

УДК 532.59+539.3:534.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Решена задача о взаимодействии поверхностных и изгибно-гравитационных волн с вертикальной преградой в плоской постановке. Предполагается, что жидкость является идеальной несжимаемой, имеет бесконечную глубину и частично покрыта льдом. Ледяной покров моделируется упругой пластиной постоянной толщины. Определены собственные частоты и формы колебаний плавающей упругой ледяной пластины, прогиб и деформации льда, а также силы, действующие на стенку.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, присоединенные массы, коэффициенты демпфирования, собственные частоты и формы колебаний, метод нормальных мод, интегральные уравнения, метод граничных элементов.

Взаимодействие поверхностных волн с вертикальным барьером исследовано достаточно хорошо [1]. В последнее время появились работы, посвященные изучению взаимодействия изгибно-гравитационных волн с вертикальным барьером. В [2–6] рассмотрен ледяной покров бесконечной протяженности (полуплоскость) и показано, что изгибно-гравитационные волны могут вызывать появление значительных сил, действующих на стенку, которые необходимо учитывать при проектировании прибрежных сооружений. В данной работе рассматривается ледяной покров конечной ширины в виде полосы.

Задача о поведении одиночной упругой плавающей пластины на волнах изучена достаточно хорошо. Обзор результатов и методов исследований приведен в [7, 8]. В настоящей работе используется метод решения, изложенный в [9–12].

Знание собственных частот и форм колебаний конструкций и природных объектов необходимо при проектировании инженерных сооружений для предупреждения возможных резонансных явлений. Точные значения собственных частот и формы колебаний плавающей упругой пластины получены в работе [13] для случая мелкой воды, приближенные — в работах [14, 15] для случая жидкости конечной глубины. В данной работе использован более простой метод расчета собственных частот плавающей упругой пластины, примененный ранее в работе автора [16].

1. Постановка задачи. Рассмотрим поверхность идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины, частично закрытую тонкой упругой пластиной, имеющей постоянную толщину h , бесконечную длину и ширину L . Правый край пластины свободен, а левый заморожен в вертикальную стенку либо свободен (рис. 1). Плоские волны с малой амплитудой A набегают на пластину. Введем декартову систему координат $Oxyz$ с центром

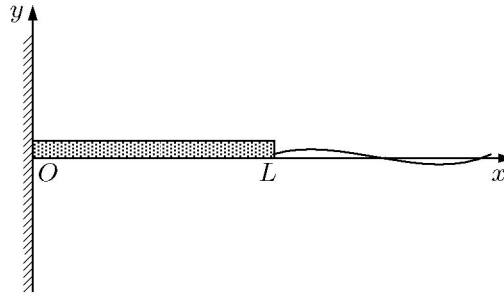


Рис. 1. Схема объекта исследования

в точке O на левой кромке пластины, осью Ox , перпендикулярной кромке, и осью Oy , направленной вертикально вверх. Осадкой пластины в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды. Течение жидкости предполагается безвихревым. Задача решается в плоской постановке в линейном приближении.

Предположим, что толщина пластины значительно меньше длины набегающих волн, этот случай наиболее интересен. Действительно, поверхностные волны сосредоточены в тонком слое на поверхности жидкости и экспоненциально затухают по глубине. Толщина слоя порядка длины волны. Если длина волны сравнима с толщиной пластины, то необходимо учитывать осадку пластины в воду и отражение волн от торца пластины, в этом случае поверхностные волны будут почти полностью отражаться. Поверхностные волны могут проходить в пластину, если их длина существенно больше толщины пластины.

Потенциал скоростей жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (x > 0, \quad y < 0)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi_x = 0 \quad (x = 0, \quad y < 0), \quad \varphi_y = w_t \quad (y = 0, \quad 0 < x < L), \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \quad (y = 0, \quad 0 < x < L), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned}$$

$$p = -\rho(\varphi_t + gw), \quad \varphi_t + gw = 0 \quad (y = 0, \quad x > L), \quad \nabla\varphi \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Здесь w — вертикальное смещение верхней поверхности жидкости (пластины); p — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; h — толщина пластины; ν — коэффициент Пуассона; ρ , ρ_0 — плотности жидкости и пластины; t — время.

На правом крае пластины ставятся условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0,$$

в случае закрепленного левого края

$$w(0, t) = 0, \quad w_x(0, t) = 0,$$

в случае свободного левого края

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0, t) = 0.$$

На бесконечности ставится условие излучения

$$\varphi(x, y, t) \rightarrow \frac{i\omega A}{k} e^{i(kx+\omega t)+ky} + R e^{i(-kx+\omega t)+ky}, \quad x \rightarrow \infty, \quad k = \frac{\omega^2}{g},$$

где первый член в правой части описывает падающую волну, второй член — отраженную волну; A — амплитуда падающей волны; k — волновое число; ω — частота. Комплексную амплитуду R отраженной волны необходимо определить.

