ЛИТЕРАТУРА

1. **Маделунг Э.** Математический аппарат физики.— М.: Наука, 1968.
2. **Бермант А. Ф.** Отображения, криволинейные координаты, преобразования, формулы Грина.— М.: Физматгиз, 1958.
3. **Шилд Р. Т.** О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии. Сб. пер. Механика, 1958, № 1.
4. **Липпман Г.** Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации. Сб. пер. Механика, 1963, № 3.
5. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности.— М.: Наука, 1966.
6. **Ишлинский А. Ю.** Осесимметричная задача и проба Бринелля.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 3.
7. **Spenser A. J. M.** The approximate solution of certain problem of axially symmetric plastic flow.— J. Mech. Phys. Solids, 1964, v. 12, p. 231.
8. **Rogozinski M.** On Haar — Karman hipotesis.— Arch. Mech. Stos., 1966, v. 18, N 6.
9. **Непершин Р. И.** О решении кинематически определимых задач осесимметричного пластического течения.— Машиноведение, 1972, № 2.
10. **Сегал В. М.** Технологические задачи теории пластичности.— Минск: Наука и техника, 1977.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1976.
12. **Христианович С. А.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1981.
13. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела.— М.: Наука, 1978.
14. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности.— М.: Техтеориздат, 1956.
15. **Symonds P. S.** On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity.— Quart. of appl. mathem., 1949, v. 6, N 4.
16. **Cox A. D., Eason G., Hopkins H. G.** Axially symmetric plastic deformations in soils.— Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1961, v. 254, N 1036.
17. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластических сред.— М.: Наука, 1981.
18. **Малинин Н. Н.** Технологические задачи пластичности и ползучести.— М.: Высш. шк., 1979.
19. **Степановский Л. Г.** О границах очага пластической деформации при выдавливании.— Вестн. машиностроения, 1963, № 9.
20. **Чудаков П. Д., Коробкин В. Д.** Усилия волочения редуцирования и выдавливания неупрочняемого материала через коническую матрицу.— В кн.: Разработка и исследование технологических процессов обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1968.

Поступила 11/III 1985 г.

УДК 539.37

ОДИН КЛАСС СЛОЖНЫХ НАГРУЖЕНИЙ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ

А. Ф. Ревуженко

(*Новосибирск*)

В механике сплошной среды большую роль играют течения, простейшие в определенном смысле. В гидродинамике к таким можно отнести течения Куэтта между параллельными пластинами и коаксиальными цилиндрами [1], в механике твердого тела — деформирование тонкостенных трубчатых образцов [2], в механике сыпучей среды — однородный сдвиг материала [3].

Построение достаточно общих феноменологических моделей предполагает экспериментальное исследование различных путей нагружения, включая сложные, когда оси тензора напряжений относительно материальных объемов поворачиваются. Сложное нагружение металлов, горных пород и других твердых тел можно реализовать путем комбинирования внутреннего давления, кручения и растяжения трубчатых образцов. Однако для широкого класса материалов эта классическая методика либо существенно усложняется (например, для грунтов [4]), либо вообще неприменима.

Представляет интерес поиск класса сложных нагружений, которые, с одной стороны, можно было бы отнести к простейшим, с другой — можно использовать для испытания сыпучих, упруговязкопластических и других подобных материалов.

1. Как известно, однородное напряженно-деформированное состояние простейшее. Пусть в фиксированном направлении среда подвергается однородной деформации растяжения $\Delta\varepsilon_1 = k\Delta t$, а в ортогональном — деформации сжатия так, что объем не меняется: $\Delta\varepsilon_2 = -k\Delta t$. Затем через время Δt такое же однородное деформирование осуществляется в новых фиксированных направлениях, повернутых относительно прежних на угол $-\Omega\Delta t$, и т. д. Деформация плоская, Ω, k — положительные постоянные.

