняя гауссова кривизна $2\mathcal{H}$, оно не имеет смысла для липшицевых областей.

Запишем выражение для матрицы производных Гюнтера, которое часто используется в статических задачах теории упругости для определения напряжений через поле перемещений, являющееся решением уравнений Ламе [4. P. 282]:

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{u} - \boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{17}$$

Покажем, каким образом формула (17) может быть получена из приведенного выше компактного представления матрицы производных Гюнтера $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$. Из формулы

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = (\nabla\boldsymbol{u} - \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{n} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

следует

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u} - \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

Очевидно, что

$$(\nabla\boldsymbol{u} - \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})_{ij} = \partial_{x_i}u_j - \partial_{x_j}u_i = \sum_{l,m=1}^{3}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_{x_l}u_m.$$

Так как

$$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk},$$

то

$$(\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})_{ij} = \sum_{l,m,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\, \partial_{x_l} u_m = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} (\nabla \times \boldsymbol{u})_k$$

и, следовательно,

$$((\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{n})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} n_j (\nabla \times \boldsymbol{u})_k = (\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{u})_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Из представления (17) для $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}$ следует:

1) матричную производную нельзя определить, по крайней мере непосредственно, зная только $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}$;

2) в отличие от представления (16) представление (17) имеет смысл только в том случае, если Ω^+ является липшицевой областью и $\boldsymbol{u} \in H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.

В силу замечания 1 в работе [8] при выводе представления (16) из представления (17) использованы формула (14) для дивергенции (формула (2.5.215) в [12]) и формула

$$\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \mathcal{C}\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{n} \times (\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n})$$

для ротора (формула (2.5.225) в [12]).

2.2. *Представление матрицы производных Гюнтера через объемный интеграл.* На основе результатов, полученных в [25], можно записать формулу Грина

$$\int_{\Omega^\pm} (\nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{u} \nabla \cdot \boldsymbol{v})\, dx =$$
$$= \pm \int_{\partial\Omega} (\partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{n} \nabla \cdot \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\, ds \tag{18}$$

для $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, принадлежащих $H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Здесь

$$\nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} \nabla u_j \cdot \nabla v_j = \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_i} u_j\, \partial_{x_i} v_j.$$

В (18) предполагается, что Ω^+ является криволинейным многогранником. Однако формула остается справедливой и для липшицевой области Ω^+ и функции $\boldsymbol{v}$, принадлежащей $H^1(\Omega^\pm; \mathbb{C}^3)$. Приведенная выше формула Грина справедлива также для $\boldsymbol{u} \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и $\boldsymbol{v} \in H^1_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ или для $\boldsymbol{u} \in H^2_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и $\boldsymbol{v} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Формулу (18) можно также вывести из формулы Грина, приведенной в [13. P. 220]:

$$\int_{\Omega^\pm} (\Delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{u}\ \nabla \cdot \boldsymbol{v})\, dx = \pm \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \nabla \cdot \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\, ds. \tag{19}$$

На основе приведенных выше формул можно сформулировать теорему, из которой следует представление производной Гюнтера через объемный интеграл.

Теорема 3. *Пусть Ω^+ — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^3$. С учетом введенных выше определений имеет место формула*

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{u} \rangle_{1/2,\partial\Omega} = \pm \int_{\Omega^\pm} (\nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{u}\ \nabla \cdot \boldsymbol{v})\, dx \tag{20}$$

для $\boldsymbol{u} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, $\boldsymbol{v} \in H^1_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.

Доказательство. Полагая, что $\boldsymbol{v} \in H^2_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, с учетом (18) можно записать

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{v}\, ds = \pm \int\limits_{\Omega^\pm} (\nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{u}\ \nabla \cdot \boldsymbol{v})\, dx.$$

С учетом

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{v}\, ds = \langle \boldsymbol{u}, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{v} \rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{v}, \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} \boldsymbol{u} \rangle_{1/2,\partial\Omega}$$

получаем формулу (20) для $\boldsymbol{v} \in H^2_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Для завершения доказательства нужно учесть полноту пространства $H^2_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ в $H^1_{comp}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.

3. Применение производной Гюнтера при исследовании потенциалов упругих волн. Ниже техника регуляризации поверхностных потенциалов упругих волн, предложенная в работе [7] для областей класса $\mathcal{C}^2$, обобщается на случай липшицевых областей. Выводятся вспомогательные представления для потенциалов двойного слоя и тождество, устанавливающее связь между поверхностными потенциалами упругих волн и потенциалами уравнения Гельмгольца. Особое внимание уделяется операторам напряжений потенциала двойного слоя. Показано, каким образом, не используя общую теорию потенциалов эллиптических систем, можно получить свойства отображений потенциалов упругих волн из свойств отображений потенциалов уравнения Гельмгольца.

3.1. *Поверхностные потенциалы упругих волн.* Для $\boldsymbol{p} \in H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ потенциал простого слоя упругих волн записывается следующим образом:

$$S\boldsymbol{p}(x) = \langle \Gamma(x, y), \boldsymbol{p}_y \rangle_{1/2,\partial\Omega} \quad (x \in \Omega^+ \cup \Omega^-).$$

Здесь $\Gamma(x, y)$ — матрица Купрадзе [4. P. 85], элементы которой имеют вид

$$\Gamma_{kl}(x, y) = \frac{1}{\omega^2 \rho} \, (\varkappa_s^2 G_{\varkappa_s}(x, y) \delta_{kl} + \partial_{x_k} \partial_{x_l} (G_{\varkappa_p} - G_{\varkappa_s})(x, y)) \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Индекс y означает, что в двойственном произведении переменная x является параметром. Через $\langle \Gamma(x, y), \boldsymbol{p}_y \rangle_{1/2,\partial\Omega}$ обозначен вектор, k-я компонента которого имеет следующий вид:

$$\sum_{l=1}^{3} \langle \Gamma_{kl}(x, y), (p_l)_y \rangle_{1/2,\partial\Omega}$$