2. Метод решения. Решение задачи будем искать с учетом симметрии. Продолжим решение в область $x < 0$ следующим образом: $\varphi(-x, y, t) = \varphi(x, y, t)$. Тогда условие на стенке будет выполняться автоматически. Это соответствует тому, что на поверхности жидкости находятся две пластины длиной L , на которые слева и справа набегает волны с одинаковыми амплитудами и частотами.

Зависимость всех искомых функций от времени является периодической и характеризуется множителем $e^{i\omega t}$. Введем следующие безразмерные переменные и параметры задачи:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad t' = \sqrt{\frac{g}{L}} t, \quad \sigma = \omega \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad K = \sigma^2,$$

$$\beta = \frac{D}{\rho g L^4}, \quad \gamma = \frac{\rho_0 h}{\rho L} = \frac{d}{L}, \quad \varphi = i\omega L A \Phi(x', y') e^{i\sigma t'}, \quad w = A W(x') e^{i\sigma t'}.$$

Здесь σ — безразмерная частота; K — безразмерное волновое число поверхностных волн; Φ , W — безразмерные амплитуды потенциала скоростей жидкости и прогиба пластины; d — осадка пластины в воду. Далее штрихи будем опускать.

В безразмерных переменных получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (y < 0); \tag{2.1}$$

$$\Phi(-x, y) = \Phi(x, y),$$

$$\Phi_y = W \quad (y = 0, |x| < 1), \quad \Phi_y - K\Phi = 0 \quad (y = 0, |x| > 1);$$

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \gamma K \right) W - K\Phi = 0; \tag{2.2}$$

$$\Phi(x, y) \rightarrow e^{Ky} \left(\frac{1}{K} e^{\pm iKx} + R e^{\mp iKx} \right), \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

$$\nabla \Phi \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty;$$

$$W''(1) = W'''(1) = 0; \tag{2.3}$$

$$W(0) = W'(0) = 0 \quad \text{или} \quad W''(0) = W'''(0) = 0. \tag{2.4}$$

Решение задачи находим методом, предложенным в работах [9–12]. Представим прогиб пластины в виде разложения по собственным модам

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n W_n(x). \tag{2.5}$$

Собственные функции удовлетворяют уравнению

$$W_n^{(IV)}(x) = \lambda_n^4 W_n(x)$$

и краевым условиям (2.3), (2.4).

Собственные функции ортогональны:

$$\int_0^1 W_n(x) W_m(x) dx = \delta_{nm}$$

и имеют следующий вид:

— в случае закрепленного левого края

$$W_n(x) = \operatorname{ch}(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x) - S_n[\operatorname{sh}(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)],$$

$$S_n = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n) + \cos(\lambda_n)}{\operatorname{sh}(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)}, \quad \operatorname{ch}(\lambda_n) \cos(\lambda_n) + 1 = 0;$$

— в случае свободных краев

$$W_n(x) = \operatorname{ch}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) - S_n[\operatorname{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x)],$$

$$S_n = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)}{\operatorname{sh}(\lambda_n) - \sin(\lambda_n)}, \quad \operatorname{ch}(\lambda_n) \cos(\lambda_n) - 1 = 0.$$

Потенциал скоростей жидкости будем искать в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{K} (e^{iKx} + e^{-iKx}) e^{Ky} + \Phi_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \Phi_n(x, y), \quad (2.6)$$

где первый член в правой части описывает набегающие волны; Φ_n — радиационные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta \Phi_n = 0, \quad y < 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = W_n(x) \quad (y = 0, |x| < 1), \quad W_0(x) = -2 \cos(Kx), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} - K \Phi_n = 0 \quad (y = 0, |x| > 1), \quad \nabla \Phi_n \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty$$

и условию излучения

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \pm iK \Phi_n \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Подставим выражения (2.5), (2.6) в уравнение прогиба пластины, умножим полученное выражение на $W_m(x)$ и проинтегрируем по x в интервале $[0, 1]$. Используя ортогональность функций $W_n(x)$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов q_n

$$(\beta \lambda_m^4 + 1 - \gamma K) q_m - K \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} q_n = B_m, \quad (2.8)$$

где

$$U_{mn} = \int_0^1 W_m(x) \Phi_n(x, 0) dx, \quad B_m = \int_0^1 W_m(x) [K \Phi_0(x, 0) + 2 \cos(Kx)] dx.$$

