

УДК 539.375

МИНИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ КРУГОВОГО ДИСКА, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОГО ЗАДАНЫ СМЕШАННЫЕ УСЛОВИЯ

В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1073 Баку, Азербайджан
Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан
E-mail: mir-vagif@mail.ru

На основе минимаксного критерия проведен теоретический анализ нормального перемещения точек на границе кругового диска, ослабленного произвольно размещенными прямолинейными трещинами. Предложены критерий и метод решения задачи о разрушении кругового диска, на границе которого заданы смешанные условия. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая минимизировать коэффициенты интенсивности напряжений. Найдено нормальное перемещение точек на границе кругового диска, при котором увеличивается несущая способность диска.

Ключевые слова: круговой диск, смешанные граничные условия, трещины, функция перемещений точек границы диска, минимизация параметров разрушения.

DOI: 10.15372/PMTF20180222

Введение. Для анализа надежности круговых дисков, широко используемых в современном машиностроении и энергетике, необходимо проводить исследование их напряженно-деформированного состояния и разрушения. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в дисках применяются при решении прикладных задач, например при выборе оптимальных размеров дисков и допустимых рабочих нагрузок. Исследованию прочности дисков посвящено большое количество работ (см. работы [1, 2] и библиографию к ним).

В работах [3–9] построена модель зарождения и развития когезионных трещин в круговых дисках при смешанных граничных условиях.

При проектировании новых конструкций необходимо учитывать возможность возникновения трещин в деталях машин и проводить предельный анализ, чтобы определить условия, при которых исходные трещины не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Минимальный размер исходной трещины следует рассматривать в качестве проектной характеристики материала. При исследовании поверхностных трещин, являющихся наиболее опасными, используются численные методы конечных элементов [10, 11].

На современном этапе развития техники большое значение имеет оптимальное проектирование деталей машин, обеспечивающее увеличение эффективности их работы. Представляет интерес решение задачи определения функции перемещений точек границы кругового диска, при которой созданное этими перемещениями поле напряжений замедляет рост трещин в диске.

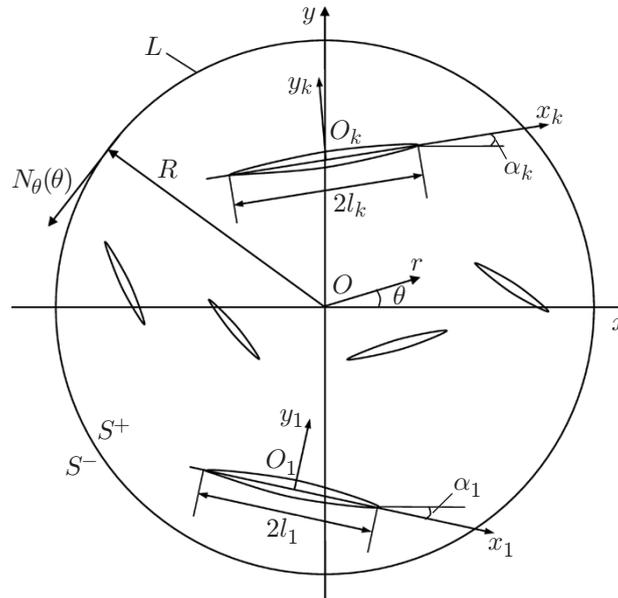


Рис. 1. Схема задачи для кругового диска

Постановка задачи. Будем полагать, что в диске имеется N прямолинейных трещин длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). В центре каждой трещины находится начало локальной системы координат $x_k O_k y_k$, ось x_k которой совпадает с линией трещины и образует угол α_k с осью x (рис. 1). Берега трещин свободны от внешних нагрузок.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = N_\theta(\theta), \quad v_r = f_r(\theta) \quad \text{на } L, \\ \sigma_{y_k} = 0, \quad \tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на } L_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

где L — круговая граница диска; L_k — берега k -й трещины.