Для вывода уравнений рассмотрим дискретную последовательность указанных однородных нагружений. Пусть $Ox_1'x_2'$ — исходная декартова система координат, β — угол между направлением растяжения Ox_1 и осью Ox_1' (рис. 1). В координатах Ox_1x_2 вектор приращения смещений равен $\{kx_1\Delta t,\ -kx_2\Delta t\}$. Проектируя его на оси Ox_1', Ox_2' и переходя к переменным x_1', x_2', получим

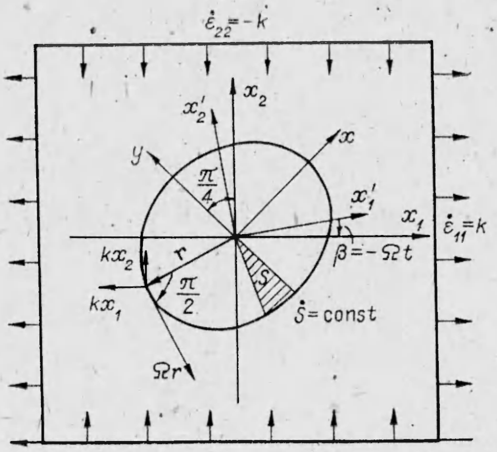

Рис. 1

(1.1) $$\Delta u_1' = k(\cos 2\beta x_1' + \sin 2\beta x_2')\,\Delta t, \quad \Delta u_2' = k(\sin 2\beta x_1' - \cos 2\beta x_2')\,\Delta t.$$

Разобьем промежуток времени от t до t_1 на интервалы длиной Δt, положим дискретные значения $\beta = -\Omega t$ и просуммируем смещения (1.1) при $\Delta t \to 0$, $t_1 \to t$. В результате имеем систему

(1.2) $$v_1' = dx_1'/dt = k(\cos 2\Omega t x_1' - \sin 2\Omega t x_2'),$$
$$v_2' = dx_2'/dt = -k(\sin 2\Omega t x_1' + \cos 2\Omega t x_2'),$$

где v_1', v_2' — скорости материальной точки в координатах $Ox_1'x_2'$. Теперь можно считать, что система Ox_1x_2 вращается непрерывно с угловой скоростью — Ω относительно исходной системы. Уравнения (1.2) позволяют определить скорости в координатах Ox_1x_2:

(1.3) $$v_1 = dx_1/dt = -\Omega x_2 + kx_1;\quad v_2 = dx_2/dt = \Omega x_1 - kx_2.$$

Характер решения (1.3) зависит от соотношения скоростей растяжения и поворота. При $k < \Omega$

(1.4) $$x_1 = \left(\frac{k}{\lambda}a_1 - \frac{\Omega}{\lambda}a_2\right)\sin\lambda t + a_1\cos\lambda t,$$
$$x_2 = \left(\frac{\Omega}{\lambda}a_1 - \frac{k}{\lambda}a_2\right)\sin\lambda t + a_2\cos\lambda t.$$

Здесь $\lambda = \sqrt{\Omega^2 - k^2}$; a_1, a_2 — координаты в момент $t = 0$. Если $k \geqslant \Omega$, то траектории незамкнуты и уходят на бесконечность. В данной ситуации возможность такого поведения на первый взгляд кажется парадоксальной. Однако она имеет простой механический смысл. В полярных координатах (r, α) система (1.3) преобразуется к виду

$$d\ln r/dt = k\cos 2\alpha,\quad d\alpha/dt = \Omega - k\sin 2\alpha.$$

Последнее уравнение показывает, что угловая скорость обращения материальной точки вокруг центра зависит не только от скорости поворота Ω, но и от скорости растяжения k. Причем при $k \geqslant \Omega$ найдется радиус, на котором скорость обращения равна нулю. Этот радиус точка преодолеть не может и вследствие непрерывного растяжения уходит на бесконечность. Ниже ограничимся только первым случаем, когда $k < \Omega$. При этом, согласно (1.4), каждая точка движется по замкнутой эллиптической траектории, имеющей коэффициент сжатия $\sqrt{(\Omega - k)/(\Omega + k)}$. Большая ось эллипса направлена вдоль биссектрисы $x_1 = x_2$. Период обращения всех точек одинаков и равен $2\pi/\lambda$, т. е. всегда больше, чем $2\pi/\Omega$. Закон обращения обладает одной особенностью: векторное произведение скорости $\mathbf{v}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$ для всех точек на общей эллиптической траектории постоянно и не зависит от k. Иными словами, при движении вокруг