($(p_l)_y$ — l-я компонента вектора $\boldsymbol{p}_y$). Через

$$\varkappa_p = \omega \sqrt{\rho/(2\mu + \lambda)}\,, \quad \varkappa_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$$

обозначены волновые числа волн сжатия (P-волн) и волн сдвига (S-волн) соответственно, $\omega > 0$, $\rho > 0$, $\mu > 0$ и $\lambda \geqslant 0$ — круговая частота, плотность и константы Ламе упругой среды соответственно. В матрице Купрадзе $G_\varkappa(x, y) = \exp{(i\varkappa|x - y|)}/(4\pi|x - y|)$ — ядра Грина, являющиеся решениями уравнения Гельмгольца

$$\Delta_y G_\varkappa(x, y) + \varkappa^2 G_\varkappa(x, y) = -\delta_x \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

и удовлетворяющие условиям излучения Зоммерфельда

$$\lim_{|y| \to \infty} |y| (\partial_{|y|} G_\varkappa(x, y) - i\varkappa G_\varkappa(x, y)) = 0,$$

δ_x — дельта-функция Дирака.

Целесообразно выразить потенциал $S\boldsymbol{p}$ через потенциалы простого слоя уравнения Гельмгольца $V_{\varkappa_p}\boldsymbol{p}$ и $V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p}$, характеризующие P- и S-волны соответственно:

$$S\boldsymbol{p} = \frac{1}{\omega^2 \rho}\,(\varkappa_s^2 V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} + \nabla\nabla\cdot(V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p})\boldsymbol{p}). \tag{21}$$

В (21) $(V_\varkappa \boldsymbol{p}(x))_l$ $(l = 1, 2, 3)$ — l-я компонента потенциала $V_\varkappa \boldsymbol{p}(x)$ простого слоя уравнения Гельмгольца с волновым числом $\varkappa > 0$:

$$(V_\varkappa \boldsymbol{p}(x))_l = \langle G_\varkappa(x, y), (p_l)_y\rangle_{1/2,\partial\Omega}, \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-.$$

В приведенном ниже предложении указаны некоторые важные свойства определенных выше потенциалов.

Предложение 2. *$V_\varkappa p \in H^{1+s}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ $(-1/2 \leqslant s \leqslant 1/2)$ для $p \in H^{-1/2+s}(\partial\Omega)$. Потенциалы $V_\varkappa p$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца $\Delta V_\varkappa p + \varkappa^2 V_\varkappa p = 0$ в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ и условиям излучения Зоммерфельда. Кроме того,*

$$(V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p})p \in H^{3+s}_{loc}(\mathbb{R}^3). \tag{22}$$

Доказательство. Свойство отображения потенциала $V_\varkappa$ является частным случаем свойств отображения потенциала простого слоя общих эллиптических уравнений (см., например, теорему 1 в [26] или теорему 6.11 в [1]). Известно, что потенциал $V_\varkappa$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условиям излучения Зоммерфельда (см., например, [12. P. 117]). Тем не менее целесообразно привести доказательство этих утверждений. В силу определения $V_\varkappa$ (см., например, [1. P. 201]) имеем

$$\Delta V_\varkappa p + \varkappa^2 V_\varkappa p = -p\,\delta_{\partial\Omega},$$

где правая часть уравнения $p\,\delta_{\partial\Omega}$ определена в смысле распределений:

$$\langle \varphi, p\,\delta_{\partial\Omega}\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = \langle \varphi|_{\partial\Omega}, p\rangle_{1/2,\partial\Omega}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Таким образом,

$$\Delta\,(V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p})p = \varkappa_p^2 V_{\varkappa_p} p - \varkappa_s^2 V_{\varkappa_s} p.$$

Тогда свойство (22) является следствием регулярности решения эллиптических уравнений внутри области (см., например, теорему 4.16 в [1]).

Потенциал двойного слоя упругих волн для $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ определяется следующим образом [4. P. 301]:

$$K\boldsymbol{\psi}(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} (T_y^{(\boldsymbol{n})}\Gamma(x, y))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}(y)\, ds_y, \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-.$$

Здесь $T_y^{(\boldsymbol{n})}$ — оператор напряжений, определенный для $\boldsymbol{u} \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ равенством

$$T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = 2\mu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{u},$$

$T_y^{(\boldsymbol{n})}\Gamma(x, y)$ — матрица, j-й столбец которой получается в результате действия оператора $T_y^{(\boldsymbol{n})}$ на j-й столбец матрицы $\Gamma(x, y)$. Следует отметить, что определенный выше оператор двойного слоя, так же как и ассоциированный с ним потенциал уравнения Гельмгольца

$$N_\varkappa\lambda(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\boldsymbol{n}_y} G_\varkappa(x, y)\lambda(y)\, ds_y, \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-,$$

имеют знаки, противоположные знакам операторов, определенных в работе [4. С. 301] и в формулах (2.2.19), (1.2.2) в [5]. По-видимому, такое обозначение является более естественным при записи формул для скачков напряжений потенциала простого слоя упругих волн и для нормальной производной потенциала простого слоя уравнения Гельмгольца.

Предложенная выше процедура обобщения оператора $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ на липшицеву область может быть использована для обобщения на липшицеву область потенциала двойного слоя, определенного в [7] для областей класса $\mathcal{C}^2$.

