УДК 532.5

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

П. Кунду, Б. Н. Мандал*

Джадавпурский университет, 700032 Калькутта, Индия
* Индийский институт статистики, 700108 Калькутта, Индия
E-mails: kundupiyali92@gmail.com, bnm2006@rediffmail.com

Изучается задача о двумерном неустановившемся течении, возникающем в слое вязкой несжимаемой жидкости конечной толщины вследствие поверхностного давления или смещения свободной поверхности. Для получения выражения для формы свободной поверхности, записанного через кратные интегралы, используются преобразование Фурье по пространственным переменным и преобразование Лапласа по времени. Методом наискорейшего спуска получено асимптотическое выражение для формы свободной поверхности.

Ключевые слова: неустановившееся течение, вязкая жидкость, преобразования Лапласа и Фурье, метод наискорейшего спуска, возмущения свободной поверхности.

DOI: 10.15372/PMTF20220104

Введение. Существует большое количество работ, посвященных исследованию задачи о возникновении волн в невязкой несжимаемой жидкости вследствие возмущения свободной поверхности. Эти задачи, как правило, называются задачами Коши — Пуассона. Известны различные типы начальных возмущений. Возмущения могут возникнуть в результате взрыва в области, занятой жидкостью, или в результате действия поверхностного давления на свободную поверхность жидкости. В случае если взрыв происходит в области, занятой жидкостью, начальное возмущение моделируется начальным смещением свободной поверхности жидкости, распределенным в некоторой области. Если взрыв происходит на свободной поверхности жидкости или над ней, то начальное условие можно задать в виде импульса давления, действующего на свободную поверхность. Задачи о возникновении волн в слое воды большой толщины в результате наличия возмущений такого типа изучены в работах [1, 2] в предположении, что жидкость является идеальной несжимаемой. В работе [3] решалась задача о возникновении двумерных волн в идеальной несжимаемой жидкости вследствие возмущений, возникающих на пологом пляже. Для получения асимптотической формы свободной поверхности применялся метод наискорейшего спуска, предложенный в работе [4]. В [5] в предположении, что идеальная несжимаемая жидкость находится над пористым дном, решалась задача о возникновении волн вследствие наличия осесимметричного возмущения на поверхности жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по научным и промышленным исследованиям Индии.

© Кунду П., Мандал Б. Н., 2022

В ряде работ решались аналогичные задачи в предположении, что жидкость является вязкой. В работах [6, 7] изучалось возникновение волн в вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины вследствие наличия возмущений, вызванных поверхностным давлением или подъемом свободной поверхности. Возникновение осесимметричного течения в вязкой жидкости бесконечной глубины вследствие точечного импульса на свободной поверхности или смещения свободной поверхности изучалось в [8]. В работе [9] решалась двумерная задача о распространении капиллярных гравитационных волн в вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины в предположении, что волна генерируется осциллирующим источником поверхностного давления, перемещающимся вдоль поверхности жидкости с постоянной скоростью. В [10] с учетом влияния вязкости жидкости и поверхностного натяжения изучалось нестационарное движение поверхностных волн, вызванное локализованным возмущением. В указанных выше работах рассматривалась вязкая несжимаемая жидкость бесконечной глубины.

В данной работе исследуется двумерная задача Коши — Пуассона для вязкой несжимаемой жидкости конечной глубины. Течение генерируется начальными возмущениями: либо давлением, приложенным на поверхности жидкости, либо возмущением свободной поверхности. Для определения выражения для формы свободной поверхности в виде кратных интегралов используются преобразование Фурье по пространственным переменным и преобразование Лапласа по времени. Для определения выражения для формы свободной поверхности в интегральной форме применяется метод наискорейшего спуска [4]. Приводится также асимптотическое выражение для формы свободной поверхности.

1. Математическая формулировка задачи. Задача формулируется в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой находится на свободной поверхности покоящейся вязкой несжимаемой жидкости. Ось y направлена вертикально вверх, плоскость (x, z) является горизонтальной. Уравнения двумерного движения жидкости и уравнение неразрывности записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v,$$
$$p = p_1 + \rho g y, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где p_1 — гидродинамическое давление; ν — кинематическая вязкость.

На свободной поверхности жидкости ставятся условия

$$\tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0,$$
$$\tau_{yy} = -p_1 + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -p + \rho g\eta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -p_0(x,t) \qquad \text{при} \quad y = 0, \tag{2}$$

где $y = \eta(x,t)$ — высота свободной поверхности; $p_0(x,t) = p(x,0,t)$; $\mu = \nu\rho$ — динамическая вязкость; τ_{xy}, τ_{yy} — касательная и нормальная компоненты тензора напряжений на свободной поверхности $y = \eta(x,t)$.