Матрица коэффициентов U_{mn} является комплексной симметричной, действительные части коэффициентов представляют собой присоединенные массы M_{mn}^a , а мнимые части определяют коэффициенты демпфирования D_{mn}^h :

$$U_{mn} = M_{mn}^a + D_{mn}^h / (i\sigma).$$

3. Решение радиационной задачи. Используется метод решения радиационной задачи (2.7), описанный в [10]. Рассмотрим функцию Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, определяемую уравнениями

$$\Delta G = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta), \quad y < 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y} - KG &= 0, & y = 0, \\ \nabla G &\rightarrow 0, & y \rightarrow -\infty, \\ \frac{\partial G}{\partial x} \pm iKG &\rightarrow 0, & x \rightarrow \pm\infty.\end{aligned}$$

Функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned}G(x, y; \xi, \eta) &= -i \exp(iK|x - \xi| + K(y + \eta)) + \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t \cos(K(y + \eta)t) - \sin(K(y + \eta)t)}{1 + t^2} e^{-K|x - \xi|t} dt.\end{aligned}$$

Применяя вторую формулу Грина, получаем представление

$$\Phi_n(\xi, \eta) = \int_{-1}^1 [\Phi_{ny}(x, 0)G(x, 0; \xi, \eta) - \Phi_n(x, 0)G_y(x, 0; \xi, \eta)] dx.$$

С использованием краевого условия на верхней границе для функции G получаем выражение

$$\Phi_n(\xi, \eta) = \int_{-1}^1 [\Phi_{ny}(x, 0) - K\Phi_n(x, 0)]G(x, 0; \xi, \eta) dx. \quad (3.1)$$

Введем функции $\Psi_n(x, y)$:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} - K\Phi_n,$$

удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\Delta \Psi_n = 0$$

и граничным условиям на верхней поверхности. Вне пластины

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} = 0 \quad (|x| > 1, \quad y = 0).$$

На пластине после ряда преобразований получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} + K\Psi_n \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K^2 \right) W_n(x).$$

Интегрируя это выражение по x , находим

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} + K\Psi_n = W_n(x) + K^2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi W_n(\eta) d\eta + (a + bx)K, \quad (3.2)$$

где a, b — константы интегрирования.

Введем функции $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{\partial \Psi_n}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y}(x, 0) - K\Phi_n(x, 0), \quad |x| < 1.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y}(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ f_n(x), & |x| < 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Таким образом, функции $\Psi_n(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа и условиям (3.3), следовательно, они определяются из решения задачи Неймана для полуплоскости

$$\Psi_n(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f_n(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.2), получаем

$$f_n(x) - \frac{K}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |x - \xi| f_n(\xi) d\xi = W_n(x) + K^2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi W_n(\eta) d\eta + K(a_n + b_n x).$$

В силу четности функций $f_n(x)$ $b_n = 0$. Коэффициенты a_n определяются из соотношения [10]

$$a_n = 2 \int_0^1 f_n(x) g_1(x) dx,$$

где

$$g_1(x) = [\text{Ci}(Kx) \cos(Kx) + \sin(Kx) \text{Si}(Kx) - \ln|x|]/\pi + (1/2) \sin(Kx) - i \cos(Kx),$$

Ci, Si — интегральные косинус и синус. В результате получаем интегральное уравнение с логарифмическим ядром

$$f_n(x) - \frac{K}{\pi} \int_0^1 (\ln|x - \xi| + \ln|x + \xi|) f_n(\xi) d\xi = W_n(x) + K^2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi W_n(\eta) d\eta + K a_n. \quad (3.4)$$

Определив функцию $f_n(x)$, находим $\Phi_n(x, 0)$ по формуле

$$\Phi_n(x, 0) = [W_n(x) - f_n(x)]/K.$$

Затем вычисляем коэффициенты q_n из системы (2.8). Из (3.1) получаем выражение для потенциала Φ_n

$$\Phi_n(x, y) = - \int_{-1}^1 f_n(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi,$$

из которого можно найти амплитуду потенциала на бесконечности. При $y = 0$

$$G(x, 0; \xi, 0) = -i e^{iK|x-\xi|} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} e^{-K|x-\xi|t} dt,$$

при $x \rightarrow \infty$

$$G(x, 0; \xi, 0) \rightarrow -i e^{iK|x-\xi|}.$$

Тогда

$$R_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_n(x, 0) = i \int_{-1}^1 f_n(\xi) e^{iK(x-\xi)} d\xi = 2i e^{iKx} \int_0^1 f_n(\xi) \cos(K\xi) d\xi. \quad (3.5)$$

Из формул (2.6), (3.5) находим коэффициент отражения C_R как отношение амплитуды потенциала отраженной волны к амплитуде потенциала в падающей волне:

$$C_R = \left| 1 + K \left(R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n R_n \right) \right|$$

(R_n — комплексная амплитуда радиационного потенциала Φ_n на бесконечности).