Предложение 3. *Для потенциала двойного слоя упругих волн справедливо представление*

$$K\boldsymbol{\psi} = \nabla V_{\varkappa_p}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} - \nabla\times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\psi} - 2\mu S\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} \quad \text{в } \Omega^+\cup\Omega^-, \tag{23}$$

а также в силу тождества

$$\nabla V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} - \nabla\times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\psi} = N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi} + V_{\varkappa_s}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} \quad \text{в } \Omega^+\cup\Omega^- \tag{24}$$

представление

$$K\boldsymbol{\psi} = N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi} + (V_{\varkappa_s} - 2\mu S)\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} + \nabla(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} \quad \text{в } \Omega^+\cup\Omega^-. \tag{25}$$

Доказательство. Представления (23), (24) следуют из обобщения вычислений, приведенных в [7].

С использованием свойств поверхностных интегралов уравнения Гельмгольца доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Поверхностные потенциалы упругих волн обладают следующими свойствами:*

$$S\colon H^{-1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) \to H^{1+s}_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3), \quad K\colon H^{1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) \to H^{1+s}_{loc}(\overline{\Omega^\pm};\mathbb{C}^3),$$
$$-1/2 < s < 1/2.$$

Потенциалы $\boldsymbol{u} = S\boldsymbol{p}$ или $\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{\psi}$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta^*\boldsymbol{u} + \omega^2\rho\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^+\cup\Omega^-$$

и условию излучения Купрадзе [4. P. 124], *где Δ^* — упругий лапласиан:*

$$\Delta^*\boldsymbol{u} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из соотношений (21), (23) с учетом свойств отображений скалярных эллиптических операторов [26].

3.2. *Следы поверхностных потенциалов упругих волн.* Следы потенциалов простого слоя S и двойного слоя K, а также свойства их отображений можно получить из свойств следов поверхностных потенциалов уравнения Гельмгольца.

Теорема 5. *Оператор $(S\boldsymbol{p})^\pm$, определенный для $\boldsymbol{p} \in H^{-1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$, и оператор $(K\boldsymbol{\psi})^\pm$, определенный для $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$, имеют следующие представления:*

$$(S\boldsymbol{p})^\pm = \frac{1}{\omega^2\rho}\,(\varkappa_s^2 V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} + \nabla\nabla\cdot(V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p})\boldsymbol{p}),$$
$$(K\boldsymbol{\psi})^\pm = (N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi})^\pm + (V_{\varkappa_s} - 2\mu S)\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} + \nabla(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}.$$

В частности, для скачков потенциалов выполнены равенства

$$[S\boldsymbol{p}] = (S\boldsymbol{p})^+ - (S\boldsymbol{p})^- = 0, \qquad [K\boldsymbol{\psi}] = \boldsymbol{\psi}.$$

При $-1/2 < s < 1/2$ имеют место следующие свойства отображений:

$$S\boldsymbol{p} \in H^{1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) \quad \text{для} \quad \boldsymbol{p} \in H^{-1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3),$$
$$(K\boldsymbol{\psi})^\pm \in H^{1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) \quad \text{для} \quad \boldsymbol{\psi} \in H^{1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\nabla\,(V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p})\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}$. Поскольку $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$, функция $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}$ хорошо определена в $L^2(\partial\Omega)$ и, следовательно, принадлежит пространству $H^{-1/2+s}(\partial\Omega)$ при $-1/2 < s < 1/2$. Тогда в силу регулярности $V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p}$ (свойство (22)) имеем

$$\nabla\,(V_{\varkappa_s} - V_{\varkappa_p})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} \in H^{s+2}_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3), \qquad -1/2 < s < 1/2.$$

Это позволяет определить след функции $\boldsymbol{\psi}$ в $H^{1/2+s}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ (см. лемму 3.6 в [26] и теорему 3.38 в [1]).

Так как $[S\boldsymbol{p}] = 0$, далее $(S\boldsymbol{p})^{\pm}$ обозначается через $S\boldsymbol{p}$.

Замечание 5. Поскольку теорема о расширении следов потенциалов, действующих из $H^s_{loc}(\,\overline{\Omega^{\pm}}\,)$ в $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$, справедлива только при $1/2 < s < 3/2$ [26], не удается доказать сформулированные выше свойства отбражений для $s = \pm 1/2$.

3.3. *Операторы напряжений поверхностных потенциалов упругих волн.* Сформулируем классическую лемму, определяющую оператор напряжений $T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}$ для вектора $\boldsymbol{u}$, принадлежащего пространству

$$H^1_{loc}(\Delta^*,\overline{\Omega^{\pm}}\,) = \{\boldsymbol{v} \in H^1_{loc}(\,\overline{\Omega^{\pm}};\mathbb{C}^3);\ \Delta^*\boldsymbol{v} \in L^2_{loc}(\,\overline{\Omega^{\pm}};\mathbb{C}^3)\}.$$

Для того чтобы провести обобщение на случай липшицевых областей, будем использовать представление этого оператора через матричную производную Гюнтера.

Лемма 3. *Для* $\boldsymbol{u} \in H^1_{loc}(\Delta^*,\overline{\Omega^{\pm}}\,)$ *и* $\boldsymbol{v} \in H^1_{comp}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ *формула*

$$\int\limits_{\Omega^{\pm}} 2\mu\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} - \mu\nabla\times\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \Delta^*\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,dx =$$

$$= \langle \boldsymbol{v}, \pm(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})^{\pm}\rangle_{1/2,-1/2} \tag{26}$$

определяет оператор $(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})^{\pm}$ *в* $H^{-1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$.