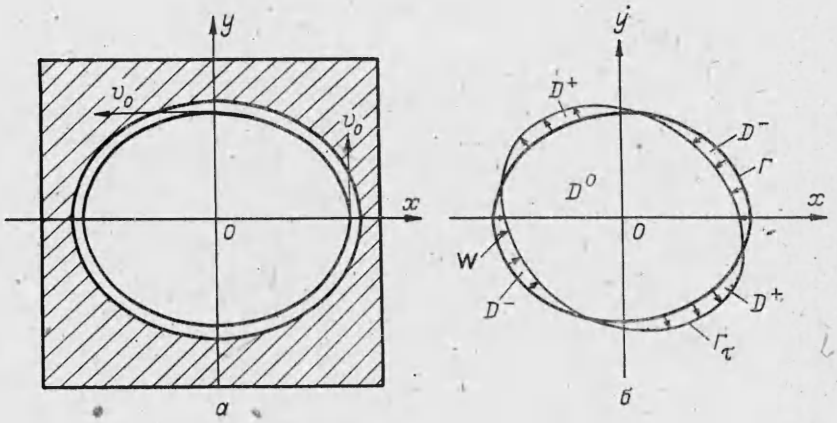

Рис. 2

центра радиус-вектор точки за одинаковое время ометает одинаковые площади S. Например, для точки $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ при всех t

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{r}| = \Omega = \mathrm{const}, \ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к траектории.

Результаты (1.4), (1.5) получены исходя только из требования однородности деформирования сплошной среды. Нагружение квазистатическое, инерционные силы отсутствуют. Причина движения элементов среды — их взаимодействие, которое приводит к появлению внутренних напряжений и передаче информации о граничных смещениях во внутрь области. Квазистатической задаче о течении сплошной среды можно поставить в соответствие динамическую задачу о движении материальной точки. Пусть в некоторый момент времени между элементами среды распались все связи и вместо них появилось эквивалентное поле сил, которое для любой теперь уже отдельной частицы обеспечивает такое же движение, что и в сплошной среде. Определим эквивалентное поле для течения (1.3). Из (1.3) следует

$$d^2x_1/dt^2 = -(\Omega^2 - k^2)x_1, \quad d^2x_2/dt^2 = -(\Omega^2 - k^2)x_2.$$

Таким образом, однородному деформированию с непрерывным поворотом осей соответствует центральное поле сил с потенциалом, пропорциональным r^2. На этом языке свойство (1.5) — хорошо известное следствие центральности поля сил [6].

2. Итак, однородный процесс характеризуется условиями (1.5). Как реализовать подобное нагружение? Поскольку материальные точки движутся по замкнутым эллиптическим траекториям, для реализации необходимо выделить эллиптическую область и на границе задавать вектор скорости, направленный по касательной к границе. Величина скорости должна меняться по закону (1.5). Технически это осуществить довольно сложно. Проще сохранить только основные черты простейшей, однородной ситуации (преобразование эллиптической области в себя), а линейную скорость задавать постоянной. Такой процесс можно реализовать следующим образом. Поместим образец материала в прямой эллиптический цилиндр, ограниченный гибкой оболочкой. Нагружающее устройство выполним в виде жесткого вертикального цилиндра, во внутреннюю полость которого точно вставляется гибкая оболочка с образцом. Нагружение произведем относительным вращением внешнего цилиндра и оболочки (рис. 2,*а*). Указанный способ можно обобщить на более широкий класс областей: фигур постоянного диаметра, различных овалов и др.

Замена граничных условий (1.5) на

$$|\mathbf{v}| = v_0 = \mathrm{const}, \ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0 \tag{2.1}$$

порождает ряд вопросов. Во-первых, как неформально представить характер деформирования (2.1)? Для этого используем следующий прием. Пусть Γ, Γ_τ — конфигурации границы в моменты t и $t+\tau$, а D, D_τ — соответствующие области. Так как на границе заданы перемещения (скорости), то Γ и Γ_τ известны. Совместим обе конфигурации. В общем случае при наложении появляются области трех типов: $D^0 = D \cap D_\tau$, $D^- = D \backslash D^0$ и $D^+ = D_\tau \backslash D_0$. Грубо говоря, результирующая деформация от t до $t+\tau$ сводится к тому, что из D устраняются области несовместности D^- и добавляются области D^+. Поэтому их расположение и вид позволяют до решения задачи качественно определить характер процесса в целом и дать интегральную оценку деформаций как отношение площадей $D^+ \cup D^-$ к D. Здесь возникает одно обстоятельство. Как правило, смещения на границе задаются из соображений удобства описания кинематики нагружающих устройств. Поэтому в этих смещениях могут содержаться привходящие составляющие, отвечающие жестким переносу и повороту деформируемого тела. Их необходимо исключить. Ограничимся задачей (2.1) при малых временах τ. Заменим граничные смещения u_1, u_2 на $w_1 = u_1 - \Delta\omega x_2$, $w_2 = u_2 + \Delta\omega x_1$. Постоянную $\Delta\omega$ определим из условия

$$\frac{1}{L}\oint\limits_{\Gamma} \frac{\mathbf{w}\times\mathbf{r}}{r^2}\,dl = 0,$$