Безразмерный прогиб пластины определяется формулой (2.5). Деформации ледяной пластины вычисляются по формуле

$$\varepsilon = \frac{h}{2} w_{xx} = \frac{Ah}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n W_n''(x).$$

Изгибающий момент, действующий на пластину, равен

$$M_b = -Dw_{xx} = -\frac{DA}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n W_n''(x).$$

Перерезывающая сила определяется выражением

$$F(x) = -Dw_{xxx} = -\frac{DA}{L^3} \sum_{n=1}^{\infty} q_n W_n'''(x).$$

В случае закрепленного левого края ледяного покрова вертикальная сила волнового воздействия на стенку находится по формуле

$$F(0) = -2 \frac{DA}{L^3} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \lambda_n^3 S_n.$$

4. Собственные частоты колебаний плавающей упругой пластины. При численном решении полученных уравнений обнаружено, что при некоторых значениях частот набегающих волн наблюдаются повышенные амплитуды прогиба пластины и деформаций. В работах [13–15] показано, что максимальные амплитуды наблюдаются вблизи собственных частот колебаний упругой плавающей пластины, которые являются комплексными.

Найдем собственные частоты и определим формы колебаний пластины на волнах вблизи стенки. Зависимость прогиба пластины от времени можно представить в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) W_n(x),$$

где $q_n(t)$ — обобщенные координаты, описывающие движение пластины. Уравнение собственных колебаний пластины можно записать в виде

$$(M + M^a) \ddot{q}(t) + D^h \dot{q}(t) + (C + C^h) q = 0,$$

где элементы матриц M , C , C^h вычисляются по формулам

$$M_{mn} = \gamma \delta_{mn}, \quad C_{mn} = \beta \lambda_m^4 \delta_{mn}, \quad C_{mn}^h = \delta_{mn},$$

M, M^a — матрицы масс и присоединенных масс; D^h — матрица коэффициентов демпфирования; C, C^h — матрицы жесткости и восстанавливающих гидродинамических сил; q — вектор обобщенных координат. Запишем это матричное уравнение в виде системы уравнений первого порядка. Введем новую переменную $q_1 = \dot{q}$. Тогда систему уравнений можно записать в виде

$$GQ - B\dot{Q} = 0,$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -(C + C^h) & -D^h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M + M^a \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q \\ q_1 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица.

Таким образом, получена обобщенная квазилинейная задача на собственные значения, так как матрицы M^a, D^h зависят от частоты. Если комплексные собственные частоты колебаний пластины близки к действительным, то можно приближенно считать эти матрицы вычисленными при действительной резонансной частоте. Имеет место итерационный процесс

$$((B^{(n)})^{-1}G^{(n)} - \lambda^{(n+1)}E)Q = 0, \quad \lambda^{(n)} = i\sigma^{(n)} - \delta^{(n)},$$

где $B^{(n)}, G^{(n)}$ — матрицы при $\sigma = \sigma^{(n)}$.

5. Результаты численных расчетов. Интегральные уравнения (3.4) решаются численно методом граничных элементов. Отрезок $[0, 1]$ разбивается на N элементов с шагом, равномерным по переменной $\theta = \arccos(x)$. Используются трехточечные элементы. В каждый элемент вводится дополнительный узел в средней точке. Внутри элемента искомая функция аппроксимируется с помощью квадратичных элементов формы. При этом интегрирование во всех формулах выполняется аналитически.

Сравнение полученных результатов с данными работы [11] показывает, что при $N = 200$ они практически совпадают. Дальнейшее увеличение числа элементов не оказывает влияния на результат. Расчеты проводились для 20 собственных мод.

В численных расчетах использовались следующие исходные данные: модуль Юнга льда $E = 5 \cdot 10^9$ Н/м², плотность льда $\rho_1 = 922,3$ кг/м³, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с², коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Длина, толщина пластины и частота набегающих волн менялись. В общем случае амплитуда набегающих волн $A = 1$ м.