Для оператора напряжений $(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})^{\pm}$ *справедливы следующие представления:*

$$\int\limits_{\Omega^{\pm}} \mu\nabla\times\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + (\lambda+2\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \Delta^*\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,dx +$$

$$+ \langle \boldsymbol{v}, \pm 2\mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}^{\pm}\rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{v}, \pm(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})^{\pm}\rangle_{1/2,\partial\Omega}; \tag{27}$$

$$\int\limits_{\Omega^{\pm}} \mu\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + (\lambda+\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \Delta^*\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,dx +$$

$$+ \langle \boldsymbol{v}, \pm \mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}^{\pm}\rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{v}, \pm(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})^{\pm}\rangle_{1/2,\partial\Omega}. \tag{28}$$

Доказательство. Запишем левую часть тождества (26) в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega^{\pm}} 2\mu\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} - \mu\nabla\times\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \Delta^*\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{\pm}} 2\mu(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,dx + \int\limits_{\Omega^{\pm}} (\lambda+\mu)(\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \cdot\boldsymbol{v} + \nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \nabla\cdot\boldsymbol{v})\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega^{\pm}} \mu(\Delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \nabla\times\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \nabla\cdot\boldsymbol{u}\ \nabla\cdot\boldsymbol{v})\,dx.$$

Тогда тождество (26) следует из тождества (19) и формулы Грина для $\boldsymbol{u} \in H^2_{loc}(\overline{\Omega^\pm}; \mathbb{C}^3)$. Это равенство справедливо для $\boldsymbol{u} \in H^1_{loc}(\Delta^*, \overline{\Omega^\pm})$ в силу плотности $H^1_{loc}(\Delta^*, \overline{\Omega^\pm})$ в $H^2_{loc}(\overline{\Omega^\pm}; \mathbb{C}^3)$, непрерывности билинейной формы и двойственности пространств $H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$. Данное утверждение сформулировано для оператора Лапласа в [23] и в [1, 26] для более широкого класса эллиптических операторов. Формулы (27), (28) следуют из представления (20) оператора $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$.

Замечание 6. Справедливы следующие утверждения:

1) часть подынтегрального выражения в (26) является (с точностью до знака) плотностью виртуальной работы

$$2\mu\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} - \mu\nabla\times\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}\;\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \Sigma u\cdot Ev,$$

совершаемой внутренними напряжениями

$$\Sigma u = 2\mu Eu + \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}I_3$$

на виртуальных перемещениях $\boldsymbol{v}$ ($Eu = (1/2)(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$ — тензор деформаций; I_3 — единичный тензор второго ранга);

2) если $\boldsymbol{u} \in H^2_{loc}(\overline{\Omega^\pm}; \mathbb{C}^3)$, то из формулы Грина следует известное представление оператора напряжений через производную Гюнтера $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ (см., например, формулу (V, 1.16) в [4] и формулу (2.2.35) в [5]):

$$T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = 2\mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} - \mu\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{u} + (\lambda+2\mu)\boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}; \tag{29}$$

$$T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} + \mu\,\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{30}$$

Получим представление оператора напряжений потенциала простого слоя через след потенциала простого слоя уравнения Гельмгольца.

Теорема 6. *Операторы напряжений $(T^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p})^\pm$, определенные для $\boldsymbol{p} \in H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$, имеют следующее представление:*

$$(T^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p})^\pm = (\partial_{\boldsymbol{n}}V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p})^\pm + \boldsymbol{n}\nabla\cdot(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{p} - \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}(V_{\varkappa_s} - 2\mu S)\boldsymbol{p}. \tag{31}$$

В частности, скачок оператора напряжений потенциала простого слоя определяется формулой

$$[T^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p}] = \boldsymbol{p}.$$

Свойства отображений этих операторов задаются формулой

$$(T^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p})^\pm \in H^{-1/2+s}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$$

для $\boldsymbol{p} \in H^{-1/2+s}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $-1/2 < s < 1/2$.

Доказательство. В обозначениях леммы 3 с учетом представления (27) можно записать

$$\langle\boldsymbol{v}, (T^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p})^\pm\rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle\boldsymbol{v}, 2\mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p}\rangle_{1/2,\partial\Omega} \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^\pm} \mu\nabla\times S\boldsymbol{p}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + (\lambda+2\mu)\nabla\cdot S\boldsymbol{p}\;\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \Delta^*S\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\,dx.$$

Так как $\mu\nabla\times S\boldsymbol{p} = \nabla\times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p}$, $(\lambda+2\mu)\nabla\cdot S\boldsymbol{p} = \nabla\cdot V_{\varkappa_p}\boldsymbol{p}$ и $\Delta^*S\boldsymbol{p} = -\omega^2\rho S\boldsymbol{p}$ в $\Omega^\pm$, то

$$\langle\boldsymbol{v}, (T^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p})^\pm\rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle\boldsymbol{v}, 2\mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}S\boldsymbol{p}\rangle_{1/2,\partial\Omega} \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^\pm} \nabla\times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \nabla\cdot V_{\varkappa_p}\boldsymbol{p}\;\nabla\cdot\boldsymbol{v} - \omega^2\rho S\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\,dx,$$

или

$$\langle \boldsymbol{v}, (T^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p})^{\pm} \rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{v}, 2\mu \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p} \rangle_{1/2,\partial\Omega} \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} \nabla \times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} + \nabla \cdot V_{\varkappa_p}\boldsymbol{p}\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}\ dx \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} (-\varkappa_s^2 V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} - \nabla\nabla \cdot V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} + \nabla\nabla \cdot V_{\varkappa_p}\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}\ dx.$$

После преобразования подынтегрального выражения имеем

$$\langle \boldsymbol{v}, (T^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p})^{\pm} \rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{v}, 2\mu \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p} \rangle_{1/2,\partial\Omega} \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} \nabla \times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} + \nabla \cdot V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p}\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \Delta V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}\ dx \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} \nabla\nabla \cdot (V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{p} \nabla \cdot \boldsymbol{v}\ dx,$$

или

$$\langle \boldsymbol{v}, (T^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p})^{\pm} \rangle_{1/2,\partial\Omega} = \langle \boldsymbol{v}, 2\mu \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p} \rangle_{1/2,\partial\Omega} \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} \nabla \times V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} + \nabla \cdot V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p}\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \nabla V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\ dx \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} \Delta V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla V_{\varkappa_s}\boldsymbol{p} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\ dx \pm$$
$$\pm \int\limits_{\Omega^{\pm}} \nabla\nabla \cdot (V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \cdot (V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{p} \nabla \cdot \boldsymbol{v}\ dx.$$

Отсюда с использованием представления (20) для $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ через объемный интеграл и формулы Грина получаем представление (31). Формула для скачка $T^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p}$ непосредственно следует из выражения для нормальной производной потенциала простого слоя уравнения Гельмгольца. Доказательство свойств отображения аналогично доказательству таких свойств для следов потенциала двойного слоя.