где L — длина границы. Смещения w_1, w_2 можно использовать для построения областей несовместности D^+, D^-. Видно (рис. 2,*б*), что их расположение таково, что в целом образец растягивается вдоль направления $x = -y$ и сжимается вдоль ортогонального направления $x = y$ (ср. с рис. 1).

При более детальном изучении удобнее исходить из краевых условий (2.1), хотя они и содержат неявно жесткий поворот. Это связано с тем, что в (2.1) граница не меняется и скорости на ней от времени не зависят. Поэтому для широкого класса материалов поля скоростей и напряжений внутри области выходят на стационарный режим. Помимо прямой экспериментальной проверки стационарности можно использовать следующий критерий. Подвергнем некоторый образец материала периодическому по деформациям нагружению. Если через определенное число циклов напряжения в образце перестают зависеть от его исходного состояния (т. е. память об исходной форме стирается) и сохраняется зависимость только от фазы внутри цикла, то материал можно отнести к указанному выше классу.

Итак, пусть течение (2.1) стационарно. Из-за симметрии материальный элемент в центре не испытывает переноса, а значит, и расширения. Неизменными будут и главные направления тензора скоростей деформаций, скорости растяжения и сжатия вдоль главных осей, а также ротор скорости. Это означает, что центральный элемент находится в описанных выше «идеальных» условиях сложного нагружения с непрерывным поворотом осей.

Постановка модельных и реометрических экспериментов предполагает регистрацию фактических данных о тензорах напряжений, деформаций и их скоростей. При исследовании сложного нагружения основной вопрос о соосности или степени разосности тензоров. Рассмотрим вначале способ определения компонент тензора деформаций. В данной ситуации нет никаких оснований считать повороты и деформации малыми. Для описания больших деформаций используются, как известно, различные меры, связанные с анализом изменения расстояний между парами близких точек [7]. Возможен и другой подход, когда внимание сосредоточивается не на относительных смещениях точек, а на преобразовании некоторых малых областей в целом без «разрешения» на смещения индивидуальных точек, принадлежащих этим областям.

Пусть a_i, x_i — лагранжевы и эйлеровы координаты точки, u_i — компоненты вектора смещения:

$$x_i = a_i + u_i(a_j, t), \ i, \ j = 1,2. \tag{2.2}$$

Зафиксируем при $t = 0$ все материальные точки внутри круга с радиусом ε и центром $a_i = a_i^0$. Величину ε можно считать малой, но на производные $\partial u_i/\partial a_j = u_{i,j}$ никаких ограничений накладывать не будем. В процессе деформирования окружность переходит в эллипс:

$$(1 + 2E_{22}) y_1^2 - 4E_{12}y_1y_2 + (1 + 2E_{11}) y_2^2 = \delta^2, \tag{2.3}$$

где $y_i = [x_i - a_i^0 - u_i(a_j^0, t)]/\varepsilon$; $E_{11} = u_{1,1} + (u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2)/2$; $E_{22} = u_{2,2} +$

$$+ (u_{2,1}^2 + u_{2,2}^2)/2; \quad 2E_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{2,1} + u_{1,2}u_{2,2};$$

$$\delta = 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1}.$$

Нетрудно доказать, что δ — инвариант, а E_{ij} — компоненты тензора второго ранга E. Тензор деформаций E фактически совпадает с тензором Фингера [8] и отличается от тензора Грина заменой производных $\partial u_i/\partial a_j$ на $\partial u_j \partial a_i$. Механический смысл инварианта δ и компонент E определяется равенством (2.3). Главные направления тензора совпадают с осями эллипса, в который преобразуется окрестность точки, представляющая собой круг:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2E_{12}/(E_{11} - E_{22}). \tag{2.4}$$

Здесь α — угол между главными направлением и осью Ox_1.

