УДК 533

ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОДМОДЕЛИ РАДИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

С. В. Хабиров

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: habirov@anrb.ru

Для модели радиальных движений идеального газа найдены все частично инвариантные по группе растяжений решения. Для нахождения решений применяется метод разделения переменных в уравнении, содержащем функции одной переменной, но разные функции от различных независимых переменных. Решения задают различные непрерывные нестационарные схождения или расширения газа под действием поршня с точечным стоком или источником. Если сток или источник действует одновременно для всех частиц, то происходит коллапс или взрыв.

Ключевые слова: радиальное движение газа, коллапс, источник, разделение переменных.

Введение. При групповом анализе уравнений идеальной газовой динамики получено множество инвариантных подмоделей [1, 2]. При исследовании частично инвариантных подмоделей существенно затруднено изучение совместимости переопределенных систем [3, 4]. Для инвариантных подмоделей ранга 2 частично инвариантные подмодели ранга 1 дефекта 1 сводятся к одному уравнению для функций одной переменной, но эти функции зависят от разных переменных. Разделение переменных в этом уравнении — задача нетривиальная, но решаемая. В работе приведены примеры такого разделения для подмодели радиальных движений газа.

1. Постановка задачи. Радиально-симметричные движения газа задаются уравнениями

$$\begin{gathered} U_t + UU_r + \rho^{-1} p_r = 0, \\ \rho_t + U\rho_r + \rho(U_r + \nu r^{-1} U) = 0, \\ S_t + US_r = 0, \qquad p = f(\rho, S), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где U — радиальная скорость; ρ — плотность; S — энтропия; p — давление; $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; $\nu = 0, 1, 2$ — параметр плоской, цилиндрической, сферической симметрии движения соответственно.

Уравнения (1.1) допускают растяжения $t\,\partial_t + r\,\partial_r$ [1]. С помощью инвариантов $s = rt^{-1}$, U, ρ, S можно задать три различных представления частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 1. В этих представлениях одна функция должна быть общего вида и зависеть от t и r. Эту функцию называют лишней [3]. Остальные функции зависят от переменной s. Систему (1.1) можно записать для функций, зависящих от одной переменной (s или t) либо от суммы таких переменных. Возникает проблема разделения переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-000080-а, 05-01-00775-а, НШ-5245.2006.1).

2. Плотность как лишняя функция. Предположим, что плотность $\rho = \rho(t, s)$ является функцией общего вида, а скорость $U = U(s)$ и энтропия $S = S(s)$ — функциями одной инвариантной переменной s. Подставляя представление решения в (1.1), получаем

$$\begin{gathered} (U - s)S' = 0, \qquad (U - s)U' + \rho^{-1}(f_\rho \rho_s + f_S S') = 0, \\ t\rho_t + (U - s)\rho_s = -\rho(U' + \nu s^{-1}U). \end{gathered} \tag{2.1}$$

При $U = s$ из (2.1) следует решение $\rho = t^{-\nu-1}\rho_0\mu(S)$, где $S = S(s)$ — произвольная функция; $\rho = g(p)\mu(S)$ — уравнение состояния с разделенной плотностью. Такое изоэнтропическое решение изучалось в [5].

Движение изоэнтропическое ($S = S_0$ при $U \neq s$), уравнения (2.1) имеют интегралы

$$U = \varphi'(s), \qquad (\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi + i(\rho) = D(t), \qquad i = \int \rho^{-1} f_\rho \, d\rho; \tag{2.2}$$

$$\tau'(i)\big(tD' - (\varphi' - s)^2\varphi''\big) + \varphi'' + \nu s^{-1}\varphi' = 0, \qquad \ln\rho = \tau(i). \tag{2.3}$$

Если из (2.2) определить i и подставить в (2.3), то получим равенство, содержащее функции одной переменной $D(t)$, $\varphi(s)$, $\tau(i)$. Необходимо разделить переменные. Продифференцируем (2.3) по t и s и возьмем отношение полученных равенств:

$$\begin{aligned} t(D')^{-1}D''(U - s)U'(U' - \nu s^{-1}U) + (U - s)^2\nu s^{-1}UU'' + tD'(U'' + \nu s^{-1}U' - \nu s^{-2}U) + \\ + (U - s)U'[2(U')^2 + U'(\nu s^{-1}U + \nu - 1) + \nu s^{-1}U(s^{-1}U - 2)] = 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение по t, получим равенство, в котором при условиях $(tD')' \neq 0$, $U' + \nu s^{-1}U \neq 0$ можно разделить переменные s и t:

$$\frac{(t(D')^{-1}D'')'}{(tD')'} = -\frac{U'' + \nu s^{-1}U' - \nu s^{-2}U}{(U - s)U'(U' + \nu s^{-1}U)} = k. \tag{2.4}$$

Здесь k — постоянная.