В рассматриваемой задаче имеется несколько характерных длин: длина L и толщина h пластины, характерная длина, зависящая от упругости пластины:

$$L_0 = \left(\frac{D}{\rho g}\right)^{1/4}, \quad \beta = \left(\frac{L_0}{L}\right)^4,$$

длина поверхностных волн $\lambda_0 = 2\pi g/\omega^2$, длина изгибно-гравитационных волн $\lambda_1 = 2\pi L/\alpha_0$ (α_0 — безразмерное волновое число распространяющейся в пластине моды). Изгибно-гравитационные волны в бесконечном ледяном покрове удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.2). Решение задачи будем искать в виде

$$\Phi(x, y) = e^{\alpha(ix+y)}.$$

В результате получаем уравнение для α

$$(\beta\alpha^4 + 1 - \gamma\sigma^2)\alpha - \sigma^2 = 0, \tag{5.1}$$

имеющее единственный действительный корень α_0 , который определяет длину изгибно-гравитационных волн.

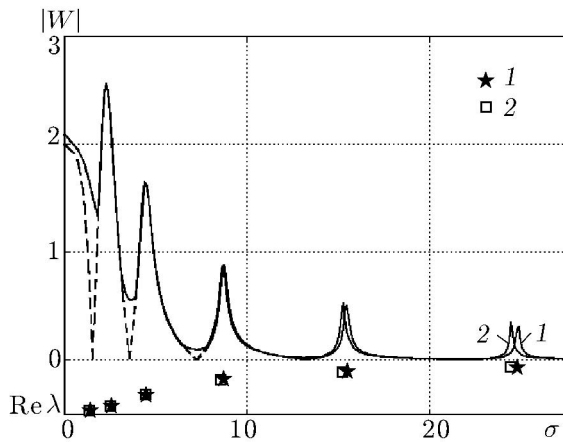


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость амплитуд прогиба свободного края (штриховая линия) и максимального прогиба (сплошная линия) закрепленной пластины от безразмерной частоты σ :

1 — $h = 1$ м, $L = 100$ м, 2 — $h = 2$ м, $L = 168$ м; точки — собственные частоты

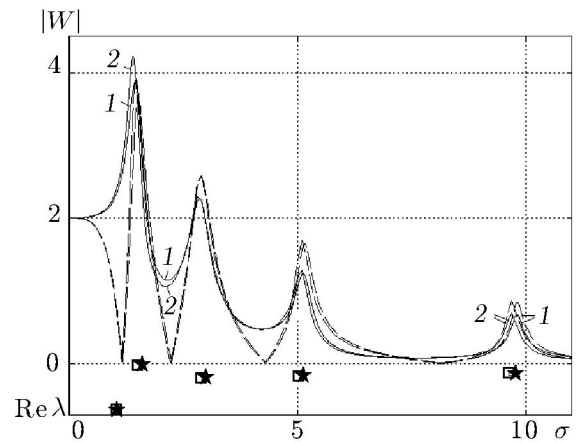


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость амплитуды прогиба правого края (штриховая линия) и максимального прогиба (сплошная линия) пластины со свободными краями от безразмерной частоты σ (обозначения те же, что на рис. 2)

При фиксированных характеристиках льда жесткость ледяной пластины определяется толщиной льда. При указанных выше значениях модуля Юнга и коэффициента Пуассона характерная длина L_0 принимает следующие значения: при $h = 1$ м $L_0 = 14,693$ м, при $h = 1,5$ м $L_0 = 19,9223$ м, при $h = 2$ м $L_0 = 24,71964$ м. В уравнениях (2.2), (5.1) определяющими параметрами являются β и σ . Параметр γ мал и незначительно влияет на величину α_0 . Для двух пластин различной толщины при одном и том же отношении L/L_0 значения функций $\alpha_0(\sigma)$ близки. Поэтому колебания данных пластин имеют сходный характер.

На рис. 2 показаны зависимости амплитуд прогиба свободного края пластины и максимального прогиба от безразмерной частоты σ при различных значениях толщины и длины закрепленных пластин. В обоих случаях отношение L/L_0 имеет одно и то же значение. Небольшое различие кривых имеет место только в области больших значений параметра σ . Для пластины со свободными краями максимальные амплитуды колебаний наблюдаются на краях. На рис. 3 представлены те же зависимости, что и на рис. 2, для пластин со свободными краями. В этом случае различие кривых более существенное вследствие влияния твердотельных мод. Видно, что амплитуды колебаний немонотонно зависят от частоты. Наблюдаются участки с большими амплитудами, а также частоты, при которых правый край неподвижен. При этих частотах амплитуды колебаний пластины в средней части значительно меньше, чем при других частотах. Как отмечено выше, области с большими амплитудами соответствуют собственным частотам колебаний пластины в воде. Собственные частоты колебаний пластин также близки (см. рис. 3). Для пластин со свободными краями первые две собственные частоты близки и соответствуют колебаниям твердого тела, поэтому резонансное увеличение амплитуд колебаний на этих частотах наиболее существенное. Частоты, при которых свободный край пластины неподвижен, соответствуют колебаниям стоячих волн.