Требуется определить нормальное перемещение $v_r(\theta)$ на границе диска таким образом, чтобы созданное им поле напряжений препятствовало развитию трещин.

Случай одной трещины. Область, заключенную между окружностью L радиусом R и прямолинейной трещиной $L_1 = [a, b]$ ($\alpha_1 = 0$), расположенной на оси абсцисс, обозначим через S^+ , область, дополняющую область S^+ до полной комплексной плоскости, — через S^- (рис. 2).

Напряженно-деформированное состояние диска в плоской задаче описывается двумя аналитическими функциями комплексной переменной $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [12].

С учетом принятых предположений решение задачи сводится к определению двух функций комплексной переменной $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, аналитических в области S^+ и удовлетворяющих следующим граничным условиям на контуре L :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (\varkappa \Phi(t) - \overline{\Phi(t)} + (R^2/t^2) [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}]) = 2\mu f_r'(t), \\ \operatorname{Im} (\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - (t^2/R^2) [\bar{t} \Phi'(t) + \Psi(t)]) = -N_\theta(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν — коэффициент Пуассона материала диска; μ — модуль сдвига материала.

Условия для напряжений на берегах трещины L_1^+ и L_1^- имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) + \bar{\Phi}^-(x) + x \bar{\Phi}'^-(x) + \bar{\Psi}^-(x) = 0 \quad \text{на } L_1^+, \\ \Phi^-(x) + \bar{\Phi}^+(x) + x \bar{\Phi}'^+(x) + \bar{\Psi}^+(x) = 0 \quad \text{на } L_1^-. \end{aligned}$$

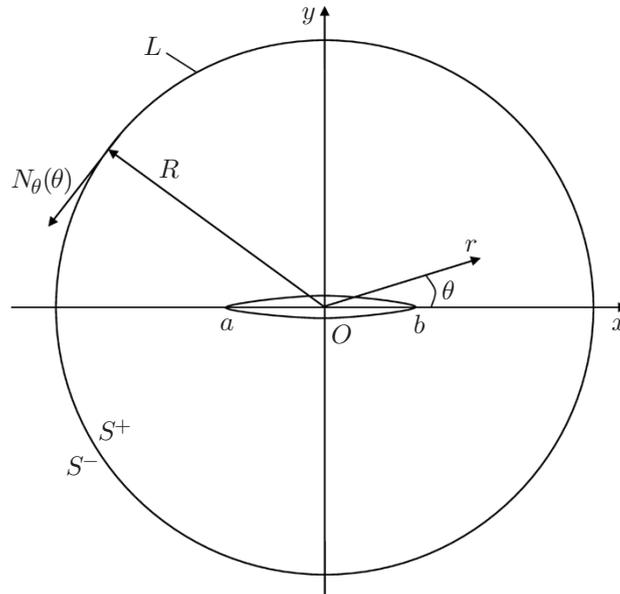


Рис. 2. Схема задачи в случае одной трещины

Для того чтобы найти функции нормального перемещения $v_r(\theta)$ на L , постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) определения искомой функции нормального перемещения. В качестве критерия разрушения материала диска можно принять максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины.

Нормальное перемещение $v_r(\theta)$ будем определять таким образом, чтобы максимальный коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины имел минимальное значение.

Не нарушая общности поставленной задачи, будем полагать, что искомая функция нормального перемещения $f_r(\theta)$ может быть представлена в виде ряда Фурье. Следовательно, коэффициенты V_k разложения искомой функции нормального перемещения нужно выбрать таким образом, чтобы обеспечивался минимум максимального значения коэффициента интенсивности напряжений

$$\min_{\eta \in C} \max K_p(\eta, a, b),$$

где $\eta = (a_k, b_k)$ — проектные параметры диска; C — область ограничений проектных параметров. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию нормального перемещения $f_r(\theta)$ на границе диска.