Замечание 7. Из представления (31) следует тождество двойственности

$$\langle \boldsymbol{\psi}, (T^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p})^{\pm} \rangle_{1/2,\partial\Omega} = -\langle (K\boldsymbol{\psi})^{\mp}, \boldsymbol{p} \rangle_{1/2,\partial\Omega}$$

для $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $\boldsymbol{p} \in H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ с учетом соответствующей формулы для потенциала уравнения Гельмгольца без использования общей теории систем эллиптических уравнений [1. P. 211].

Ниже изложены основные результаты данной работы, а именно обобщение на случай липшицевых областей двух регуляризаций, предложенных в работе [7] для областей класса $\mathcal{C}^2$. Первая регуляризация основана на формуле (25) и может рассматриваться как обобщение регуляризации в статических задачах теории упругости (см., например, [6] и лемму 2.3.3 в [5]).

Теорема 7. *Для $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ оператор напряжений потенциала двойного слоя на обеих сторонах поверхности $\partial\Omega$ определяется следующим образом:*

$$(T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi})^{\pm} = \mu((\partial_{\boldsymbol{n}}N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi}) + \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}(N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi})^{\pm} - (\partial_{\boldsymbol{n}}V_{\varkappa_s}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi})^{\pm}) + \\ + 2\mu(\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\nabla(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{n}\nabla\cdot(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}) + \\ + \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}(3\mu V_{\varkappa_s} - 4\mu^2 S)\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} - \omega^2\rho\boldsymbol{n}(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}. \qquad (32)$$

В частности, если $[T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi}] = 0$, то $(T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi})^{\pm} = T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi}$ является ограниченным оператором, действующим из $H^{1/2+s}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ в $H^{-1/2+s}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ при $-1/2 < s < 1/2$.

Доказательство. При доказательстве проводятся вычисления, аналогичные вычислениям, выполненным в работе [7] при доказательстве леммы 2.3. Однако в данной работе вычисления проводятся с использованием потенциалов, а не их ядер. При доказательстве леммы 2.3 в [7] требуется непрерывное продолжение вектора единичной нормали в окрестность поверхности $\partial\Omega$, что невозможно для липшицевых областей. Доказательство основано на разложении потенциала двойного слоя на три слагаемых:

$$K\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1 - 2\mu S\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi},$$

где $\boldsymbol{w}_0 = N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi} + V_{\varkappa_s}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n}),}\boldsymbol{\psi}$; $\boldsymbol{w}_1 = \nabla(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}$. Последнее слагаемое в этом разложении с точностью до постоянного множителя является потенциалом простого слоя с плотностью $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}$. Таким образом, представление соответствующего оператора напряжений следует из представления (31):

$$(T^{(\boldsymbol{n})}(-2\mu S\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}))^{\pm} = -2\mu(\partial_{\boldsymbol{n}}V_{\varkappa_s}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi})^{\pm} - \\ - 2\mu(\boldsymbol{n}\nabla\cdot(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} - \mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}).$$

Второе слагаемое принадлежит пространству $H^2_{loc}(\overline{\Omega^{\pm}}; \mathbb{C}^3)$. Представление соответствующего оператора напряжений следует из его определения и равенств $\nabla\times\boldsymbol{w}_1 = 0$, $\nabla\cdot\boldsymbol{w}_1 = (-\varkappa_p^2 V_{\varkappa_p} + \varkappa_s^2 V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}$:

$$T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_1 = 2\mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_1 + (\lambda + 2\mu)(-\varkappa_p^2 V_{\varkappa_p} + \varkappa_s^2 V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}.$$

Что касается первого слагаемого, заметим, что $\boldsymbol{w}_0 \in H^1_{loc}(\overline{\Omega^{\pm}}; \mathbb{C}^3)$ и $\Delta\boldsymbol{w}_0 = -\varkappa_s^2\boldsymbol{w}_0$ в $\Omega^{\pm}$, поскольку $\boldsymbol{w}_0$ является линейной комбинацией потенциалов простого слоя уравнения Гельмгольца, соответствующего волновому числу $\varkappa_s$, с плотностью $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} \in H^{-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$. Далее с использованием (24) можно записать

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}_0 = \Delta V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} = -\varkappa_s^2 V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} \in H^1_{loc}(\overline{\Omega^{\pm}}).$$

С использованием последнего соотношения и формулы Грина нетрудно показать, что $(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_0)^{\pm}$ представляется в виде (30) в силу (28). Таким образом,

$$(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_0)^{\pm} = \mu\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_0 + \mu(\partial_{\boldsymbol{n}}N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi})|_{\partial\Omega} + \mu(\partial_{\boldsymbol{n}}V_{\varkappa_s}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi})^{\pm} - \varkappa_s^2(\lambda + \mu)\boldsymbol{n}V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}.$$

Из полученных представлений для $(T^{(\boldsymbol{n})}(-2\mu S\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}))^{\pm}$, $T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_1$ и $(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{w}_0)^{\pm}$ следует представление (32). Для того чтобы завершить доказательство, достаточно использовать формулу для скачка потенциала простого слоя уравнения Гельмгольца и свойства отображения этого потенциала (см., например, [26] или [1. P. 202]).