Начальные условия задаются в следующем виде:

$$u = v = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0. \tag{3}$$

На дне ставятся условия

$$u = v = 0 \qquad \text{при} \quad y = -h. \tag{4}$$

Кинематические условия на свободной поверхности имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v\big|_{y=0}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\eta(x,t) = \eta_0(x) + \int\limits_0^t v\big|_{y=0}\, dt, \tag{6}$$

где $\eta_0(x)$ — начальная высота свободной поверхности.

Введем безразмерные величины

$$\bar x = \frac{x}{l}, \quad \bar y = \frac{y}{l}, \quad \bar t = t\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \bar\eta = \frac{\eta}{l}, \quad \bar h = \frac{h}{l}, \quad \bar\rho = \frac{\rho l^3}{m},$$

$$\bar p = p\,\frac{l^2}{gm}, \quad \bar\nu = \frac{\nu}{\sqrt{gl^3}}, \quad \bar\mu = \mu\sqrt{\frac{l^3}{gm^2}}, \quad \bar u = \frac{u}{\sqrt{gl}}, \quad \bar v = \frac{v}{\sqrt{gl}}.$$

Здесь l — характерная длина; $\sqrt{l/g}$ — характерное время.

Вид уравнений (1)–(6), записанных в безразмерных переменных, не изменяется.

2. Метод решения. Для решения задачи используются преобразования Фурье и Лапласа. Преобразование Фурье функции $f(x,y,t)$ по переменной x имеет вид

$$\bar f(s,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y,t)\, \mathrm{e}^{-isx}\, dx,$$

преобразование Лапласа функции $\bar f(s,y,t)$ по переменной t — вид

$$\bar{\bar f}(s,y,n) = \int\limits_0^{\infty} \bar f(s,y,t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt.$$

Применяя преобразования Фурье и Лапласа к уравнениям (1), (2), (4), (6), записанным в безразмерных переменных, с учетом (3) получаем уравнения

$$\frac{d^2\,\bar{\bar u}}{dy^2} - \Big(s^2 + \frac{n}{\nu}\Big)\bar{\bar u} = -\frac{is}{\rho\nu}\,\bar{\bar p}, \qquad \frac{d^2\,\bar{\bar v}}{dy^2} - \Big(s^2 + \frac{n}{\nu}\Big)\,\bar{\bar v} = \frac{1}{\rho\nu}\,\frac{d\,\bar{\bar p}}{dy},$$

$$\frac{d\,\bar{\bar v}}{dy} - is\bar{\bar u} = 0, \qquad \frac{d\bar{\bar u}}{dy} - is\,\bar{\bar v} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$-\,\bar{\bar p} + \rho\,\bar{\bar\eta}_0 + \rho\,\frac{\bar{\bar v}}{n} + 2\mu\,\frac{d\,\bar{\bar v}}{dy} = -\,\bar{\bar p}_0 \qquad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\bar{\bar u} = \bar{\bar v} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h, \qquad \bar{\bar\eta} = \bar{\bar\eta}_0 + \frac{\bar{\bar v}}{n} \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Исключая переменные $\bar{\bar u}$, $\bar{\bar p}$, для функции $\bar{\bar v}$ получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{d^4\,\bar{\bar v}}{dy^4} - \Big(2s^2 + \frac{n}{\nu}\Big)\frac{d^2\,\bar{\bar v}}{dy^2} + s^2\Big(s^2 + \frac{n}{\nu}\Big)\,\bar{\bar v} = 0, \qquad -h < y < 0,$$

$$\bar{\bar v} = \frac{d\,\bar{\bar v}}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h, \qquad \frac{d^2\,\bar{\bar v}}{dy^2} + s^2\,\bar{\bar v} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\frac{d^3\,\bar{\bar v}}{dy^3} - \Big(3s^2 + \frac{n}{\nu}\Big)\frac{d\,\bar{\bar v}}{dy} - \frac{\rho s^2}{\mu n}\,\bar{\bar v} = \frac{s^2}{\mu}\,(\,\bar{\bar p}_0 + \rho\,\bar{\bar\eta}_0) \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Решив краевую задачу, определяем функцию $\bar{\bar{v}}$, а затем находим

$$\bar{\bar{\eta}} = \bar{\bar{\eta}}_0 + \frac{(\bar{\bar{p}}_0 + \rho\,\bar{\bar{\eta}}_0)(s^2 \operatorname{sh}\xi h \operatorname{ch} sh - s\xi \operatorname{sh} sh \operatorname{ch}\xi h)}{\varphi(s,n)},$$