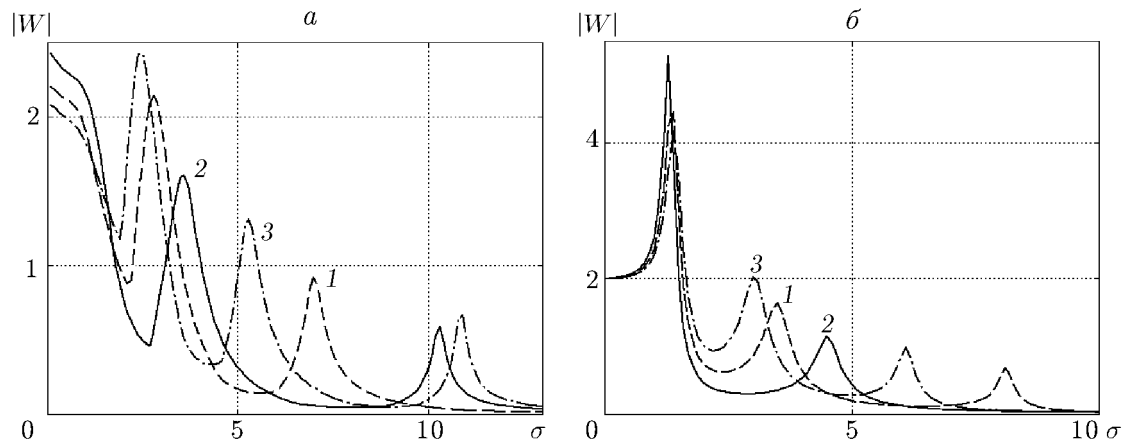


Рис. 4. Амплитуды максимальных прогибов пластины толщиной 1 м для закрепленной пластины (а) и пластины со свободными краями (б):

1 — $L/L_0 = 4$; 2 — $L/L_0 = 5$; 3 — $L/L_0 = 6$

Зависимость амплитуды прогиба пластины толщиной 1 м от частоты при различных значениях L/L_0 представлена на рис. 4. Видно, что с увеличением длины пластины максимумы сгущаются, а их величина растет. Собственные моды колебаний пластины в воде по виду сходны с собственными модами в пустоте, но различие их по амплитуде и фазе существенно. В общем случае форма колебаний пластины представляет собой суперпозицию собственных мод. Если частота набегающих волн близка к собственной частоте пластины в воде, то преимущественно возбуждается соответствующая собственная мода. На рис. 5 показаны амплитуды первых четырех собственных мод колебаний закрепленной пластины толщиной 1 м в воде и в пустоте, а также амплитуды прогиба пластины на волнах при частоте, соответствующей собственным колебаниям. Амплитуды прогиба вынужденных и собственных колебаний в воде практически совпадают, а амплитуды собственных колебаний в пустоте отличаются от них. В случае пластины со свободными краями соответствующие кривые различаются более существенно вследствие влияния твердотельных мод.

Деформации закрепленной пластины максимальны вблизи закрепленного края. На рис. 6 приведена зависимость амплитуды максимальных деформаций ε от частоты для закрепленной пластины и пластины со свободными краями толщиной 1 м при различных значениях длины пластины. Видно, что амплитуда деформаций пластины со свободными краями значительно меньше. Результаты сравнения рис. 4, 6 показывают, что при малых частотах прогиб пластины больше, при больших частотах деформации пластины могут быть большими, несмотря на то что ее прогибы незначительны.

Существует предельное значение амплитуды деформаций льда, при превышении которого наблюдаются пластическое деформирование и разрушение. Физические свойства и структура льда существенно зависят от температуры, состава воды и других параметров. Предел прочности на изгиб имеет значительный разброс. Согласно данным работы [17] для пресноводного озерного льда предельные изгибные напряжения составляют $0,37 \div 2,32$ МПа, что соответствует значениям $\varepsilon_* \approx 7,4 \cdot 10^{-5} \div 4,6 \cdot 10^{-4}$. Прочность морского льда значительно меньше: $\varepsilon_* \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \div 8,5 \cdot 10^{-5}$ [18]. Поскольку задача линейная, все величины пропорциональны амплитуде набегающих волн. Для того чтобы имело место упругое деформирование и модель была справедлива, выбирается амплитуда набегающих волн, при которой амплитуды максимальных деформаций меньше критического значения.