В результате интегрирования уравнения (2.4) для D возможны следующие случаи:
а) $D = C_0^{-1}(n - 1)^{-1}|t|^{1-n}$ при $k = 0$, $n \neq 1$;
б) $D = -k^{-1}\ln|C_0 + k(1 - n)^{-1}|t|^{1-n}|$ при $n \neq 1$, $k \neq 0$;
в) $D = -k^{-1}\ln|C_0 + k\ln|t||$ при $k \neq 0$, $n = 1$, где C_0, n — постоянные.

В случае "а" имеем $tD' = (1 - n)D$. Уравнение (2.3) принимает вид

$$\tau'(i)\big[(1 - n)(i + (\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi) - \varphi''(\varphi' - s)^2\big] + \varphi'' + \nu s^{-1}\varphi' = 0. \tag{2.5}$$

После дифференцирования по i переменные разделяются:

$$i + \tau'(\tau'')^{-1} = -(\varphi')^2/2 + s\varphi' - \varphi + (1 - n)^{-1}\varphi''(\varphi' - s)^2 = A$$

(A — постоянная). Интегрируя это уравнение, получим $\tau = (\gamma - 1)^{-1}\ln|C^{-1}(i - A)|$ и

$$p = f(\rho) = C_0\rho^\gamma + p_0, \qquad i = A + \gamma C_0(\gamma - 1)^{-1}\rho^{\gamma-1}.$$

Здесь γ, p_0, C_0 — постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения в (2.5) и приравнивая к нулю коэффициент при i, имеем два уравнения, одно из которых определяет функцию φ интегрированием. Подставляя те же выражения во второе уравнение и приравнивания к нулю коэффициенты при различных степенях s, получаем решения

$$\begin{gathered} U = 2(\gamma(\nu + 1) + 1 - \nu)^{-1}s, \qquad \gamma \neq 1, \\ \frac{\gamma C_0}{\gamma - 1}\,\rho^{\gamma-1} = \frac{(\nu + 1)(\gamma - 1) + 2}{2C_0(\gamma - 1)(\nu + 1)}\,|t|^{-2(\gamma-1)(\nu+1)/[(\gamma-1)(\nu+1)+2]} + \frac{(\gamma - 1)(\nu + 1)s^2}{2(\gamma\nu + \gamma + 1 - \nu)} \end{gathered} \tag{2.6}$$

при $\nu \neq 0$, $n = [3(\gamma - 1)(\nu + 1) + 2]/[(\gamma - 1)(\nu + 1) + 2] \neq 1$ и

$$U = 2(\gamma + 1)^{-1} s + U_0,$$
$$\frac{\gamma C_0}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2C_0(\gamma - 1)} |t|^{2(1-\gamma)/(\gamma+1)} + \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^2} s^2 - \frac{2U_0 s}{\gamma + 1} + \frac{U_0^2}{\gamma - 1} \qquad (2.7)$$

при $\nu = 0$ (U_0 — постоянная). Решения (2.6), (2.7) имеют линейное поле скоростей и содержатся в решениях, полученных в [6, § 16] в виде рядов. В данной работе для плотности получены конечные формулы.

В случае "б" имеем $tD' = (n - 1)k^{-1}(1 - C_0 \exp(kD))$, $n \neq 1$, $k \neq 0$. Уравнение (2.3) принимает вид

$$(n - 1)\big(1 - C_0 \exp(ki) \exp[k((\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi)]\big)/k -$$
$$- (\varphi' - s)^2 \varphi'' + \tau'(i)^{-1}(\varphi'' + \nu s^{-1} \varphi') = 0. \qquad (2.8)$$

После дифференцирования по i переменные разделяются:

$$\frac{(1 - n)C_0 \exp[k((\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi)]}{\varphi'' + \nu s^{-1} \varphi'} = \frac{\tau''}{(\tau')^2} \exp(-ki) = -kA$$

(kA — постоянная). Отсюда следует $(\tau')^{-1} = A \exp(ki) + B$ (B — постоянная интегрирования). Подставляя последнее выражение в (2.8) и приравнивая к нулю коэффициент при $\exp(ki)$ в случае $A \neq 0$, получаем два равенства для функции $\varphi(s)$:

$$\varphi'' = \frac{(n - 1)k^{-1} + B\nu s^{-1} \varphi'}{(\varphi' - s)^2 - B},$$

$$\ln((n - 1)A^{-1}k^{-1}C_0) + k((\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi)' =$$
$$= \ln((n - 1)k^{-1} + \nu s^{-1} \varphi'(\varphi' - s)^2) - \ln((\varphi' - s)^2 - B).$$

Если $A = 0$, то $(tD')' = 0$ (этот случай рассмотрен ниже).