Для второго крайнего случая, когда в качестве «окрестности» берется отрезок $a_1 = a_1^0 + \rho \cos \beta_0$, $a_2 = a_2^0 + \rho \sin \beta_0$, $|\rho| < \varepsilon$, соотношения (2.2) приводят к формуле для угла поворота

$$\operatorname{tg}(\beta - \beta_0) = \frac{u_{2,1} + (u_{2,2} - u_{1,1}) \operatorname{tg} \beta_0 - u_{1,2} \operatorname{tg}^2 \beta_0}{(1 + u_{1,1}) + (u_{1,2} + u_{2,1}) \operatorname{tg} \beta_0 + (1 + u_{2,2}) \operatorname{tg}^2 \beta_0}.$$

Тензор E позволяет непосредственно проследить характер деформирования материальных объемов в процессе нагружения тела. Например, для течения (1.4) $\operatorname{tg} 2\alpha = (\Omega/\lambda) \operatorname{tg} \lambda t$, $\delta = 1$ и полуоси эллипса, отнесенные к радиусу исходного круга, равны $1 \pm (k/\Omega)\sin \Omega t$. Здесь для сокращения записей принято, что $k \ll \Omega$.

Из определения (2.3) следует способ экспериментального измерения компонент E_{ij}. Пометим в начальный момент времени все точки внутри достаточно малого круга. Будем фиксировать параметры эллипса, в который преобразуется круг в процессе нагружения тела. Уравнение (2.3) позволяет по этим данным восстановить компоненты E_{ij}. Выше тензор E и вводился в связи с тем, что измерения параметров эллипса осуществить проще, чем относительные смещения близких точек. Для центрального элемента измерения подтверждают выполнение равенств (1.4) и, кроме того, позволяют определить скорость поворота, величину и главное направление тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_1$ в течении (2.1).

Перейдем к вопросу о напряжениях. Поместим в центр образца плавающие датчики нормальных и касательных напряжений. Датчики измеряют напряжения между одними и теми же материальными частицами. В стационарном режиме соответствующие диаграммы периодические по времени. Ориентация датчика, которой соответствует экстремум нормальных или нулевое значение касательных компонент, определяет главное направление тензора напряжений σ_1. По соотношению направлений σ_1 и $\dot{\varepsilon}_1$ можно судить о степени соосности тензоров.

Таким образом, схема нагружения (2.1) позволяет полностью заменить однородную схему (1.5). Кроме того, здесь обнаруживается один эффект, представляющий самостоятельный интерес. Предположим, что между оболочкой и материалом обеспечено прилипание (это условие не-

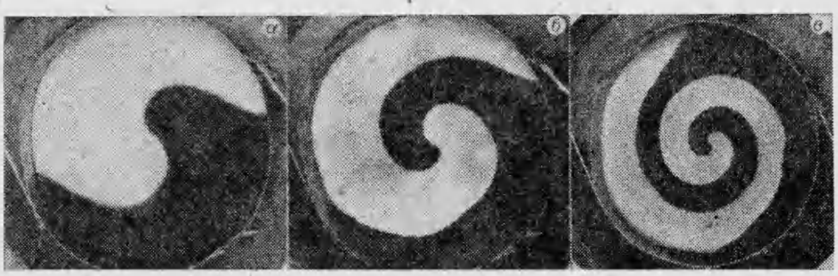

Рис. 3

принципиально). Согласно (2.1), через время L/v_0 все граничные точки совершат полный оборот и вернутся в свое исходное положение. Очевидно, что в упругом образце и все внутренние точки также вернутся в свое первоначальное положение. Для широкого класса неупругих материалов это не так: за один цикл внутренние точки описывают почти замкнутые траектории, но к первоначальному положению не возвращаются. Это приводит к тому, что с увеличением числа циклов «остаточные» смещения накапливаются. С точки зрения наблюдателя, связанного с частицей на границе, процесс выглядит как направленный перенос материальных элементов внутри области (рис. 3, сухой песок; в исходном состоянии половина образца окрашена в черный цвет). Эффект направленного переноса наблюдался для вязких жидкостей, сыпучих, пластических и ряда других материалов, обладающих более сложной реологией. Основные черты этого процесса можно проследить на модели ньютоновской вязкой жидкости. Задача сводится к решению стационарных уравнений Навье — Стокса