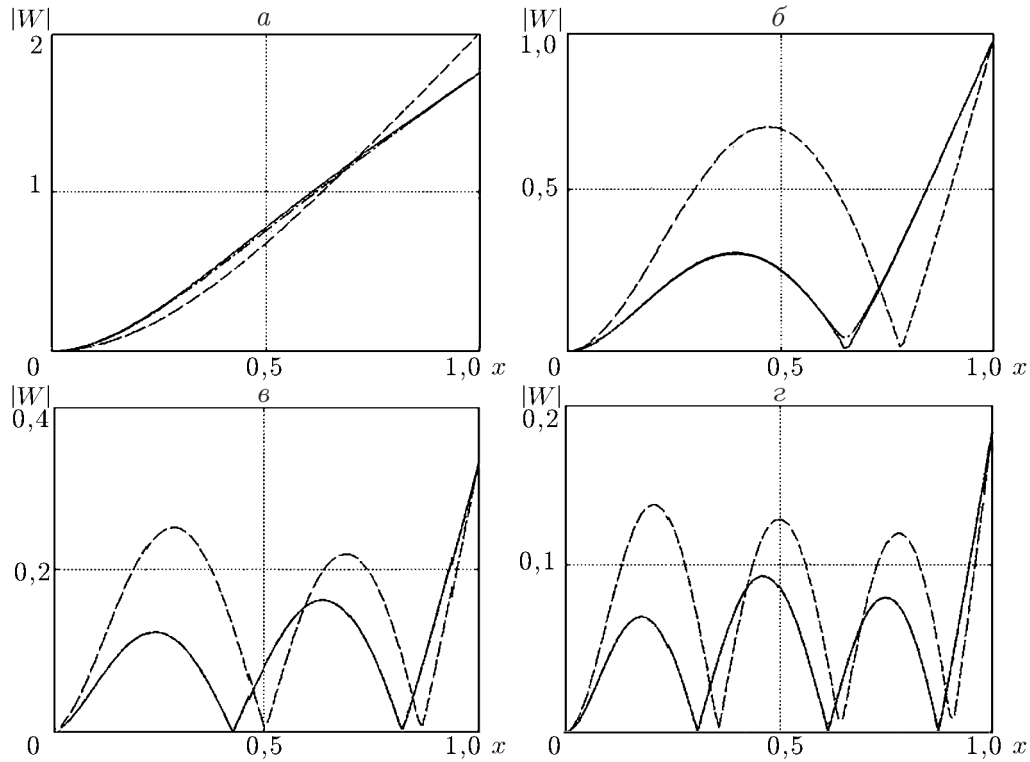


Рис. 5. Амплитуды первых четырех (*a–г*) собственных мод колебаний закрепленной пластины в воде (штрихпунктирные кривые) и в пустоте (штриховые), а также колебаний пластины на волнах при частоте, соответствующей собственным колебаниям в воде (сплошные кривые)

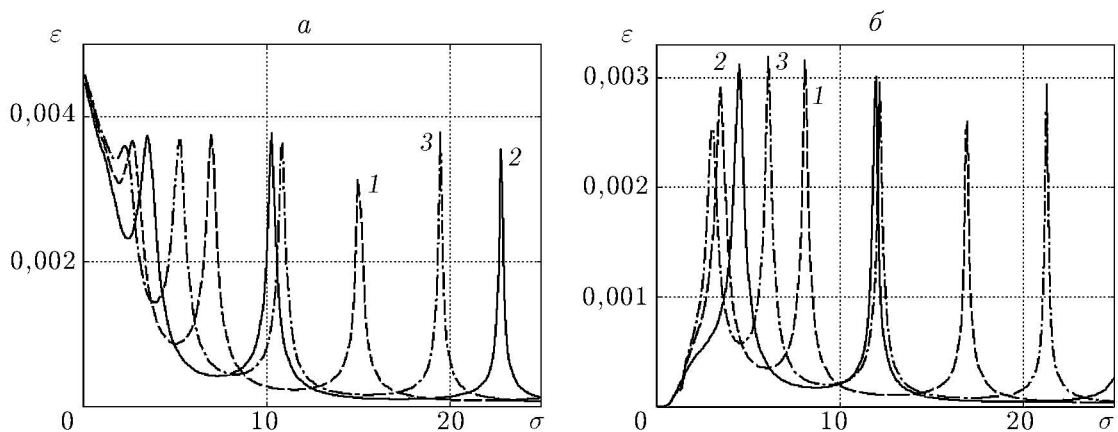


Рис. 6. Амплитуды максимальных деформаций пластины толщиной 1 м для закрепленной пластины (*a*) и пластины со свободными краями (*б*):
 1 — $L/L_0 = 4$; 2 — $L/L_0 = 5$; 3 — $L/L_0 = 6$