Дифференцируя последнее равенство по s и вводя вместо U и s переменные W и λ по формулам

$$W = sU^{-1}, \qquad \lambda = (s^2(W^{-1} - 1)^2 - B)\big((n - 1)k^{-1}W + \nu B\big)^{-1},$$

получим линейное по W равенство

$$\nu\lambda^2((n - 2)W + \nu Bk + 1) + \lambda((\nu - 3 + n)W + \nu(Bk - 1)) + 2 = 0 \qquad (2.9)$$

и равенство для дифференциалов

$$W\Big(\frac{n - 1}{k} W + \nu B\Big) \frac{d\lambda}{dW} = 2\Big[B + \lambda\Big(\frac{n - 1}{k} W + \nu B\Big)\Big]\Big(\frac{\lambda}{\lambda - 1} + \frac{1}{W - 1}\Big) - \frac{n - 1}{k} \lambda W.$$

Исключая отсюда W в силу (2.9), получим полиномиальное по λ соотношение. Следовательно, либо $\lambda = \lambda_0$ — постоянная, либо полученное соотношение является тождеством по λ. При $\lambda = \lambda_0$ имеем $U = s$ (т. е. случай, рассмотренный выше). Тождество по λ записывается в виде

$$\nu Bk + (n - 1)\Big(\nu(n - 2) \frac{\nu(\nu Bk + 1)\lambda^2 + \nu(Bk - 1)\lambda + 2}{(\nu(n - 2)\lambda + n + \nu - 3)^2} - \frac{2\nu(\nu Bk + 1)\lambda + \nu(Bk - 1)}{\nu(n - 2)\lambda + n + \nu - 3}\Big) =$$
$$= 2\Big(kB(\nu\lambda + 1) - (n - 1) \frac{\nu(\nu Bk + 1)\lambda^2 + \nu(Bk - 1)\lambda + 2}{\nu(n - 2)\lambda + n + \nu - 3}\Big) \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{\nu(n-2)\lambda+n+\nu-3}{\nu\lambda^2(\nu Bk+n-1)+\lambda(\nu Bk+n-3)+2}\Big) \times$$
$$\times \Big(\lambda \frac{2\nu(\nu Bk+1)\lambda+\nu(Bk-1)}{\nu(\nu Bk+1)\lambda^2+\nu(Bk-1)\lambda+2} - \frac{\nu(n-2)\lambda}{\nu(n-2)\lambda+n+\nu-3} - 1\Big).$$

При $\lambda = 0$ отсюда получаем $2\nu(n-2)(n+\nu-3)^{-1} = Bk(n+2\nu-3) - 2n - 3\nu + 2$, при $\lambda \to \infty$ имеем $\nu Bk = 1-n$. Значит, $\nu \neq 0$, $n \neq 1$, $k \neq 0$.

Следовательно, при $\nu = 1$ уравнение $n^2 + 4 = 0$ не имеет действительных корней, при $\nu = 2$ уравнение имеет корень $n = 1$. Возникает противоречие. Таким образом, в случае "б" новые решения отсутствуют.

В случае "в" имеем $tD' = -\exp(kD)$, $k \neq 0$. Уравнение (2.3) принимает вид

$$-\exp(ki)\exp[k((\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi)] + (\tau')^{-1}(\varphi'' + \nu s^{-1}\varphi') = 0. \tag{2.10}$$

Дифференцируя это уравнение по i, получаем равенство $(\tau')^{-1} = A\exp(ki) + B$, $A \neq 0$. Подставляя τ' в (2.10) и приравнивая к нулю коэффициент при $\exp(ki)$, имеем

$$\varphi'' = \frac{\nu B s^{-1}\varphi'}{(\varphi'-s)^2 - B}, \qquad \frac{A\nu s^{-1}\varphi'(\varphi'-s)^2}{(\varphi'-s)^2 - B} = \exp[k((\varphi')^2/2 - s\varphi' + \varphi)].$$