Переходя в соотношениях (1) к сопряженным функциям, после ряда преобразований получаем граничные условия на контуре L в виде

$$\begin{aligned} (\varkappa - 1) [\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] + \frac{R^2}{t^2} [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] + \frac{t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) &= 4\mu f_r'(t) \quad \text{на } L, \\ -\frac{R^2}{t^2} [t \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] + \frac{t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) &= 2iN_\theta(t) \quad \text{на } L. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом (2) на окружности L выполняется соотношение

$$(\varkappa - 1) [\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] + \frac{2t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) = 2[2\mu f_r'(t) + iN_\theta(t)]. \quad (3)$$

Подставляя в равенство (3) функции $f_r(t)$ и $N_\theta(t)$ в виде рядов Фурье, получаем

$$f_r(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V_\nu \left(\frac{t}{R}\right)^\nu, \quad iN_\theta(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} T_\nu \left(\frac{t}{R}\right)^\nu,$$

где T_ν ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — известные комплексные коэффициенты; V_k — искомые коэффициенты. В результате имеем

$$\begin{aligned} (\varkappa - 1)[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] + 2 \frac{t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) = \\ = 2 \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(T_\nu + \frac{2\mu(\nu+1)}{R} V_{\nu+1} \right) \left(\frac{t}{R}\right)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(T_{-\nu} - \frac{2\mu(\nu-1)}{R} V_{-\nu+1} \right) \left(\frac{R}{t}\right)^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем неизвестную вспомогательную функцию $\omega(t) \in H$ (условие Гельдера) в виде

$$2\omega(t) = (\varkappa - 1)[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] - \frac{2t^2}{R^2} \left(\frac{R^2}{t} \Phi'(t) + \Psi(t) \right) \quad \text{на } L. \quad (5)$$

Складывая соотношения (4) и (5), находим

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \frac{\omega(t)}{\varkappa - 1} + \frac{1}{\varkappa - 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{2\mu(\nu+1)}{R} V_{\nu+1} + T_\nu \right) \left(\frac{t}{R}\right)^\nu + \\ + \frac{1}{\varkappa - 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(T_{-\nu} - \frac{2\mu(\nu-1)}{R} V_{-\nu+1} \right) \left(\frac{R}{t}\right)^\nu \quad \text{на } L. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), имеем

$$\Psi(t) = Q(t) + R_1(t) + R_2(t) \quad \text{на } L. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{R^2}{2t^2} [\omega(t) + \overline{\omega(t)}] - \frac{R^2}{(\varkappa - 1)t} \omega'(t), \\ R_1(t) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu-2}{\varkappa-1} \right) T_{\nu+2} - \frac{1}{2} \bar{T}_{-\nu-2} + \frac{\mu(\nu+1)}{R} V_{-\nu-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu(\nu+3)}{R} \left(1 - \frac{\nu-2}{\varkappa-1} \right) V_{\nu+3} \right] \left(\frac{t}{R}\right)^\nu, \\ R_2(t) &= -\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\mu(\nu-1)}{R} \bar{V}_{\nu-1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{\nu-2} \right) \left(\frac{R}{t}\right)^\nu + \\ &\quad + \sum_{\nu=3}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu-2}{\varkappa-1} \right) T_{-\nu+2} - \frac{\mu(\nu-3)}{R} \left(1 + \frac{\nu-2}{\varkappa-1} \right) V_{-\nu+3} \right] \left(\frac{R}{t}\right)^\nu + \\ &\quad + \left(\frac{\mu}{R} V_1 + \frac{1}{2} T_0 \right) \frac{R^2}{t^2} + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa-1} \right) T_1 - \frac{1}{2} \bar{T}_{-1} - \frac{\mu}{(\varkappa-1)R} V_1 + \frac{2\mu}{R} V_2 \right] \frac{R}{t}. \end{aligned}$$