где

$$\xi = \sqrt{s^2 + n/\nu},$$

$$\varphi(s,n) = -\rho s(s \operatorname{sh}\xi h \operatorname{ch} sh - \xi \operatorname{sh} sh \operatorname{ch}\xi h) + 2s^2\xi\mu\nu(2s^2 \operatorname{ch}\xi h \operatorname{ch} sh - 2s^2 - n/\nu -$$
$$- 2s\xi \operatorname{sh} sh \operatorname{sh}\xi h) + \mu\nu(2s^2 + n/\nu)(-2s^2\xi + (2s^2 + n/\nu)(\xi \operatorname{ch}\xi h \operatorname{ch} sh - s \operatorname{sh} sh \operatorname{sh}\xi h)).$$

При $h \to -\infty$ из полученного решения следуют результаты работы [6]. Применяя к функции $\bar{\bar{\eta}}(s,n)$ обратные преобразования, получаем выражение для функции $\eta(x,t)$ в виде двойного интеграла

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,n)\,\mathrm{e}^{-isx}\,\mathrm{e}^{nt}\,dn\,ds, \qquad (7)$$

где

$$G(s,n) = \bar{\bar{\eta}}_0 + \frac{(\bar{\bar{p}}_0 + \rho\,\bar{\bar{\eta}}_0)(s^2 \operatorname{sh}\xi h \operatorname{ch} sh - s\xi \operatorname{sh} sh \operatorname{ch}\xi h)}{\varphi(s,n)}.$$

3. Применение метода наискорейшего спуска. Приближенную оценку двойного интеграла в (7) можно получить методом наискорейшего спуска [4]. Как правило, этот метод используется для оценки одинарного интеграла, в случае если в подынтегральном выражении имеется экспоненциальный множитель, содержащий большой параметр.

В работе [4] метод наискорейшего спуска применен для оценки кратных интегралов, в случае когда в экспоненциальных множителях подынтегральных выражений не содержится в явном виде большой параметр. При этом путь интегрирования необходимо выбрать таким образом, чтобы он проходил через седловые точки. При этом наибольший вклад в интеграл дают точки, находящиеся в окрестности седловых точек.

Выражение для функции $\eta(x,t)$ можно записать в виде

$$\eta(x,t) = \eta_0 + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(\bar{\bar{p}}_0 + \rho\,\bar{\bar{\eta}}_0)\cos sx}{4\varphi(s,n)}\,\mathrm{e}^{\ln s^2 + nt} \times$$
$$\times [\mathrm{e}^{(s+\xi)h} - \mathrm{e}^{(s-\xi)h} + \mathrm{e}^{-(s-\xi)h} - \mathrm{e}^{-(s+\xi)h}]\,dn\,ds -$$
$$- \frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(\bar{\bar{p}}_0 + \rho\,\bar{\bar{\eta}}_0)\xi\cos sx}{4\varphi(s,n)}\,\mathrm{e}^{\ln s^2 + nt}[\mathrm{e}^{(s+\xi)h} + \mathrm{e}^{(s-\xi)h} - \mathrm{e}^{-(s-\xi)h} - \mathrm{e}^{-(s+\xi)h}]\,dn\,ds$$

или

$$\eta(x,t) = \eta_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8,$$

где I_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ — двойные интегралы.

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(\bar{\bar{p}}_0 + \rho\,\bar{\bar{\eta}}_0)\cos sx}{4\varphi(s,n)}\,\mathrm{e}^{\ln s^2 + nt + sh + \xi h}\,dn\,ds = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \chi_1(s,n)\,\mathrm{e}^{\psi_1(s,n)}\,dn\,ds,$$

где

$$\chi_1(s,n) = \frac{(\bar{\bar{p}}_0 + \rho\,\bar{\bar{\eta}}_0)\cos sx}{4\varphi(s,n)}, \qquad \psi_1(s,n) = \ln s^2 + nt + sh + \xi h.$$

Седловые точки находятся из решения уравнений

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial s} = \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = 0$$

или

$$h + \frac{2}{s} + \frac{sh}{\sqrt{s^2 + n/\nu}} = 0, \qquad \frac{h}{2\nu\sqrt{s^2 + n/\nu}} + t = 0.$$

Таким образом, седловыми точками являются точки

$$s_1^0 = \frac{h + \sqrt{h^2 + 16\nu t}}{4\nu t}, \qquad s_1^1 = \frac{h - \sqrt{h^2 + 16\nu t}}{4\nu t},$$

$$n_1^0 = \frac{1}{8t^2}\Big(-8t + \frac{h^2}{\nu} - \frac{h\sqrt{h^2 + 16\nu t}}{\nu}\Big), \qquad n_1^1 = \frac{1}{8t^2}\Big(-8t + \frac{h^2}{\nu} + \frac{h\sqrt{h^2 + 16\nu t}}{\nu}\Big).$$