Дифференцируя это выражение по s, получим соотношения, которые после замены $U = \varphi' = sV$, $\mu = s^2(V-1)^2 - B$ становятся линейным уравнением для V:

$$V = \frac{\mu(\mu - (\nu-2)B)}{(\nu B+1)\mu^2 + \nu B(Bk-1)\mu + 2\nu B^2}$$

и дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mu}{2(\mu+B)} + \Big(\frac{\mu}{\mu-\nu B} - \frac{V}{V-1}\Big)\, d\ln V = 0.$$

Отсюда следует тождество по переменной μ

$$-\frac{1}{2} = \Big(\frac{\mu+B}{\mu-\nu B} + \frac{(\mu-(\nu-2)B)(\mu+B)}{\nu Bk\mu^2 + B\mu(\nu Bk-2) + 2\nu B^2}\Big) \times$$
$$\times \Big(\frac{2\mu-(\nu-2)B}{\mu-(\nu-2)B} - \mu\, \frac{2(\nu Bk+1)\mu + \nu B(Bk-1)}{(\nu Bk+1)\mu^2 + \nu B(Bk-1)\mu + 2\nu B^2}\Big).$$

При $\mu \to \infty$ имеем $\nu B = 0$, следовательно, $U = U_0$, т. е. получаем тривиальное решение, соответствующее покою. Случай $U' + 2s^{-1}U = 0$ сводится к случаю $(tD')' = 0$.

Осталось рассмотреть случай $tD' = ka_0^2$ (ka_0^2 — постоянная). Отсюда следует, что $D = a_0^2 \ln|t|^k$, $k \neq 0$, и уравнение (2.3) принимает вид

$$\tau'(i)[a_0^2 k - (\varphi'-s)^2\varphi''] + \varphi'' + \nu s^{-1}\varphi' = 0. \tag{2.11}$$

После разделения переменных i и s в силу (2.2) получим

$$\tau = a_0^{-2} i + b_0, \qquad p = f(\rho, S_0) = a_0^2\rho + p_0, \qquad i = a_0^2 \ln(\rho/\rho_0).$$

В новых переменных $U = s + a_0 u$, $s = a_0 x$ уравнение (2.11) сводится к уравнению Абеля

$$\frac{dx}{du} = \frac{x(u^2-1)}{\nu u - x(u^2 - k - \nu - 1)}, \tag{2.12}$$

а плотность определяется равенством

$$\rho = \rho_0 |t|^k \exp\Big(-\frac{1}{2}u^2 - \int u\, dx\Big). \tag{2.13}$$

Подмодель (2.12) для уравнений газовой динамики в литературе не встречалась.

При $\nu = 0$ уравнение (2.12) имеет интеграл

$$x - x_0 = \begin{cases} -u + 1/u, & k = -1, \\ -u - (\beta^2 + 1)\,\mathrm{arctg}\,(u/\beta), & k + 1 = -\beta^2, \\ -u - \dfrac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \ln\Bigl|\dfrac{u + \alpha}{u - \alpha}\Bigr|, & k + 1 = \alpha^2. \end{cases}$$

При $\nu \neq 0$ уравнение (2.12) имеет интегральную прямую $x = 0$ и инвариантно при инверсии $x \to -x$, $u \to -u$. Особая точка $x = 0$, $u = 0$ является седлом. Сепаратрисы седла имеют касательные $x = 0$ и $(k + \nu + 1)x + (\nu + 1)a = 0$ в особой точке.

Если $k + \nu = 0$, то другие особые точки отсутствуют. Интегральные кривые для этого случая построены ниже.

3. Скорость как лишняя функция. Пусть скорость $U = U(t, s)$ — функция общего вида, а плотность $\rho = \rho(s)$ и энтропия $S = S(s)$ — функции одной инвариантной переменной $s = rt^{-1}$. Из системы (1.1) следует, что движение газа изоэнтропическое ($S = S_0$):

$$U = s^{-\nu}\rho^{-1}\Bigl(u(t) + \int s^{\nu+1}\rho'(s)\,ds\Bigr), \qquad u' \neq 0, \qquad i = \int \rho^{-1} f_\rho \rho'\,ds,$$

$$tu' + \Bigl(u + \int s^{\nu+1}\rho'\,ds - s^{\nu+1}\rho\Bigr) \times \tag{3.1}$$

$$\times \Bigl[s\rho^{-1}\rho' - s^{-\nu}\rho^{-1}(\nu s^{-1} + \rho^{-1}\rho')\Bigl(u + \int s^{\nu+1}\rho'\,ds\Bigr)\Bigr] + s^\nu \rho i' = 0.$$