Из соотношений (6), (7) на основе теоремы об аналитическом продолжении и с учетом свойств интеграла типа интеграла Коши получаем

$$\Phi_*(z) = \begin{cases} \Phi(z) - \frac{1}{\varkappa-1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\varkappa-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{2\mu(\nu+1)}{R} V_{\nu+1} + T_\nu \right) \left(\frac{z}{R}\right)^\nu, & z \in S^+, \\ -\frac{1}{\varkappa-1} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt + \frac{1}{\varkappa-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(T_{-\nu} - \frac{2\mu(\nu-1)}{R} V_{-\nu+1} \right) \left(\frac{R}{z}\right)^\nu, & z \in S^-, \end{cases}$$

$$\Psi_*(z) = \begin{cases} \Psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{Q(t)}{t-z} dt - R_2(z), & z \in S^+, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q(t)}{t-z} dt + R_2(z), & z \in S^-. \end{cases} \quad (8)$$

В соотношениях (8) функции $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$ являются аналитическими в разрезанной вдоль отрезка $L_1 = [a, b]$ (трещины) полной комплексной плоскости и исчезают на бесконечности: $\Phi_*(\infty) = 0$, $\Psi_*(\infty) = 0$.

Вспомогательную неизвестную функцию $\omega(t) \in H$ на L будем искать в виде ряда Фурье

$$\omega(t) = \alpha_0^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\alpha_{\nu}^* \left(\frac{t}{R}\right)^{\nu} + \alpha_{-\nu}^* \left(\frac{R}{t}\right)^{\nu} \right], \quad (9)$$

где α_{ν}^* ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — неизвестные комплексные коэффициенты.

Подставляя соотношение (9) в первые формулы систем (8) и используя интегральную теорему Коши, для искомых функций получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_*(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}, & z \in S^+, \\ \Psi(z) &= \Psi_*(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}, & z \in S^-. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{\nu} &= \frac{1}{\varkappa - 1} \left(\alpha_{\nu} + T_{\nu} + \frac{2\mu(\nu+1)}{R} V_{\nu+1} \right), \\ D_{\nu} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+2}{\varkappa-1} \right) \alpha_{\nu+2} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{-\nu-2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu+2}{\varkappa-1} \right) T_{\nu+2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{T}_{-\nu-2} + \frac{\mu(\nu+3)}{R} \left(1 - \frac{\nu+2}{\varkappa-1} \right) V_{\nu+3} + \frac{\mu(\nu+1)}{R} \bar{V}_{-\nu-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следуя [12], для определения функции $\Phi_*(z)$ и, следовательно, функции $\Psi_*(z)$ получаем задачу линейного сопряжения

$$\begin{aligned} [\Phi_*(t) - \Omega_*(t)]^+ - [\Phi_*(t) - \Omega_*(t)]^- &= 0, \\ [\Phi_*(t) + \Omega_*(t)]^+ + [\Phi_*(t) + \Omega_*(t)]^- &= f(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_*(z) &= \bar{\Phi}_*(z) + z \bar{\Phi}'_*(z) + \bar{\Psi}_*(z), & f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_k + p_k) \left(\frac{t}{R}\right)^k, \\ \beta_k &= -2 \left[\frac{1}{\varkappa-1} \alpha_k + \frac{k+1}{\varkappa-1} \bar{\alpha}_k - \frac{1}{2} \alpha_{-k-2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{k+2}{\varkappa-1} \right) \bar{\alpha}_{k+2} \right], \\ p_k &= -2 \left[\frac{1}{\varkappa-1} T_k + \frac{k+1}{\varkappa-1} \bar{T}_k - \frac{1}{2} T_{-k-2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k+2}{\varkappa-1} \right) \bar{T}_{k+2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu(k+1)}{(\varkappa-1)R} V_{k+1} + \frac{2\mu(k+1)^2}{(\varkappa-1)R} \bar{V}_{k+1} + \frac{\mu(k+1)}{R} V_{-k-1} + \frac{\mu(k+3)}{R} \left(1 + \frac{k+2}{\varkappa-1} \right) \bar{V}_{k+3} \right]. \end{aligned}$$