Используя седловые точки, получаем оценку

$$I_1 = \frac{(i\sqrt{2\pi}\,)^2}{\pi i}\Big(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1^0}}\,\chi_1(s_1^0, n_1^0)\,\mathrm{e}^{\psi_1(s_1^0, n_1^0)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta_1^1}}\,\chi_1(s_1^1, n_1^1)\,\mathrm{e}^{\psi_1(s_1^1, n_1^1)}\Big),$$

где

$$\Delta_1^0 = \frac{i\sqrt{4\nu^2 t^4(h + \sqrt{h^2 + 16\nu t}\,)^2 + 64t^5\nu^3}}{h(h + \sqrt{h^2 + 16\nu t}\,)}, \quad \Delta_1^1 = \frac{i\sqrt{4\nu^2 t^4(h - \sqrt{h^2 + 16\nu t}\,)^2 + 64t^5\nu^3}}{h(h - \sqrt{h^2 + 16\nu t}\,)} \ —$$

значения гессиана

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{s^2} + \dfrac{nh}{\nu(s^2 + n/\nu)^{3/2}} & -\dfrac{sh}{2\nu(s^2 + n/\nu)^{3/2}} \\ -\dfrac{sh}{2\nu(s^2 + n/\nu)^{3/2}} & -\dfrac{h}{4\nu^2(s^2 + n/\nu)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

в седловых точках (s_1^0, n_1^0) и (s_1^1, n_1^1) соответственно.

Оценки других интегралов I_j $(j = 2, 3, \ldots, 8)$ в данной работе не приводятся. Эти интегралы имеют ту же форму, что и интеграл I_1, и могут быть получены методом наискорейшего спуска. Используя оценки для всех интегралов, получаем следующее выражение для функции $\eta(x,t)$:

$$\eta(x,t) = \frac{(i\sqrt{2\pi}\,)^2}{\pi i}\sum_{j=1}^{8}\Big(\frac{1}{\sqrt{\Delta_j^0}}\,\chi_j(s_j^0, n_j^0)\,\mathrm{e}^{\psi_j(s_j^0, n_j^0)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta_j^1}}\,\chi_j(s_j^1, n_j^1)\,\mathrm{e}^{\psi_j(s_j^1, n_j^1)}\Big).$$

Выражения для функций $\chi_j(s,n)$, $\psi_j(s,n)$, s_j^0, s_j^1, n_j^0, n_j^1 $(j = 2, 3, \ldots, 8)$ приведены в таблице ($b(t) = \sqrt{h^2 + 16\nu t}$; s_j^0, s_j^1 и n_j^0, n_j^1 — седловые точки уравнений $\partial\psi_j/\partial s = \partial\psi_j/\partial n = 0$, соответствующие интегралам I_j $(j = 2, 3, \ldots, 8)$; величины Δ_j^0, Δ_j^1 — определители гессианов Δ_j в точках (s_j^0, n_j^0) и (s_j^1, n_j^1) $(j = 2, 3, \ldots, 8)$).

4. Результаты численных расчетов. В работе [6] решена задача о возникновении волн на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины вследствие наличия возмущений свободной поверхности жидкости либо поверхностного давления и получено выражение для толщины слоя жидкости $\eta(x,t)$, но не приведены результаты вычислений.

Выражения для функций $\chi_j(s,n)$, $\psi_j(s,n)$, s_j^0, s_j^1, n_j^0, n_j^1 $(j=2,3,\ldots,8)$

j	$\chi_j(s,n)$	$\psi_j(s,n)$	s_j^0	s_j^1	n_j^0	n_j^1
2	$-\chi_1(s,n)$	$\ln s^2+nt+sh-\xi h$	s_1^0	s_1^1	$\dfrac{8\nu t+h^2-hb(t)}{8\nu t^2}$	$\dfrac{8\nu t+h^2+hb(t)}{8\nu t^2}$
3	$\chi_1(s,n)$	$\ln s^2+nt-sh+\xi h$	$\dfrac{-h-b(t)}{4\nu t}$	$\dfrac{-h+b(t)}{4\nu t}$	n_1^0	n_1^1
4	$\chi_2(s,n)$	$\ln s^2+nt-sh-\xi h$	s_3^0	s_3^1	n_1^0	n_1^1
5	$-\xi\chi_1(s,n)$	$\ln s+nt+sh+\xi h$	s_1^0	s_1^1	$\dfrac{4\nu t+h^2-hb(t)}{8\nu t^2}$	$\dfrac{4\nu t+h^2+hb(t)}{8\nu t^2}$
6	$\chi_5(s,n)$	$\ln s+nt+sh-\xi h$	s_1^0	s_1^1	$\dfrac{-4\nu t+h^2-hb(t)}{8\nu t^2}$	$\dfrac{-4\nu t+h^2+hb(t)}{8\nu t^2}$
7	$-\chi_5(s,n)$	$\ln s+nt-sh+\xi h$	s_3^0	s_3^1	n_5^0	n_5^1
8	$\chi_7(s,n)$	$\ln s+nt-sh-\xi h$	s_3^0	s_3^1	n_6^0	n_6^1