Дифференцируя (3.1) по t, получим равенство, в котором переменные t и s можно разделить:

$$\frac{1}{u'}\Bigl(\frac{(tu')'}{u'}\Bigr)' = \frac{2}{s^\nu \rho}\Bigl(\frac{\nu}{s} + \frac{\rho'}{\rho}\Bigr) = 2k$$

(k — постоянная). Отсюда находим $tu' = ku^2 + nu + c$, $s^\nu \rho(R_0 + ks) = 1$, где n, c, R_0 — постоянные интегрирования. Подставляя найденные выражения в (3.1) и приравнивая к нулю коэффициенты при степенях переменной u, получим равенства $k = 0$, $\rho = \rho_0 s^{-\nu}$, $n = \nu$ ($\nu = 1, 2$), $i = i_0 - c\rho_0^{-1}s - \nu(\nu + 1)s^2/2$, $U = -\nu s + \rho_0^{-1}\nu^{-1}(c_1 t^\nu - c)$, где i_0, c_1, ρ_0 — постоянные.

При $\nu = 1$ находим решение

$$\rho = \rho_0 s^{-1}, \qquad U = -s + \rho_0^{-1}(c_1 t - c), \qquad p = p_0 + c\ln\rho - 2\rho_0^2\rho^{-1}, \tag{3.2}$$

при $\nu = 2$ — решение

$$\rho = \rho_0 s^{-2}, \qquad U = -2s + \rho_0^{-1}(c_1 t^2 + c)/2, \qquad p = p_0 + c\rho_0^{-1/2}\rho^{1/2} + 3\rho_0 \ln\rho. \tag{3.3}$$

При $c > 0$ из уравнений состояния следует, что $p > 0$ в области $\rho > \rho_1 > 0$, где $p_\rho > 0$, $p_{\rho\rho} < 0$. При $c < 0$ давление положительно в области $0 < \rho_1 < \rho < \rho_2$, $p_\rho > 0$ в интервале $\rho_1 < \rho < \rho_m < \rho_2$, где $p_{\rho\rho} < 0$.

Таким образом, уравнения состояния в (3.2) и (3.3) не удовлетворяют свойствам нормального газа [7, § 2], но решения с линейным полем скоростей являются оригинальными.

4. Энтропия как лишняя функция. Пусть энтропия $S = S(t, s)$ — функция общего вида, а плотность $\rho = \rho(s)$ и скорость $U = U(s)$ — функции одной инвариантной переменной s. Из системы (1.1) следуют равенства

$$\begin{gathered} S = t\exp\Bigl(-\int (U - s)^{-1}\,ds\Bigr), \qquad p = D(t) - \int \rho(U - s)U'\,ds, \\ (U - s)\,d\rho + \rho(dU + \nu s^{-1}U\,ds) = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь S — функция энтропии; $D(t)$ — произвольная функция. Отсюда следует уравнение состояния в виде

$$p = f(\rho, S) = D(S\alpha(\rho)) + \beta(\rho),$$

где

$$\alpha(\rho) = \exp\Big(\int (U - s)^{-1}\,ds\Big), \qquad \beta(\rho) = -\int \rho(U - s)U'\,ds.$$

Если функция $U(s)$ задана, то из (4.1) можно определить плотность $\rho(s)$, а значит, функции $\alpha(\rho)$, $\beta(\rho)$. Таким образом, существует уравнение состояния, при котором движение газа происходит со скоростью $U(s)$.

Если $\alpha(\rho)$, $\beta(\rho)$ заданы, то выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\beta' = (V - 1)^2 s^2(\nu V\rho\alpha^{-1}\alpha' + 1), \qquad U = sV,\\ (V - 1)\alpha^{-1}\alpha'\,d\rho = s^{-1}\,ds = -\big((\nu + 1)V + \alpha\rho^{-1}(\alpha')^{-1}\big)^{-1}\,dV.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Исключая отсюда переменную s, получим дифференциальное уравнение (4.2) и конечное соотношение между величинами ρ и V:

$$\begin{multline}V^2(3\nu + 1)\rho\alpha^{-2}(\alpha')^2 + V\big(\nu\rho\alpha'\alpha^{-1}\beta''(\beta')^{-1} + 4\nu\alpha^{-1}\alpha' - \nu\rho\alpha^{-1}\alpha'' -\\ - \nu(\nu - 2)\rho\alpha^{-2}(\alpha')^2\big) + (\beta')^{-1}\beta'' + 2\rho^{-1} + (2 - \nu)\alpha^{-1}\alpha' = 0.\end{multline} \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) не является тождеством по переменной V, оно определяет функцию $V(\rho)$. Если эту функцию подставить в (4.2), то получим дифференциальное соотношение между α и β. Таким образом, в уравнении состояния лишь одну из функций (α или β) можно выбрать произвольно. Получены новые точные решения, зависящие от вида уравнения состояния из семейства с однофункциональным произволом.

5. Движение газа в случае точных решений. Формулы (2.6) задают изоэнтропическое течение политропного газа с мировыми линиями

$$r = C|t|^k, \qquad k = 2(\gamma(\nu + 1) + 1 - \nu)^{-1} \neq 1, \qquad \nu = 1, 2,$$

где γ — показатель адиабаты $p = C_0\rho^\gamma + p_0$; C — лагранжева координата частиц. Если $1 < \gamma < 2$, то $1/2 < k < 1$ при $\nu = 1$; $2/5 < k < 1$ при $\nu = 2$. Если $\gamma > 1$, то $k < 1$. При $t \to -0$ частицы сходятся к центру с бесконечными скоростями, при этом плотность стремится к бесконечности (рис. 1). При $-\infty < t < 0$ происходит коллапс в точку, а при $0 < t < \infty$ — разлет частиц из центра с бесконечной скоростью [6, § 16].

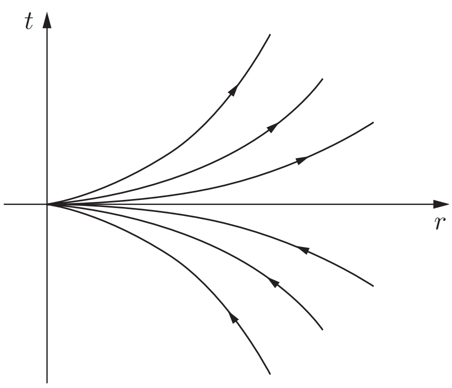

Рис. 1. Коллапс и разлет частиц

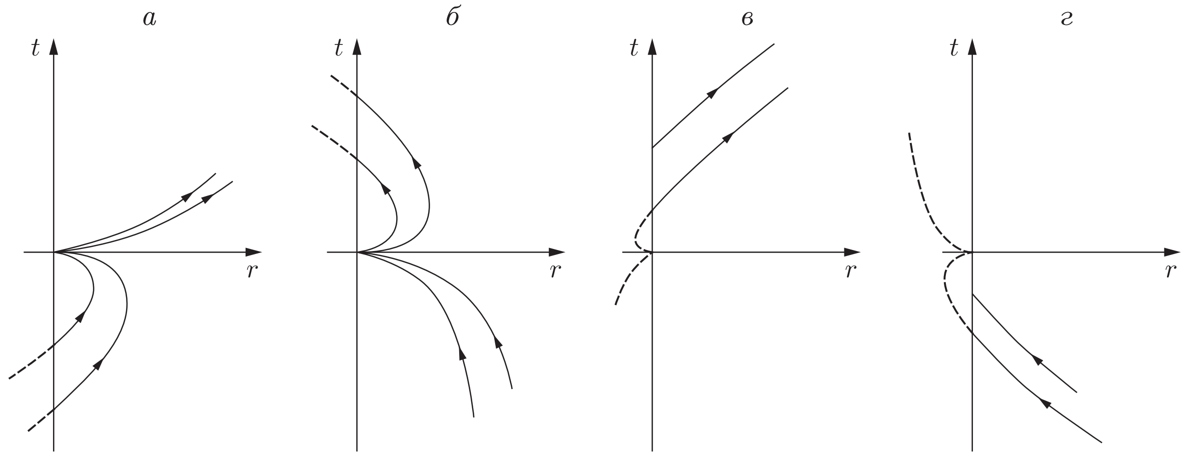

Рис. 2. Четыре типа движения с плоскими волнами:
а — источник с коллапсом и точечный взрыв; *б* — коллапс и точечный взрыв со стоком;
в — источник; *г* — сток

Формулы (2.7) задают изоэнтропическое течение с плоскими волнами ($\nu = 0$) политропного газа с мировыми линиями

$$r = C|t|^{2/(\gamma+1)} + U_0\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,t,$$