Замечание 8. Из формулы (32) следует представление для $T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi}$, в котором интегралы сходятся в обычном смысле, а не в смысле главного значения Коши. Это утверждение следует из того, что слагаемое $\partial_{\boldsymbol{n}} N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi}$ можно записать в вариационной форме с использованием формулы регуляризации Хамиди [27]

$$\langle \boldsymbol{\varphi}, \partial_{\boldsymbol{n}} N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi}\rangle_{1/2,\partial\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \langle \boldsymbol{n} \times \nabla\varphi_j, V_{\varkappa_s}\boldsymbol{n} \times \nabla\psi_j\rangle_{1/2,\partial\Omega} - \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_j \boldsymbol{n} \cdot V_{\varkappa_s}(\psi_j \boldsymbol{n})\, ds,$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$; ψ_j, φ_j — компоненты векторов $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\varphi}$ соответственно (см. [1. P. 289]).

Замечание 9. В лемме 2.3 в [7] получено следующее представление для $T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi}$:

$$\begin{aligned} T^{(\boldsymbol{n})}K\boldsymbol{\psi} = \mu\nabla_{\partial\Omega}(V_{\varkappa_s}\nabla_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{\psi}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n} + 2\mu(\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}(N_{\varkappa_s}\boldsymbol{\psi})^{\pm} - (\partial_{\boldsymbol{n}} V_{\varkappa_s}\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi})^{\pm}) +{}& \\ + 2\mu(\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\nabla(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{n}\nabla\cdot(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}) +{}& \\ + (4/\varkappa_s^2)\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\nabla\nabla\cdot(V_{\varkappa_p} - V_{\varkappa_s})\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} - \omega^2\rho(\boldsymbol{n}\times V_{\varkappa_s}(\boldsymbol{\psi}\times\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{n}V_{\varkappa_p}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}).& \quad (33) \end{aligned}$$

С использованием формулы (23) и вариационной формы представления (27) для напряжения формулу (33) можно обобщить на случай липшицевых областей. Свойства отображения соответствующего оператора можно получить из свойств отображения потенциала простого слоя уравнения Гельмгольца, свойств тангенциального вектора вращения и поверхностного ротора (см. следствие 1).

4. Двумерные задачи. Ниже исследуются свойства производных Гюнтера в задачах, в которых как геометрия области, так и механические характеристики упругой среды инвариантны относительно переноса вдоль оси x_3. Сначала рассматривается случай функции, не зависящей от переменной x_3. Затем с использованием соотношения, устанавливающего связь между двумерными и трехмерными ядрами Грина уравнения Гельмгольца, выводятся представления двумерных потенциалов упругих волн.

4.1. *Двумерные производные Гюнтера.* Ниже рассматриваются области $\Omega^{\pm} = \Omega_{\perp}^{\pm} \times (-\infty, +\infty)$, где $\Omega_{\perp}^{+}$ — ограниченная липшицева двумерная область в плоскости; $\Omega_{\perp}^{-} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_{\perp}^{+}}$ — ее дополнение. Любое векторное поле $\boldsymbol{u}$, зависящее только от координат в плоскости (x_1, x_2), можно представить в виде суперпозиции плоского векторного поля $\boldsymbol{u}_{\perp}$ и скалярного поля u_3, называемых соответственно плоской и антиплоской компонентами поля $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u}(x_1, x_2) = \boldsymbol{u}_{\perp}(x_1, x_2) + u_3(x_1, x_2)\boldsymbol{e}_3.$$

Заметим, что $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1}^3$ — канонический базис пространства. Единичная нормаль $\boldsymbol{n}$ к $\partial\Omega$ не зависит от x_3, и $n_3 = 0$. В дальнейшем вектор нормали $\boldsymbol{n}$ отождествляется с его компонентой в плоскости $\boldsymbol{n}_{\perp}$. Нижний индекс “$\perp$” используется для обозначения двумерного аналога трехмерной величины. Скалярный вихрь $\nabla_{\perp} \times \boldsymbol{u}_{\perp}$ и векторный вихрь $\nabla_{\perp} \times u_3$ определяются следующим образом:

$$\nabla_{\perp} \times \boldsymbol{u}_{\perp} = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1, \qquad \nabla_{\perp} \times u_3 = \partial_{x_2} u_3 \boldsymbol{e}_1 - \partial_{x_1} u_3 \boldsymbol{e}_2.$$

Пусть функция u не зависит от x_3. Тогда

$$\mathcal{M}_{i3}^{(\boldsymbol{n})} u = n_3\, \partial_{x_i} u - n_i\, \partial_{x_3} u = 0.$$

Следовательно, только две производные Гюнтера отличны от нуля:

$$\mathcal{M}_{21}^{(\boldsymbol{n})} u = -\mathcal{M}_{12}^{(\boldsymbol{n})} u = n_1\, \partial_{x_2} u - n_2\, \partial_{x_1} u = \partial_{\boldsymbol{\tau}} u$$

($\boldsymbol{\tau} = R_{\pi/2}\boldsymbol{n}$; R_θ — преобразование поворота на угол θ против часовой стрелки вокруг оси x_3). Следовательно,

$$\mathcal{M}_{21}^{(\boldsymbol{n})}u = -\mathcal{M}_{12}^{(\boldsymbol{n})}u = \partial_s u,$$

где s — криволинейная координата на $\partial\Omega_\perp$, возрастающая в направлении против часовой стрелки. Следующая теорема является аналогом теоремы 1.