В данной работе приводятся графики функции $\eta(x,t)$ для двух типов возмущения свободной поверхности и двух типов распределения поверхностного давления. Для случаев 1, 3 приведены графики безразмерной функции $\eta(x,t)$ в соответствии с асимптотическим выражением для нее при $h=5$ и различных значениях ν.

Случай 1. В данном случае полагаем $p_0=0$, $\eta_0(x)=\delta(x)$. На рис. 1, 2 представлены графики функции $\eta(x,t)$ при $t=120$, $x=450$ соответственно.

Случай 2. В данном случае полагаем

$$p_0=0,\qquad \eta_0(x)=\begin{cases}1, & -1<x<1,\\ 0, & x<-1,\quad x>1.\end{cases}$$

Величина $\eta(x,t)$ измеряется в метрах. На рис. 3, 4 приведены графики функции $\eta(x,t)$ при $t=350$ с, $x=450$ м соответственно.

Случай 3. В данном случае полагаем $p_0(x,t)=\delta(x)\delta(t)$, $\eta_0=0$. На рис. 5, 6 показаны графики функции $\eta(x,t)$ при $t=150$, $x=450$ соответственно.

Случай 4. В данном случае полагается $p_0(x,t)=Q\delta(x)(1-\cos\sigma t)$, $\eta_0=0$. Давление можно рассматривать как осциллятор, действующий на поверхность жидкости в бесконечно малой окрестности начала координат. На рис. 7, 8 приведены графики функции $\eta(x,t)$ при $t=250$ с и $x=450$ м соответственно.

Рассматриваемое в случае 4 распределение поверхностного давления использовалось в работе [6] при исследовании трехмерного течения в слое воды большой толщины. На рис. 9 приведена зависимость толщины слоя жидкости η от координаты x при $t=450$ с, полученная в работе [6] при решении двумерной задачи (см. уравнение (6.3)), а также зависимость $\eta(x)$, полученная в данной работе при $h=50$ м, $\nu=1{,}5$ м^2/с, $\rho=1$ кг/м^3, $\sigma=0{,}5$ с$^{-1}$. Приведенные на рис. 9 зависимости качественно согласуются, что подтверждает корректность предложенного в данной работе метода.

На рис. 10 представлена зависимость толщины слоя жидкости η от времени при $x=150$ м, полученная в работе [2] (см. уравнение (6.5.12)) для жидкости бесконечной глубины при очень малом значении кинематической вязкости и начальных возмущениях, заданных в случае 1, а также зависимость $\eta(t)$, полученная в данной работе при $h=50$ м, $\nu=0{,}0001$ м^2/с, $\rho=1$ кг/м^3. Приведенные на рис. 10 зависимости качественно согласуются, что также подтверждает корректность предлагаемого метода.

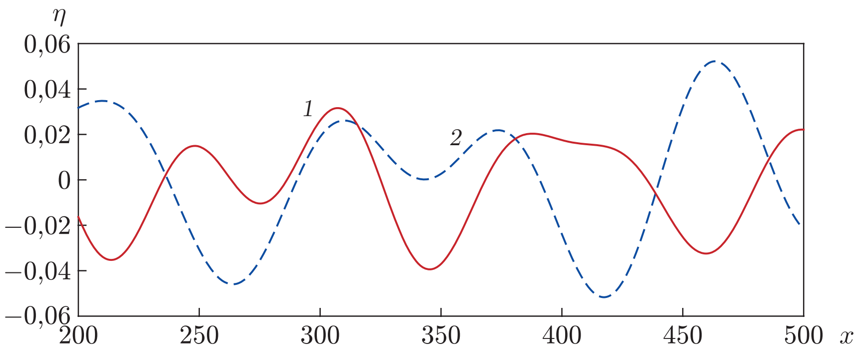

Рис. 1. Зависимость толщины слоя жидкости от координаты x при $\rho = 1{,}5$, $t = 120$ в случае 1:
1 — $\nu = 1{,}01$, *2* — $\nu = 1{,}50$