$$\nu\Delta u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.5}$$

$$\nu\Delta v - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

внутри области $x^2/(1+m)^2 + y^2/(1-m)^2 \leqslant 1$ при условии, что на границе заданы обе компоненты скорости $\mathbf{v} = \{u, v\}$, удовлетворяющие равенствам (2.1), где $v_0 = 1$ (см. рис. 2, *a*). Здесь использованы стандартные обозначения: x, y — декартовы координаты; ν — вязкость; ρ, p — плотность и давление; Δ — оператор Лапласа. Ограничимся случаем большой вязкости (число Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$) и малых эксцентриситетов ($m \ll 1$). Методом малого параметра система сводится к последовательности бигармонических уравнений относительно членов разложения функции тока. Используя схему [9], получим

$$\begin{aligned} u = {} & -y + m(-3y + 2y^3) + m^2\left(\frac{7}{4}y + \frac{7}{2}y^3 - \frac{9}{4}y^5 - \right. \\ & \left. - \frac{21}{2}x^2y + \frac{15}{2}x^2y^3 + \frac{15}{4}x^4y\right) + m^3\left(\frac{87}{8}y - \frac{57}{4}y^3 - \frac{33}{8}y^5 + \right. \\ & \left. + \frac{5}{2}y^7 + \frac{165}{4}x^2y^3 - \frac{165}{8}x^4y - \frac{105}{4}x^2y^5 + \frac{35}{4}x^6y\right) + \\ & + \frac{\mathrm{Re}\, m}{16}(x - 2x^3 + x^5 - 6xy^2 + 5xy^4 + 6x^3y^2), \\ v = {} & x + m(-3x + 2x^3) + m^2\left(-\frac{7}{4}x - \frac{7}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^5 + \frac{21}{2}xy^2 - \right. \\ & \left. - \frac{15}{2}x^3y^2 - \frac{15}{4}xy^4\right) + m^3\left(\frac{87}{8}x - \frac{57}{4}x^3 - \frac{33}{8}x^5 + \frac{5}{2}x^7 + \right. \\ & \left. + \frac{165}{4}x^3y^2 - \frac{165}{8}xy^4 - \frac{105}{4}x^5y^2 + \frac{35}{4}xy^6\right) + \frac{\mathrm{Re}\, m}{16}(-y + 2y^3 - \\ & - y^5 + 6x^2y - 5x^4y - 6x^2y^3). \end{aligned} \tag{2.6}$$

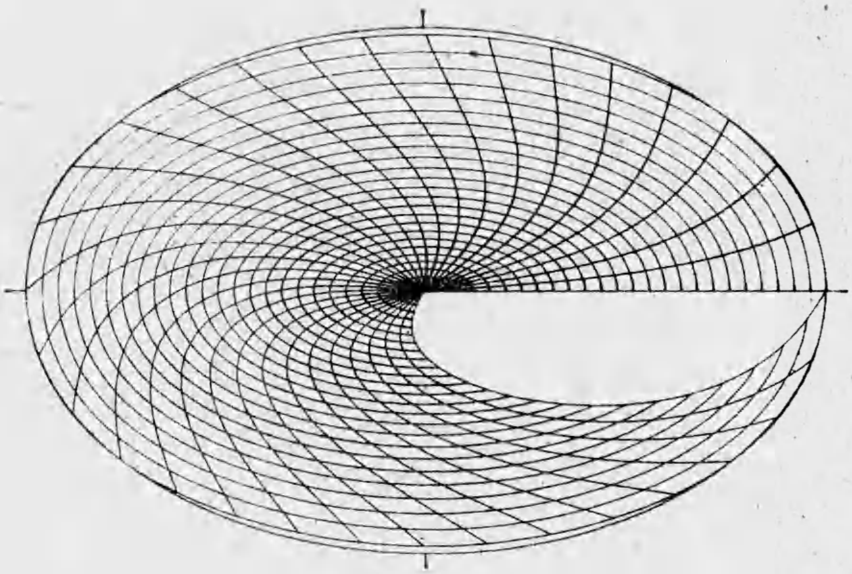

Рис. 4

Перенос частиц и характер деформирования материальных объемов определялись численным интегрированием * системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = u(x,\ y),\ dy/dt = v(x,\ y). \tag{2.7}$$

Расчеты показали, что частицы движутся вокруг центра по замкнутым траекториям. Однако периоды обращения на различных траекториях различны. На рис. 4 показаны траектории и положения частиц, расположенных вначале на большой полуоси эллипса ($m = 0{,}2$). Различие в периодах приводит к тому, что внутренние деформации с увеличением времени неограниченно растут. Причем это увеличение происходит в условиях, когда внешние деформации малы (порядка m). Например, области, первоначально близкие к полукругу, в процессе деформирования приобретают спиралевидную форму (см. рис. 3, 4). С увеличением числа циклов они все больше закручиваются вокруг центра и в пределе вырождаются в две бесконечно тонкие и длинные спирали, которые вложены друг в друга так, что, последовательно чередуясь, целиком заполняют исходную двумерную область.