Искомое решение краевой задачи (12) записывается в виде

$$\Phi_*(z) = \Omega_*(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} f(t)}{t-z} dt, \tag{13}$$

где

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O(1/z), \quad z \rightarrow \infty. \tag{14}$$

Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви аналитической функции, для которой выполняется условие (14) на верхнем берегу трещины. С использованием решения (13) для коэффициентов интенсивности напряжений имеем

$$\begin{aligned} K_I^a + iK_{II}^a &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b f(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx, \\ K_I^b + iK_{II}^b &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(b-a)}} \int_a^b f(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx. \end{aligned} \tag{15}$$

В соотношениях (15) в функцию $f(x)$ входят искомые коэффициенты α_k^* , V_k .

Подставим (10), (11) с учетом (13) и разложений

$$\sqrt{(t-a)(t-b)} = t \sum_{r=0}^{\infty} M_r \left(\frac{R}{t}\right)^r, \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = \sum_{r=0}^{\infty} M_r^* \left(\frac{R}{t}\right)^{r+1}$$

в условие (5). После ряда преобразований условие (5) приводится к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{t}{R}\right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \left(\frac{R}{t}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\frac{t}{R}\right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^* \left(\frac{R}{t}\right)^m.$$

Приравнявая в обеих частях полученного соотношения коэффициенты с одинаковыми степенями t/R и R/t , получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно α_k^*

$$A_0 + A_0^* = C_0 + C_0^* \quad (m = 0), \quad A_m = C_m, \quad A_m^* = C_m^* \quad (m = 1, 2, \dots).$$

(Вследствие громоздкости выражения для A_m , A_m^* , C_m , C_m^* ($m = 0, 1, 2, \dots$) в данной работе не приводятся.)

В поставленной задаче оптимального проектирования коэффициенты $V_k = a_k + ib_k$ подлежат определению. Недостающие уравнения строятся из условия минимума максимального значения коэффициента интенсивности напряжений ($\eta \in C$) и условия

$$K_{p \max} \leq K_{th},$$

где K_{th} — пороговое значение вязкости разрушения материала диска, определяемое в эксперименте.

Коэффициент интенсивности напряжений (15) (целевая функция) линейно зависит от параметров управления (проектных параметров). Таким образом, с использованием минимаксного критерия рассматриваемая задача оптимизации сводится к задаче линейного программирования.

Численный расчет выполнялся с использованием симплексного алгоритма. В разложении функции $g(\theta)$ нормального перемещения точек внешнего контура удерживались

семь членов. Расчеты проводились для турбинного диска, изготовленного из стали марки ЭИ413. Радиус диска принят равным $R = 0,47$ м. В результате расчетов определены коэффициенты Фурье оптимальной функции $g(\theta)$ перемещений точек внешнего контура диска при значении поверхностной нагрузки $N_\theta = 350$ МПа: $a_0 = 0,1192$ мм, $a_1 = 0,0863$ мм, $a_2 = 0,0754$ мм, $a_3 = 0,0671$ мм, $a_4 = 0,0532$ мм, $a_5 = 0,0487$ мм, $a_6 = 0,0241$ мм, $a_7 = 0,0159$ мм, $b_1 = 0,0769$ мм, $b_2 = 0,0498$ мм, $b_3 = 0,0433$ мм, $b_4 = 0,0382$ мм, $b_5 = 0,0257$ мм, $b_6 = 0,0219$ мм, $b_7 = 0,0108$ мм.

Случай произвольного числа трещин. Пусть в диске имеется N прямолинейных трещин длиной $2l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) (см. рис. 1). Рассмотрим задачу оптимального проектирования, а именно задачу определения функции нормального перемещения точек границы кругового диска, при которой максимальный коэффициент интенсивности напряжений принимает минимальное значение в окрестности вершин всех трещин.