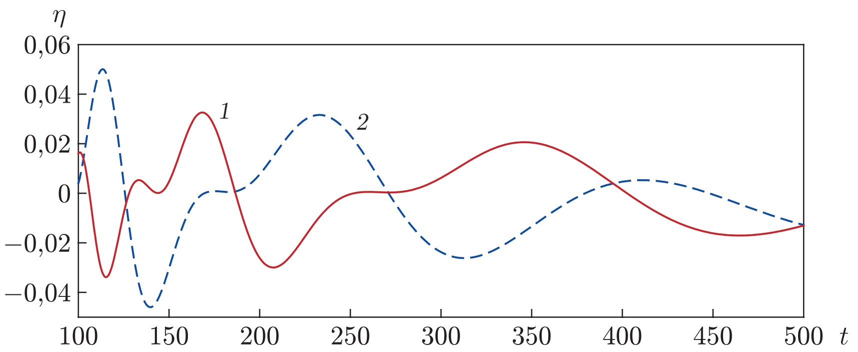

Рис. 2. Зависимость толщины слоя жидкости от времени при $\rho = 1{,}5$, $x = 450$ в случае 1:
1 — $\nu = 1{,}01$, *2* — $\nu = 1{,}50$

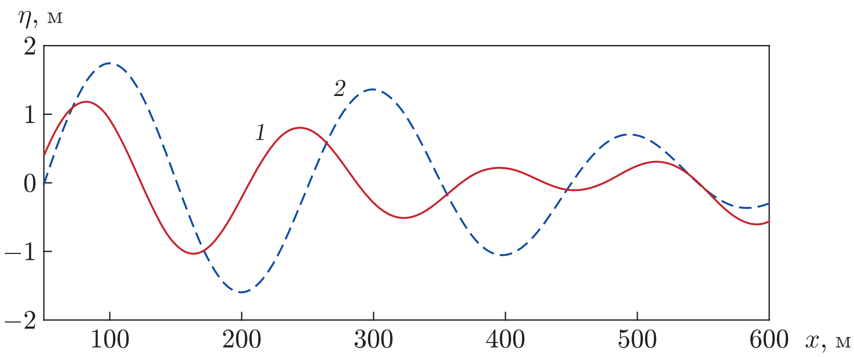

Рис. 3. Зависимость толщины слоя жидкости от координаты x при $\rho = 1{,}5$ кг/м^3, $t = 350$ с в случае 2:
1 — $\nu = 1{,}01$ м^2/с, *2* — $\nu = 1{,}50$ м^2/с

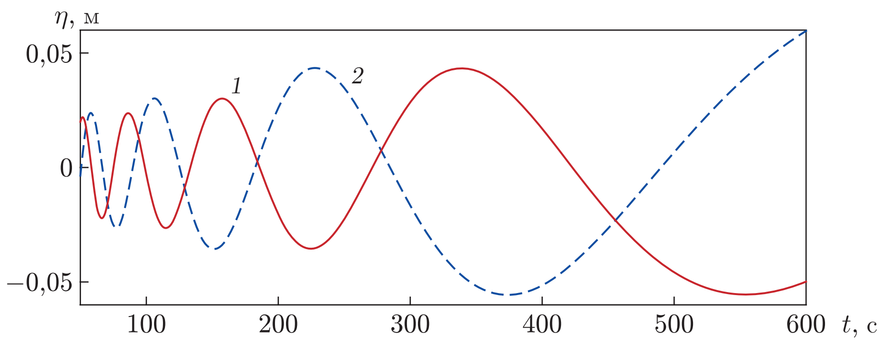

Рис. 4. Зависимость толщины слоя жидкости от времени при $\rho = 1{,}5$ кг/м^3, $x = 450$ м в случае 2:
1 — $\nu = 1{,}01$ м^2/с, *2* — $\nu = 1{,}50$ м^2/с

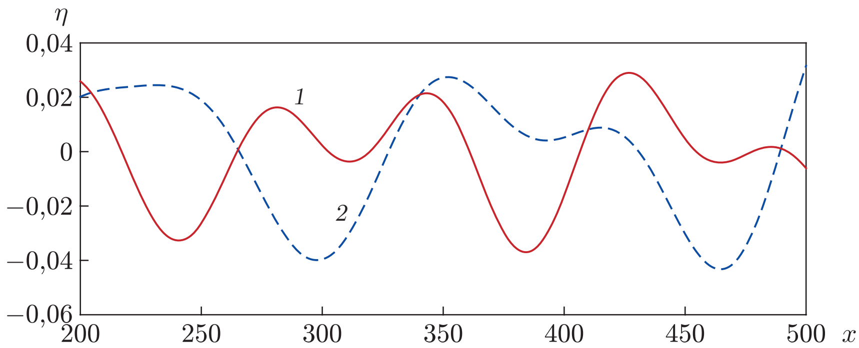

Рис. 5. Зависимость толщины слоя жидкости от координаты x при $\rho = 1$, $t = 150$ в случае 3:
1 — $\nu = 1{,}01$, *2* — $\nu = 1{,}50$