Для вязких жидкостей роль малых параметров m и Re в развитии течения различна: параметр m входит в ряд (2.6) без коэффициента Re, а Re фигурирует только в произведении с m. Поэтому роль последнего в формировании «остаточных» смещений на фоне параметра m незначительна. Более того, если перейти к пределу $\mathrm{Re} \to 0$ ($\nu \to \infty$), то кинематика течения по сравнению с вариантом $\mathrm{Re} \ll 1$ практически не изменится даже количественно.

Далее, предельное решение $\mathrm{Re} = 0$ — это фактически решение следующей линейной упругой задачи: смещение на границе эллиптической области равно $v_0 \Delta t$ и направлено по касательной к границе, а смещения внутри области равны $u(x,\ y)\Delta t$, $v(x,\ y)\Delta t$, где Δt — сколь угодно малый параметр. Сделаем новый шаг по параметру нагружения, т. е. снова дадим приращения граничных смещений $v_0 \Delta t$, направленные вдоль границы. Так как очертание границы после первого шага не изменилось и, кроме того, все деформации и повороты малы (порядка Δt), то возникает искушение для нового шага воспользоваться прежним решением. Тогда резуль-

* Эксперименты и численные расчеты проводились совместно с А. П. Бобряковым и В. И. Крамаренко.

тирующее смещение точки (a_1, a_2) должно равняться

$$\{u(a_i)\Delta t + u(a_1 + u(a_i)\Delta t,\ a_2 + v(a_i)\Delta t)\Delta t,$$
$$v(a_i)\Delta t + v(a_1 + u(a_i)\Delta t,\ a_2 + v(a_i)\Delta t)\Delta t\}$$

и т. д. Суммируя достаточное число шагов от $t = 0$ до t и устремляя Δt к нулю, находим, что поле упругих смещений должно определяться интегрированием системы (2.6), (2.7) при $\mathrm{Re} \equiv 0$ и начальных условиях $u \equiv v \equiv 0$. Однако интегрирование приводит к тому, что при $t = L/v_0$ внутренние точки тела в исходное состояние не возвращаются. Полученный результат можно рассматривать как пример, показывающий, что решение геометрически нелинейной задачи нельзя свести к суммированию пошаговых линейных решений даже в условиях, когда граница области всегда неизменна и шаги по параметру нагружения, а также соответствующие деформации и повороты сколь угодно малы. В общем случае этот вопрос исследовался в [10].

С другой стороны, при корректных постановке и численной реализации пошаговое решение должно приводить к тому, что «остаточные» смещения за полный цикл будут равны нулю. Этот факт можно использовать как тестовый для проверки уравнений, алгоритмов и программ численного решения упругих геометрически нелинейных задач. Указанный тест относится к существенно двумерной постановке, большим поворотам и деформациям (если параметр m немал). В задаче для эллиптической области с краевыми условиями (1.5) априорно известна бо́льшая информация: помимо отсутствия «остаточных» смещений распределение деформаций и напряжений должно быть однородным (исключая случаи, когда материал неустойчив и возможна бифуркация). Эти факты можно взять как тестовые и для неупругих постановок.