где C — лагранжева координата частиц. При $t = t_c$, $|t_c| = [(C/U_0)(\gamma-1)/(\gamma+1)]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$ частица находится в начале координат ($r = 0$) и имеет скорость $(dr/dt)\big|_{t=t_c} = U_0$. Возможны четыре типа движения: 1) источник с коллапсом и точечный взрыв при $C > 0$, $U_0 > 0$ (рис. 2,*а*); 2) коллапс и точечный взрыв со стоком при $C > 0$, $U_0 < 0$ (рис. 2,*б*); 3) источник при $C < 0$, $U_0 > 0$ (рис. 2,*в*); 4) сток при $C < 0$, $U_0 < 0$ (рис. 2,*г*).

Рассмотрим уравнение Абеля (2.12) с одной особой точкой $(0,0)$ (седло) при $\nu + k = 0$. Сепаратриса седла имеет асимптотику:

$$x \sim -(\nu+1)u - \frac{\nu(\nu+1)}{\nu+2}\,u^3 + O(u^5) \qquad \text{при} \qquad u \to -0,$$

$$u \sim -1 + \frac{\nu}{2x} - \frac{\nu^2}{8x^2} + \frac{\nu^2}{4x^3} + o(x^{-3}) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,\ u \to -1.$$

Вычислим пределы, характеризующие поведение интегральных кривых в верхней полуплоскости $x > 0$ (рис. 3):

$$\frac{dx}{du}\Big|_{u=\pm1} = 0, \qquad \frac{d^2x}{du^2}\Big|_{u=\pm1} = \frac{2x}{\nu}$$

(следовательно, на прямых $u = \pm1$ расположены минимумы),

$$\frac{dx}{du}\Big|_{u=0} = -1, \qquad \frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{x} < 0$$

(следовательно, на кривой $x(u^2-1) = \nu u$ расположены максимумы).

Для всех интегральных кривых имеем

$$u - \frac{1}{u} = \frac{\nu}{x}\Big(1 + \frac{\nu}{2x^2} + O(x^{-4})\Big) > 0 \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,\ u \to \pm1,$$

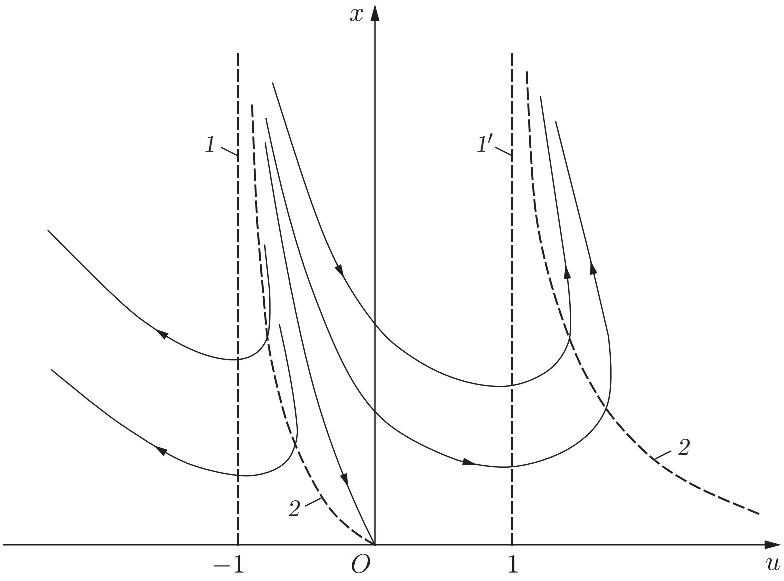

Рис. 3. Интегральные кривые уравнения Абеля с одной особой точкой:
1 — $u = -1$; *1′* — $u = 1$; *2* — $x(u^2 - 1) = \nu u$

следовательно,

$$u \sim \frac{\nu}{2x}\Big(1 + \frac{\nu}{2x^2}\Big) \pm \Big(1 + \frac{\nu^2}{8x^2}\Big).$$

Так как кривая максимумов имеет асимптоты $u = \pm 1$, то все интегральные кривые асимптотически приближаются к ней при $x \to \infty$, $u \to \pm 1$.