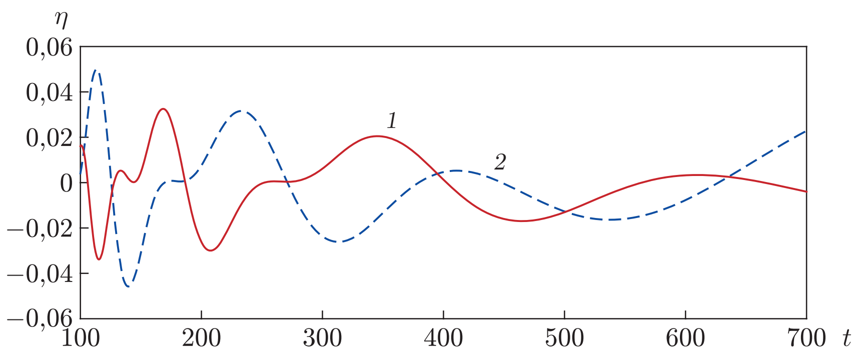

Рис. 6. Зависимость толщины слоя жидкости от времени при $\rho = 1$, $x = 450$ в случае 3:
1 — $\nu = 1{,}01$, *2* — $\nu = 1{,}50$

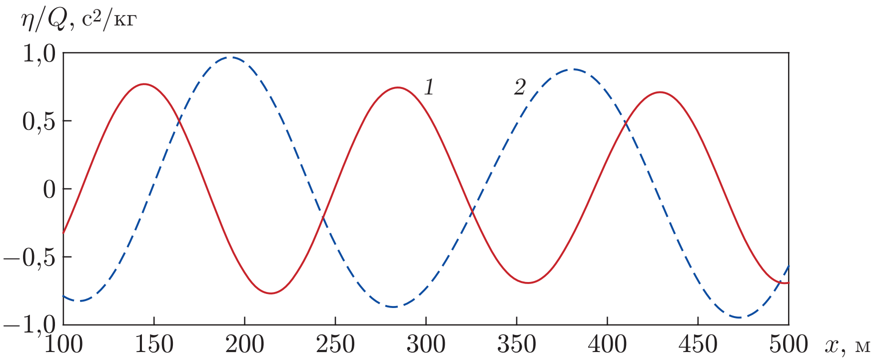

Рис. 7. Зависимость толщины слоя жидкости от координаты x при $\rho = 1$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}5$ с$^{-1}$, $t = 250$ с в случае 4:
1 — $\nu = 1{,}01$ м^2/с, *2* — $\nu = 1{,}50$ м^2/с

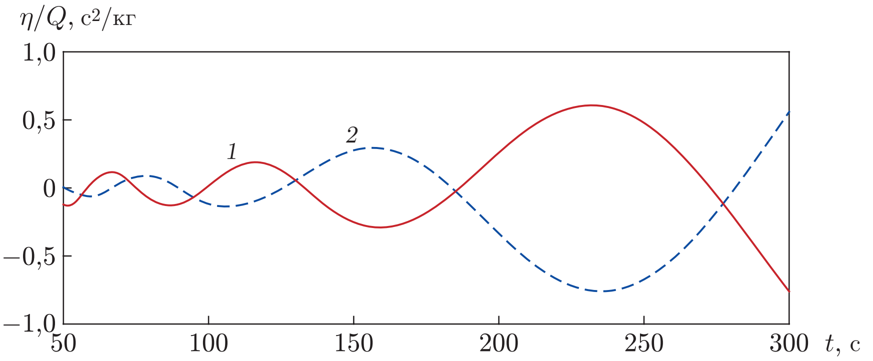

Рис. 8. Зависимость толщины слоя жидкости от времени при $\rho = 1$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}5$ с$^{-1}$, $x = 450$ м в случае 4:
1 — $\nu = 1{,}01$ м^2/с, *2* — $\nu = 1{,}50$ м^2/с