Таким образом, рассмотренные методика и способ реализации сложных нагружений могут быть использованы для исследования сыпучих, упруговязкопластических и других материалов, для которых неприменима классическая методика испытания тонкостенных трубчатых образцов [11]. Решения для эллиптических областей с краевыми условиями (1.5) или (2.1) тестовые для проверки численных алгоритмов и постановок геометрически нелинейных задач. Для широкого класса неупругих сред обнаруживается эффект дифференциального вращения или направленного переноса, представляющий интерес также для ряда технических приложений [12, 13]. Описанный процесс сложного нагружения можно интерпретировать как модель деформирования Земли под действием приливных сил. В этом случае эффект дифференциального вращения означает возможность глобального механизма переноса масс Земли и ее жидкого ядра вследствие движения приливных волн [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е., И. А. Кибель, Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.
2. **Жуков А. М., Работнов Ю. Н.** Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении.— Инж. сб., 1954, № 8.
3. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Однородный сдвиг сыпучего материала. Локализация деформаций.— ФТПРПИ, 1983, № 5.
4. **Ломизе Г. М., Иващенко И. Н., Захаров М. Н.** Деформируемость глинистого грунта в условиях сложного нагружения.— Основания, фундаменты и механика грунтов, 1970, № 6.
5. **Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И.** Математические модели упругопластических тел. — В кн.: Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука, 1985.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика.— М.: Наука, 1973.
7. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
8. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред.— М.: ИЛ, 1963.
9. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
10. **Слепян Л. И., Витязева Е. В.** Об одном приближенном методе решения задач теории упругости в случае больших деформаций.— ДАН СССР, 1984, т. 277, № 3.

11. **Шемякин Е. И., Ревуженко А. Ф. и др.** Устройство для испытания образцов сыпучих материалов.— БИ, 1984, № 48.
12. **Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И., Бобряков А. П.** Способ смешивания сыпучих материалов.— БИ, 1985, № 46.
13. **Шемякин Е. И., Ревуженко А. Ф. и др.** Способ получения композиционных заготовок и устройство для его осуществления.— БИ, 1985, № 47.
14. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** О возможном механизме перемещения масс Земли.— ДАН СССР, 1983, т. 272, № 5.

Поступила 2/VII 1985 г.

УДК 534.2 + 539.374

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В МАКСВЕЛЛОВСКОЙ СРЕДЕ

А. И. Малкин, Н. Н. Мягков

(*Москва*)

Исследование распространения нестационарных нелинейных волн в процессах взрывной или ударной деформации металлов связано со значительными математическими трудностями и требует, как правило, больших затрат машинного времени. Во многих практических приложениях волны, возникающие в металле при взрыве и ударе, можно считать слабыми в смысле малости относительного изменения плотности вещества в волне [1]. Поэтому значительный интерес здесь представляет разработка приближенных методов анализа нелинейных волн, основанных на разложении решения по заданному малому параметру.

Для решения нелинейных волновых задач в гидродинамике и теории упругости в настоящее время развит эффективный асимптотический метод многих масштабов (МММ) [2—5], позволяющий находить равномерно пригодные на некотором большом промежутке времени приближения к решению сложных исходных систем уравнений. Необходимость учета прочностных эффектов в металлах при взрывной деформации или ударе с умеренными скоростями требует распространения МММ на более сложные системы уравнений, описывающих, например, поведение максвелловской среды [6], которая при небольших напряжениях упруга, а при достаточно больших — течет. Однако применение МММ к волновым задачам в таких средах не является формальной процедурой. Это связано с резкой зависимостью от напряжения кинетических характеристик среды (например, времени релаксации касательных напряжений) в области упругопластического перехода. Последнее препятствует прямому разложению упруговязких членов, ответственных за кинетику, в ряд по малому параметру ε (характеризующему относительное изменение плотности вещества в волне) из начального условия.

Цель данной работы — построение на основе техники многомасштабных разложений приближенных уравнений для описания плоских нелинейных волн деформации в изотропной максвелловской среде. На основе предложенного приближенного подхода решена задача о распространении ударной волны при контактном взрыве на границе полупространства.

1. В нелинейной теории волн МММ применяется для факторизации сложных исходных систем уравнений на систему независимых уравнений для функций, являющихся аналогами обычных римановских инвариантов, т. е. постоянных в нулевом приближении вдоль своих характеристических направлений [4, 5]. В основе метода лежит предположение о медленности изменения этих функций, вызванного нелинейностью и кинетическими процессами в среде.

Исходные одномерные уравнения нелинейной теории упругости [6, 7], описывающие в главных осях поведение изотропной упруговязкой максвелловской среды, запишем в лагранжевой системе координат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \mu_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2T}\varphi_k\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_k} + \frac{1}{\rho T}\left(\mu_2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right),$$

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = \varphi_l\ (l = 2,\ 3), \quad \varphi_k = -\frac{1}{\tau(\varepsilon_i, S)}\left[\varepsilon_k - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\rho}{\rho_{\varepsilon_1} + \rho_{\varepsilon_2} + \rho_{\varepsilon_3}}\right)\right]$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3),$$