Теорема 8. *При сформулированных выше условиях оператор ∂_s является ограниченным оператором, действующим из $H^s(\partial\Omega_\perp)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega_\perp)$ для $0 \leqslant s \leqslant 1$.*

Замечание 10. Матричная производная Гюнтера в двумерном случае $\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}$ сводится к оператору, имеющему простую форму записи

$$\mathcal{M}^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u} = \mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}_\perp = R_{\pi/2}\,\partial_s\boldsymbol{u}_\perp = \boldsymbol{e}_3 \times \partial_s\boldsymbol{u}.$$

4.2. *Двумерные потенциалы упругих волн.* Имеет место формула

$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\mu+\lambda)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \mu\Delta_\perp\boldsymbol{u}_\perp + (\mu+\lambda)\nabla_\perp\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp \\ \mu\Delta_\perp u_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, волновое уравнение для вектора $\boldsymbol{u}$ расщепляется на два независимых: 1) уравнение для плоской компоненты $\boldsymbol{u}_\perp$; 2) уравнение для антиплоской компоненты u_3.

Плоская компонента $(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})_\perp$ и антиплоская компонента $(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})_3$ оператора напряжений, соответствующего векторному полю $\boldsymbol{u}$, не зависящему от координаты x_3, зависят соответственно только от плоской компоненты векторного поля смещений $\boldsymbol{u}_\perp$ и от его антиплоской компоненты u_3:

$$(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})_\perp = T_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u}_\perp = 2\mu\partial_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}_\perp + \boldsymbol{n}\nabla_\perp\cdot\boldsymbol{u}_\perp + \boldsymbol{\tau}\nabla_\perp\times\boldsymbol{u}_\perp,$$

$$(T^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{u})_3 = T_3^{(\boldsymbol{n})}u_3 = \mu\,\partial_{\boldsymbol{n}}u_3.$$

Выражения для поверхностных потенциалов упругих волн

$$V_\varkappa p(x_1,x_2) = \int\limits_{\partial\Omega_\perp} \frac{i}{4}\,H_0^{(1)}\big(\varkappa\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,\big)p(y_1,y_2)\,ds_{(y_1,y_2)},$$

$$N_\varkappa\varphi(x_1,x_2) = -\int\limits_{\partial\Omega_\perp} \frac{i}{4}\,\partial_{\boldsymbol{n}_{y_1,y_2}}H_0^{(1)}\big(\varkappa\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,\big)\varphi(y_1,y_2)\,ds_{(y_1,y_2)}$$

можно получить, используя представление фундаментального решения двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{i}{4}\,H_0^{(1)}(\varkappa r) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\big(i\varkappa\sqrt{r^2+x_3^2}\,\big)}{4\pi\sqrt{r^2+x_3^2}}\,dx_3, \qquad r > 0,$$

которое получается из интеграла Миллера — Сонина путем замены переменной $x_3 = \operatorname{sh} t$ (см. формулу 10.9.9 в [28]):

$$\frac{i}{4}\,H_0^{(1)}(\varkappa r) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\,(i\varkappa r\operatorname{ch} t)\,dt.$$

Ниже приведены разложения потенциалов упругих волн и соответствующих операторов напряжений на плоскую и антиплоскую компоненты:

— потенциал простого слоя:

$$S\boldsymbol{p} = S_\perp \boldsymbol{p}_\perp + (S_3 p_3)\boldsymbol{e}_3,$$

$$S_\perp \boldsymbol{p}_\perp = \frac{1}{\omega^2 \rho}\left(\varkappa_s^2 V_{\varkappa s} \boldsymbol{p}_\perp + \nabla_\perp \nabla_\perp \cdot (V_{\varkappa s} - V_{\varkappa p})\boldsymbol{p}_\perp\right),$$

$$S_3 p_3 = \frac{1}{\mu} V_{\varkappa s} p_3;$$

— потенциал двойного слоя:

$$K\boldsymbol{\psi} = K_\perp \boldsymbol{\psi}_\perp + (K_3 \psi_3)\boldsymbol{e}_3,$$

$$K_\perp \boldsymbol{\psi}_\perp = N_{\varkappa s}\boldsymbol{\psi}_\perp + (V_{\varkappa s} - 2\mu S_\perp)\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}_\perp + \nabla_\perp (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}_\perp,$$

$$K_3 \psi_3 = N_{\varkappa s}\psi_3;$$

— оператор напряжений потенциала простого слоя:

$$T^{(\boldsymbol{n})} S\boldsymbol{p} = T_\perp^{(\boldsymbol{n})} S_\perp \boldsymbol{p}_\perp + (T_3^{(\boldsymbol{n})} S_3 p_3)\boldsymbol{e}_3,$$

$$T_\perp^{(\boldsymbol{n})} S_\perp \boldsymbol{p}_\perp = (\partial_{\boldsymbol{n}} V_{\varkappa s}\boldsymbol{p})^{\pm} + \boldsymbol{n}\nabla_\perp \cdot (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\boldsymbol{p}_\perp - \mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}(V_{\varkappa s} - 2\mu S_\perp)\boldsymbol{p}_\perp,$$

$$T_3^{(\boldsymbol{n})} S_3 p_3 = (\partial_{\boldsymbol{n}} V_{\varkappa s} p_3)^{\pm};$$

— оператор напряжений потенциала двойного слоя:

$$T^{(\boldsymbol{n})} K\boldsymbol{\psi} = T_\perp^{(\boldsymbol{n})} K_\perp \boldsymbol{\psi}_\perp + (T_3^{(\boldsymbol{n})} K_3 \psi_3)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\begin{aligned} T_\perp^{(\boldsymbol{n})} K_\perp \boldsymbol{\psi}_\perp = \mu(\partial_{\boldsymbol{n}} N_{\varkappa s}\boldsymbol{\psi}_\perp + \mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}(N_{\varkappa s}\boldsymbol{\psi}_\perp)^{\pm} - (\partial_{\boldsymbol{n}} V_{\varkappa s}\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}_\perp)^{\pm}) + {} \\ + 2\mu(\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\nabla_\perp (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}_\perp - \boldsymbol{n}\nabla_\perp \cdot (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}_\perp) + {} \\ + (\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}(3\mu V_{\varkappa s} - 4\mu^2 S_\perp)\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi} - \omega^2\rho\boldsymbol{n}(V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}_\perp), \end{aligned}$$

$$T_3^{(\boldsymbol{n})} K_3 \psi_3 = \mu\,\partial_{\boldsymbol{n}} N_{\varkappa s}\psi_3.$$