Решение задачи для рассматриваемого случая аналогично решению задачи в случае одной трещины, за исключением того, что для определения функций $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$ используется метод построения в явной форме потенциалов Колосова — Мухелишвили, соответствующих неизвестным перемещениям вдоль трещин. Задача сводится к определению двух аналитических функций комплексной переменной $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, удовлетворяющих граничным условиям (1) и

$$\Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (16)$$

Функции $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$ будем искать в виде [11]

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k(t)}{t - z_k} dt, \quad \Psi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left[\frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt, \quad (17)$$

$$T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0, \quad z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0).$$

Здесь $g_k(x_k)$ — искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин:

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{i(1 + \nu)} \frac{\partial}{\partial x} [u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0) + i(v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0))], \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Для определения неизвестных функций $g_k(x_k)$ используются краевые условия (16) на отрезках $y_k = 0$, $-l_k \leq x_k \leq l_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Требую выполнения краевых условий (16) на берегах трещин для функций (10), (18), получаем систему N сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} [K_{nk}(t, x) g_k(t) + L_{nk}(t, x) \overline{g_k(t)}] dt = \pi F^*(x), \quad (19)$$

$$|x| \leq l_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$K_{nk}(t, x) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} \right),$$

$$L_{nk}(t, x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{\bar{T}_k - \bar{X}_n} - \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right),$$

$$F^*(x) = -[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x \overline{\Phi'_0(x)} + \overline{\Psi_0(x)}],$$

$$\Phi_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu} \left(\frac{z}{R}\right)^{\nu}.$$

К системе сингулярных интегральных уравнений (19) для внутренних трещин следует добавить условия однозначности смещений при обходе контуров трещин

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Сингулярные интегральные уравнения (19) при дополнительных условиях (20) сводятся к системе $N \times M$ алгебраических уравнений для определения $N \times M$ неизвестных значений $g_k(t_m)$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$) [13, 14]:

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N l_k [g_k(t_m) K_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \overline{g_k(t_m)} L_{nk}(l_k t_m, l_n x_r)] = F^*(x_r),$$

$$\sum_{m=1}^M g_n(t_m) = 0, \quad (21)$$

где $t_m = \cos(\pi(2m-1)/(2M))$; $m = 1, 2, \dots, M$; $n = 1, 2, \dots, N$; $x_r = \cos(\pi r/M)$; $r = 1, 2, \dots, M-1$.

Переходя в алгебраических уравнениях (21) к комплексно-сопряженным величинам, получаем еще $N \times M$ алгебраических уравнений. В правых частях линейных алгебраических систем (21) в функцию $F^*(x_r)$ входят неизвестные коэффициенты α_k^* и V_k .

Из соотношений (10), (11), (17), (21) можно получить окончательное решение задачи, если известны коэффициенты α_k^* , V_k ($k = 0, \pm 1, \dots$). Бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_k^* получаем аналогично тому, как это сделано в случае одной трещины. В результате имеем бесконечные линейные алгебраические системы типа (16).

Полученные системы уравнений относительно $g_k(t_m)$ ($k = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$), α_{ν}^* ($\nu = 0, \pm 1, \dots$) позволяют при заданном перемещении точек на границе кругового диска определить напряженно-деформированное состояние диска при наличии произвольного числа трещин в его материале.

Используя решение алгебраических систем и формулы

$$K_{In} - iK_{II n} = \sqrt{\pi l_n} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_n^0(t_m) \operatorname{ctg} \left(\frac{2m-1}{4M} \pi \right)$$

для правой вершины трещины и

$$K_{In} - iK_{II n} = \sqrt{\pi l_n} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_n^0(t_m) \operatorname{tg} \left(\frac{2m-1}{4M} \pi \right)$$

для левой вершины трещины ($n = 1, 2, \dots, N$), можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений.