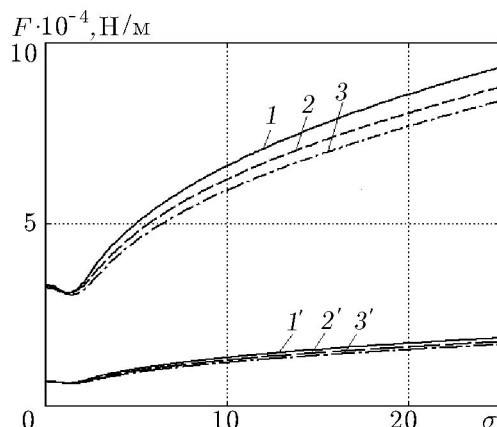


Рис. 7. Зависимость максимальной вертикальной силы, действующей на стенку, от безразмерной частоты σ для закрепленной пластины толщиной 1 м:
 1–3 — пресноводный лед, 1'–3' — морской лед; 1, 1' — $L/L_0 = 4$, 2, 2' — $L/L_0 = 5$,
 3, 3' — $L/L_0 = 6$

На рис. 7 приведена зависимость амплитуды максимальной вертикальной погонной силы, действующей на стенку, от частоты в случае закрепленной пластины из пресноводного и морского льда. Для пресноводного льда амплитуда набегающих волн соответствует предельному значению деформаций $\varepsilon_* = 4 \cdot 10^{-4}$, для морского льда — $\varepsilon_* = 8 \cdot 10^{-5}$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при деформации ледяного покрова могут иметь место значительные нагрузки на прибрежные сооружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Williams T. D., Squire V. A.** Ice-coupled waves near a deep water tide crack or ice jetty // Ice in the environment: Proc. of the 16th IAHR Intern. symp. on ice, Dunedin (New Zealand), 2–6 Dec. 2002. S. 1.: Intern. Assoc. of Hydraulic Engng and Res., 2002. P. 188–196.
3. **Chakrabarti A., Ahluwalia D. S., Manam S. R.** Surface water waves involving a vertical barrier in the presence of an ice-cover // Intern. J. Engng Sci. 2003. V. 41. P. 1145–1162.
4. **Brocklehurst P., Korobkin A. A., Parau E. A.** Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall // J. Engng Math. 2010. V. 68, N 3/4. P. 215–231.
5. **Brocklehurst P., Korobkin A. A., Parau E. A.** Hydroelastic wave diffraction by a vertical cylinder // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Engng Sci. 2011. V. 369, N 1947. P. 2832–2851.
6. **Bhattacharjee J., Guedes Soares C.** Flexural gravity wave over floating ice sheet near a vertical wall // J. Engng Math. 2012. V. 75, N 1. P. 29–48.
7. **Watanabe E., Utsunomiya T., Wang C. M.** Hydroelastic analysis of pontoon-type VLFS: a literature survey // Engng Struct. 2004. V. 26, N 2. P. 245–256.
8. **Squire V. A.** Of ocean waves and sea-ice revisited // Cold Regions Sci. Technol. 2007. V. 49. P. 110–133.
9. **Mac Camy R. C.** On the heaving motion of cylinders of shallow draft // J. Ship Res. 1961. V. 5, N 3. P. 34–43.
10. **Holford R. L.** Short surface waves in the presence of a finite dock. 1 // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1964. V. 60, N 4. P. 957–983.

11. **Bessho M., Komatsu M.** On hydrodynamical forces acting on the flat plate oscillating on water surface // J. Kansai Soc. Naval Archit. (Japan). 1974. N 154. P. 69–76.
12. **Стурова И. В., Коробкин А. А.** Плоская задача о воздействии периодической нагрузки на упругую пластину, плавающую на поверхности бесконечно глубокой жидкости // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 3. С. 61–72.
13. **Meylan M. H.** Spectral solution of time-dependent shallow water hydroelasticity // J. Fluid Mech. 2002. V. 454. P. 387–402.
14. **Hazard C., Meylan M. H.** Spectral theory for a two-dimensional elastic thin plate on water of finite depth // SIAM J. Appl. Math. 2007. V. 68, N 3. P. 629–647.
15. **Meylan M. H., Tomic M.** Complex resonances and the approximation of wave forcing for floating elastic bodies // J. Appl. Ocean Res. 2012. V. 36. P. 51–59.
16. **Горелов Д. Н., Гусева Л. А.** Свободные колебания лопастей гидротурбин в потоке // Аэроупругость турбомашин: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1980. С. 81–89.
17. **Богородский В. В.** Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. П. Гаврило. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
18. **Squire V., Martin S.** A field study of the physical properties, response to swell, and subsequent fracture of a single ice floe in the winter Bering Sea: Tech. rep. / Univ. Wash. Sci. N 18. S. 1., 1980.

Поступила в редакцию 14/I 2013 г.