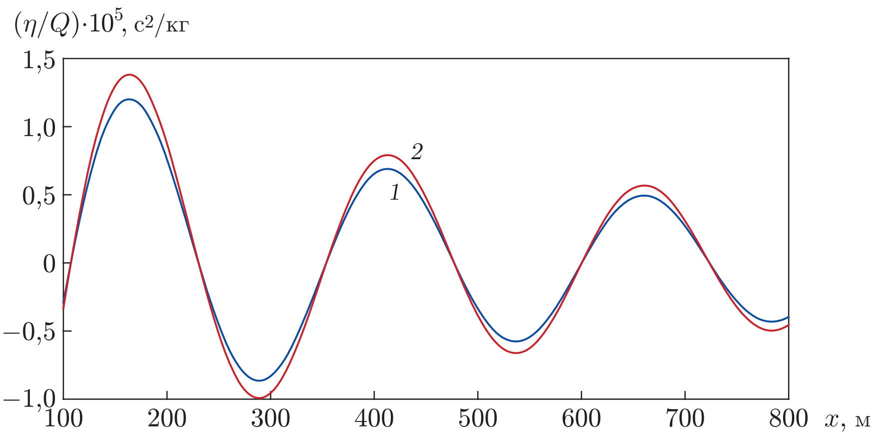

Рис. 9. Зависимость толщины слоя жидкости от координаты x при $h = 50$ м, $\nu = 1{,}5$ м^2/с, $\rho = 1$ кг/м^3, $t = 450$ с в случае 4:
1 — данные работы [6], *2* — данные настоящей работы

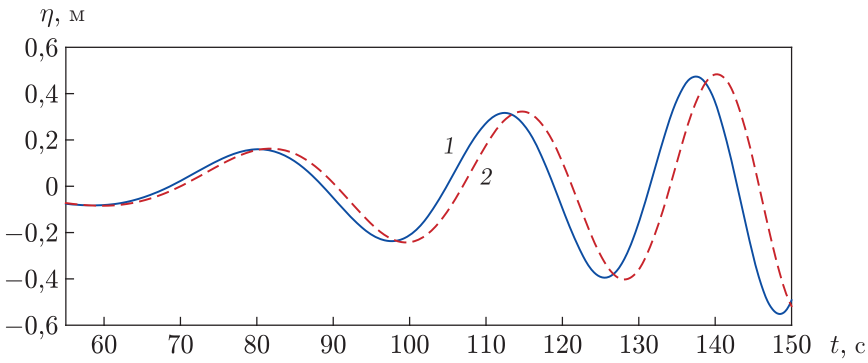

Рис. 10. Зависимость толщины слоя жидкости от времени при $h = 50$ м, $\nu = 0{,}0001$ м^2/с, $\rho = 1$ кг/м^3, $x = 150$ м в случае 4:
1 — данные работы [2], *2* — данные настоящей работы

Заключение. Исследован процесс возникновения двумерного неустойчивого течения в слое несжимаемой вязкой жидкости конечной толщины вследствие наличия начальных возмущений свободной поверхности жидкости либо поверхностного давления. С помощью преобразований Лапласа и Фурье выражение для формы свободной поверхности представлено в виде кратного интеграла, который при $h \to -\infty$ совпадает с интегралом, полученным в работе [6]. Для кратного интеграла с использованием метода наискорейшего спуска получена асимптотическая оценка. Проведено сравнение этой оценки с полученными ранее результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lamb H.** Hydrodynamics. N. Y.: Dover, 1945.
2. **Stoker J. J.** Water waves: The mathematical theory with applications. N. Y.: Intersci. Publ., 1957.
3. **Chakraborty R., Mandal B. N.** Water waves generated by instantaneous disturbances at the bed of a sloping beach // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 2013. V. 107. P. 481–496.
4. **Jeffreys H., Lapwood E. R.** The reflexion of a pulse within a sphere // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 241. P. 455–479.
5. **Kundu P., Mandal B. N.** Generation of surface waves due to initial axisymmetric surface disturbance in water with a porous bottom // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2019. V. 24. P. 625–644.
6. **Nikitin A. K., Podrezov S. A.** On the spatial problem of waves on the surface of a viscous fluid of infinite depth // J. Appl. Math. Mech. 1964. V. 28. P. 452–463.
7. **Cherkesov L. V.** Three dimensional Cauchy — Poisson problem for waves in a viscous fluid // J. Appl. Math. Mech. 1965. V. 29. P. 1138–1146.
8. **Miles J. W.** The Cauchy — Poisson problem for a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1968. V. 34. P. 359–370.
9. **Pramanik A. K., Majumdar S. R.** Capillary gravity waves generated in a viscous fluid // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 46–51.
10. **Debnath L., Bagchi K. K., Mukherjee S.** Capillary gravity waves in a viscous fluid // Acta Mech. 1976. V. 28. P. 313–319.

Поступила в редакцию 2/VII 2020 г.,
после доработки — 25/VIII 2020 г.
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.