С использованием минимаксного критерия рассматриваемая задача оптимизации в случае произвольного числа трещин, так же как и в случае одной трещины, сводится к задаче линейного программирования с учетом указанных выше дополнительных ограничений.

Численный расчет выполнялся с помощью симплексного алгоритма для турбинного диска, ослабленного тремя трещинами, имеющими следующие параметры: $\alpha_1 = 15^\circ$,

$l_1/R = 0,05$, $z_1^0 = 0,2R e^{i\pi/18}$; $\alpha_2 = 30^\circ$, $l_2/R = 0,02$, $z_2^0 = 0,25R e^{i\pi/12}$; $\alpha_3 = 45^\circ$, $l_3/R = 0,01$, $z_3^0 = 0,15R e^{i\pi/10}$. В результате расчетов определены значения коэффициентов Фурье оптимального нормального перемещения точек границы диска с тремя трещинами: $a_0 = 0,1297$ мм, $a_1 = 0,0901$ мм, $a_2 = 0,0763$ мм, $a_3 = 0,0681$ мм, $a_4 = 0,0607$ мм, $a_5 = 0,0541$ мм, $a_6 = 0,0411$ мм, $a_7 = 0,0257$ мм, $b_1 = 0,8090$ мм, $b_2 = 0,0732$ мм, $b_3 = 0,0619$ мм, $b_4 = 0,0568$ мм, $b_5 = 0,0497$ мм, $b_6 = 0,0389$ мм, $b_7 = 0,0201$ мм.

Заключение. Решена задача минимизации параметров разрушения кругового диска, на границе которого заданы смешанные условия. Вычислены значения коэффициентов Фурье оптимального нормального перемещения точек границы диска с одной и тремя трещинами. Использование построенного решения позволяет на стадии проектирования выбрать оптимальные геометрические параметры диска, обеспечивающие увеличение его несущей способности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саврук М. П.** Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988.
2. **Саврук М. П.** Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. Киев: Наук. думка, 1989.
3. **Калантарлы Н. М.** Разрушение неравномерно нагретого кольцевого диска // Пробл. машиностроения. 2014. Т. 17, № 3. С. 19–25.
4. **Калантарлы Н. М.** Предельно-равновесное состояние неравномерно нагретого кольцевого диска, ослабленного произвольной системой когезионных трещин // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Механика предельного состояния. 2014. № 3. С. 37–47.
5. **Мирсалимов В. М., Калантарлы Н. М.** Моделирование зарождения трещины в круговом диске, нагруженном сосредоточенными силами // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 1. С. 90–97.
6. **Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M.** Crack nucleation in circular disk under mixed boundary conditions // Arch. Mech. 2015. V. 67, N 2. P. 115–136.
7. **Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M.** Cracking in a circular disk under mixed boundary conditions // Acta Mech. 2015. V. 226, N 6. P. 1897–1907.
8. **Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M.** Interaction of bridged cracks in a circular disk with mixed boundary conditions // Mechanika. 2015. V. 21, N 5. P. 361–366.
9. **Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M.** Fracture of a circular disk with mixed conditions on the boundary // Period. Polytech. Civil Engng. 2015. V. 59, N 3. P. 423–432.
10. **Shlyannikov V. N., Il'chenko B. V.** Calculating stress intensity coefficients in a lock joint in a gas turbine disk in a three-dimensional elastic formulation. Pt 2 // Strength Materials. 1993. V. 25, iss. 2. P. 128–133.
11. **Shlyannikov V., Zakharov A., Yarullin R.** A plastic stress intensity factor approach to turbine disk structural integrity assessment // Frattura Integrità Strutturale. 2016. V. 37. P. 193–199.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
13. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
14. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.

*Поступила в редакцию 24/IV 2017 г.,
в окончательном варианте — 2/V 2017 г.*