Вдоль любой прямой $x = lu$, $l \neq 0$ имеем

$$\frac{dx}{du}\Big|_{x=lu} = \frac{l(u^2 - 1)}{\nu - l(u^2 - 1)} \to -1 \qquad \text{при} \qquad u \to \infty.$$

При $u \to -\infty$ интегральные кривые имеют асимптотику $x = C - u - \nu u^{-1} - C\nu u^{-2}/2 + \ldots$.

Для каждой интегральной кривой уравнения (2.12) на рис. 3 мировые линии частиц определяются из уравнения

$$\frac{dr}{dt} = U = a_0(x + u), \qquad r = a_0 tx.$$

Следовательно, $dx/u = dt/t$, а плотность вдоль мировой линии задается равенством (2.13).

При $u \to -0$ (точка O на рис. 3) вдоль сепаратрисы седла имеем $x \sim -(\nu + 1)u$, $t \sim C|u|^{-\nu-1}$, $r \sim Ca_0(\nu + 1)|u|^{-\nu}$, где C определяет частицу. Значит, $t \to \infty$, $r \to \infty$, $dr/dt \sim -\nu a_0 u \to 0$ и седло соответствует разлету частиц с нулевой скоростью в вакуум ($\rho \to 0$ на бесконечности).

Вдоль интегральных кривых, асимптотически приближающихся к асимптоте $u = -1$ (рис. 3), имеем

$$u \to -1 + 0, \quad x \sim \nu(u + 1)^{-1}/2, \quad t \sim C|1 + u^{-1}|^{\nu/2} \exp\big(-\nu(u + 1)^{-1}/2\big) \to 0,$$

$$r \sim (1/2)\nu a_0 C|u|^{-1}|1 + u^{-1}|^{-1+\nu/2} \exp\big(-\nu(u + 1)^{-1}/2\big) \to 0, \quad \frac{dr}{dt} \sim \nu a_0(u + 1)^{-1}/2 \to \infty.$$

При $t \to -0$ такому поведению решения соответствует коллапс частиц в точке $r = 0$ с бесконечной скоростью, причем $\rho \to \infty$.

Вдоль интегральных кривых, асимптотически приближающихся к асимптоте $u = -1$ (рис. 3), имеем

$$u \to 1 + 0, \quad x \sim \nu(u-1)^{-1}/2, \quad t \sim C|1 - u^{-1}|^{\nu/2} \exp(\nu(u-1)^{-1}/2) \to \infty,$$

$$r \sim (1/2)\nu a_0 C u^{-1} |1 - u^{-1}|^{-1+\nu/2} \exp(\nu(u-1)^{-1}/2) \to \infty, \quad \frac{dr}{dt} \sim a_0(u + \nu(u-1)^{-1}/2) \to \infty.$$

Такому поведению решения соответствует разлет частиц с бесконечной скоростью в вакуум ($\rho \to 0$ на бесконечности).

Вдоль интегральной кривой с асимптотой $x = C - u$ (см. рис. 3) имеем

$$u \to -\infty, \quad x \sim C - u - \nu u^{-1}, \quad t \sim C_1 |u|^{-1} \exp(\nu(u-1)^{-1}/2) \to 0,$$

$$r \sim a_0 C_1 |u|^{-1} \exp(\nu u^{-2}/2)(C - u - \nu u^{-1}) \to a_0 C_1, \quad \frac{dr}{dt} \sim a_0(C - \nu u^{-1}) \to a_0 C.$$

Такому поведению решения соответствует разлет частиц с конечной скоростью со сфер радиусом $a_0 C_1$ в среду с распределением плотности $\rho = \rho_0 a_0^\nu r^{-\nu}$ в начальный момент.

Картина мировых линий качественно соответствует рис. 1.

Замечание. Решения (3.2), (3.3) для газа с уравнениями состояния, не удовлетворяющими свойствам нормального газа, задают непрерывное схождение и расширение газа с возможными стоком и источником в центре, где плотность и давление бесконечны. Мировую линию, не попадающую в центр, можно считать поршнем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Хабиров С. В.** Инвариантные решения уравнений газовой динамики // Вестн. Уфим. гос. авиац.-техн. ун-та. 2001. № 1. С. 47–52.
3. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы “Подмодели” для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 3. С. 362–372.
4. **Хабиров С. В.** Нерегулярные частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1 уравнений газовой динамики // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1168–1181.
5. **Хабиров С. В.** Непрерывное радиальное ограниченное движение газа под действием поршня // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 124–135.
6. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
7. **Овсянников Л. В.** Лекции по газовой динамике. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 18/IV 2006 г.,
в окончательном варианте — 21/IX 2006 г.