Замечание 11. Из формулы (33) следует другое представление для оператора напряжений потенциала двойного слоя:

$$T^{(\boldsymbol{n})} K\boldsymbol{\psi} = T_\perp^{(\boldsymbol{n})} K_\perp \boldsymbol{\psi}_\perp + (T_3^{(\boldsymbol{n})} K_3 \psi_3)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\begin{aligned} T_\perp^{(\boldsymbol{n})} K_\perp \boldsymbol{\psi}_\perp = 2\mu(\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}(N_{\varkappa s}\boldsymbol{\psi}_\perp)^{\pm} - (\partial_{\boldsymbol{n}} V_{\varkappa s}\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}_\perp)^{\pm}) + {} \\ + 2\mu(\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\nabla_\perp (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}_\perp - \boldsymbol{n}\nabla_\perp \cdot (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}_\perp) + {} \\ + \frac{4}{\varkappa_s^2}\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\nabla_\perp\nabla_\perp \cdot (V_{\varkappa p} - V_{\varkappa s})\mathcal{M}_\perp^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{\psi}_\perp - \omega^2\rho(\boldsymbol{\tau} V_{\varkappa s}(\boldsymbol{\psi}_\perp\cdot\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{n} V_{\varkappa p}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\psi}_\perp), \end{aligned}$$

$$T_3^{(\boldsymbol{n})} K_3 \psi_3 = -\mu\,\partial_s V_{\varkappa s}\,\partial_s \psi_3 - \omega^2\rho\boldsymbol{\tau}\cdot V_{\varkappa s}(\psi_3\boldsymbol{\tau}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **McLean W.** Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge; N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2000.
2. **Taylor M.** Partial differential equations. V. 1. Basic theory. N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
3. **Gunther N. M.** La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. P.: Gauthiers-Villars, 1934.
4. **Kupradze V. D.** Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity / V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleishvili, T. V. Burchuladze. Amsterdam; N. Y.; Oxford: North Holland, 1979.
5. **Hsiao G. C.** Boundary integral equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008.
6. **Han H.** The boundary integro-differential equations of three-dimensional Neumann problem in linear elasticity // Numer. Math. 1994. V. 68. P. 269–281.
7. **Le Louër F.** A high-order spectral algorithm for elastic obstacle scattering in three dimensions // J. Comput. Phys. 2014. V. 279. P. 1–17.
8. **Darbas M., Le Louër F.** Well-conditioned boundary integral formulations for high-frequency elastic scattering problems in three dimensions // Math. Methods Appl. Sci. 2015. V. 38. P. 1705–1733.
9. **Costabel M.** A coercive bilinear form for Maxwell's equations // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 157, N 2. P. 527–541.
10. **Costabel M., Dauge M.** A singularly perturbed mixed boundary value problem // Comm. Partial Different. Equat. 1996. V. 21, N 11/12. P. 1667–1703.
11. **Buffa A., Costabel M., Sheen D.** On traces for $h(\mathrm{curl}, \omega)$ in Lipschitz domains // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 276. P. 845–867.
12. **Nédélec J.-C.** Acoustic and electromagnetic equations: integral representations for harmonic problems. Berlin: Springer, 2001.
13. **Knauff W., Kress R.** On the exterior boundary-value problem for the time-harmonic Maxwell equations // J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 72. P. 215–235.
14. **Nédélec J. C.** The double layer potential for periodic elastic waves in $\mathbb{R}^3$ // Boundary elements. Beijing: Pergamon Press, 1986. P. 439–448.
15. **Nishumura N., Kobayashi S.** A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems // Comput. Mech. 1989. V. 4. P. 319–328.
16. **Becache E., Nédélec J.-C., Nishimura N.** Regularization in 3d of anistropic elastodynamic crack and obstacle problems // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 25–46.
17. **Liu Y., Rizzo F. J.** Hypersingular boundary integral equations for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1993. V. 107. P. 131–144.
18. **Gray L. J., Chang S. J.** Hypersingular integral formulation of elastic wave scattering // Engng Anal. Boundary Elements. 1992. V. 10. P. 337–343.
19. **Rizzo F. J., Shippy D. J., Rezayat M.** A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1985. V. 21. P. 115–129.
20. **Sauter S. A.** Boundary element methods / S. A. Sauter, C. Schwab. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
21. **Geuzaine C., Remacle J.-F.** Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2009. V. 79, N 11. P. 1309–1331.

22. **Choquet-Bruhat Y.** Analysis, manifolds and physics. Pt 1. Basics / Y. Choquet-Bruhat, C. de Witt Morette. L.; N. Y., etc.: Elsevier, 1991.
23. **Grisvard P.** Elliptic problems in non-smooth domains. Boston: Pitman, 1985. (Monographs and studies in mathematics; V. 24).
24. **Nečas J.** Direct methods in the theory of elliptic equations. Heidelberg; Dordrecht; L.; N. Y.: Springer, 2012.
25. **Costabel M., Dauge M.** Maxwell and Lamé eigenvalues on polyhedra // Math. Methods Appl. Sci. 1999. V. 22. P. 243–258.
26. **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19, N 3. P. 613–625.
27. **Hamdi M.** Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation d'Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. II. 1981. V. 292. P. 17–20.
28. **Olver F. W.** NIST handbook of mathematical functions / F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. N. Y.: NIST U.S. Department of Commerce: Cambridge Univ. Press, 2010.

Поступила в редакцию 10/VII 2019 г.,
после доработки — 10/VII 2019 г.
Принята к публикации 29/VII 2019 г.