

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕШЕНИЯ БУРКЕ — ШУМАНА
ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО ПЛАМЕНИ
ПРИ ОПИСАНИИ ГОРЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЕЩЕСТВ**

Л. К. Гусаченко
(Новосибирск)

Решение Бурке — Шумана для формы газового пламени [1—3] применили при описании горения твердых составов Бекстед [4] и его последователи (см. обзор [5]).

В [1—3] аналитически найдена форма ламинарного диффузионного пламени газовой горелки, в которую окислитель и горючее поступают по соосным трубам (рис. 1, а). Там же рассмотрен вариант «плоской» горелки. Пламя начинается у среза стенки внутренней трубы и заканчивается на оси потока или на стенке наружной трубы в зависимости от того, какой реагент (поступающий по внутренней или по наружной трубе) в недостатке. Решение получено для вытянутых («длинных») пламен, когда $\psi = \rho D / mb \ll 1$. Здесь ρ , D , m — плотность, коэффициент диффузии, массовый поток газов; b — радиус наружной трубы. При $\psi \ll 1$ без большой ошибки удастся пренебречь «поперечной» неоднородностью m и неоднородностью течения (вызванной тепловыделением в пламени и неравномерностью распределения m в подающих трубах).

В [4] использована постановка задачи [1] для моделирования горения смесевых твердых топлив (СТТ). Рассмотрен элемент поверхности горения в виде круга $r \leq a$ окислителя и прослойки $a < r < b$ горючего, вокруг него

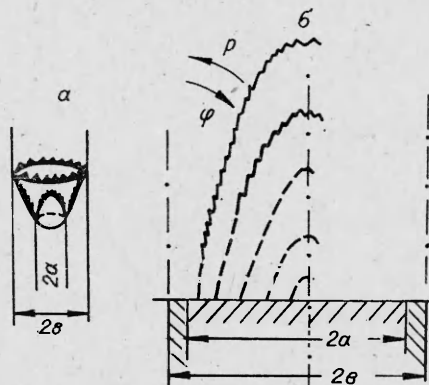


Рис. 1. Газовое пламя в горелке (а) и около кристалла окислителя (б).

При этом пришлось обобщить решение на характерный для СТТ случай «коротких» пламен $\psi \geq 1$. Однако в [4] и во всех последующих работах этого направления (см. обзор [5]) не учтено, что при $\psi \geq 1$ непригодно использованное в [1] граничное условие (6) (см. ниже) для концентрации на плоскости $z = 0$ (на поверхности СТТ), вследствие чего может радикально измениться форма пламени.

Предположим, что массовая скорость выгорания окислителя и горючего на всей поверхности одинакова и равна m . Массовый поток в газе также всюду одинаков, равен m и направлен по оси z . Относительные концентрации окислителя и горючего α_1 и α_2 изменяются по закону Фика с коэффициентом диффузии D , причем принимается всюду $\rho D = \text{idem}$. При $x = \pm b$ поставлена газонепроницаемая перегородка. Такая картина математически описывается следующим образом (ср. с [2]):

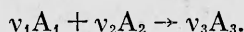
$$m \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = \rho D \nabla^2 \alpha_1 - W_1, \quad m \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = \rho D \nabla^2 \alpha_2 - W_2,$$

$$x = 0, \quad x = b: \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 0,$$

$$z = 0: \quad m \alpha_1 - \rho D \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = \begin{cases} m, & x < a, \\ 0, & a < x < b, \end{cases}$$

$$m \alpha_2 - \rho D \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = \begin{cases} 0, & x < a, \\ m, & a < x < b. \end{cases}$$

Окислитель A_1 и горючее A_2 вступают в реакцию



Скорости реакций W_1, W_2 связаны соотношением

$$W_1/(\nu_1 \mu_1) = W_2/(\nu_2 \mu_2).$$

Здесь μ_1, μ_2 — молярные массы. Реакции удается исключить из рассмотрения, если вместо α_1, α_2 искать их комбинацию $\beta = \alpha_1 - \nu \alpha_2$, где $\nu = (\nu_1 \mu_1)/(\nu_2 \mu_2)$ — стехиометрическое массовое соотношение. Для β задача принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{m}{\rho D} \frac{\partial \beta}{\partial z} &= \nabla^2 \beta, \\ x=0, \quad x=b: \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} &= 0, \\ z=0: \quad \beta - \frac{\rho D}{m} \frac{\partial \beta}{\partial z} &= \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ -\nu, & a < x < b. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Для осесимметричного случая ($x=r$) полагаем

$$\rho D/m b = \psi, \quad r/b = \xi, \quad z/b = \eta, \quad a/b = c.$$

Решение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta &= (1 + \nu) c^2 - \nu + 2c(1 + \nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\varphi_k c) J_0(\varphi_k \xi)}{\varphi_k J_0^2(\varphi_k)} \times \\ &\times \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2\varphi_k \psi)^2}} e^{-\frac{\sqrt{1 + (2\varphi_k \psi)^2 - 1}}{2\psi} \eta}, \\ J_1(\varphi_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В «плоском» случае

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \frac{2\beta + (\nu - 1)}{\nu + 1} = 2c - 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin(k\pi c)}{1 + \psi m_k} e^{-\eta m_k} \cos(k\pi \xi), \\ m_k &= \sqrt{(k\pi)^2 + (1/2\psi)^2} - (1/2\psi). \end{aligned} \quad (3)$$

Для численного счета удобно представить (3) в виде

$$\delta - 2c + 1 = f(c - \xi) + f(c + \xi),$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x)}{k(1 + \psi m_k)} e^{-\eta m_k}.$$

Для моделирования эксперимента, описанного в [6] (тонкий слой горючего помещен между толстыми слоями прессованного окислителя), можно положить $b \rightarrow \infty$, а граничное условие в (1) при $z=0$ примет вид

$$\beta - \frac{\rho D}{m} \frac{\partial \beta}{\partial z} = \begin{cases} -\nu, & 0 < x < a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Обозначая $2(\beta - 1)/(\nu + 1) = \gamma$, $x/a = \xi$, $y/a = \eta$, $\rho D/ma = \psi$, с помощью косинус-преобразования Фурье по ξ можно получить

$$\gamma = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[-(\eta/\psi)(\sqrt{0.25 + (\omega\psi)^2} - 0.5)] \sin \omega \cos(\omega \xi)}{\sqrt{0.25 + (\omega\psi)^2} + 0.5} \frac{d\omega}{\omega} \quad (4)$$

или (в виде, более удобном для численного счета)

$$-\frac{\pi}{4} \gamma = J(\eta/2\psi, (1 - \xi)/2\psi) + J(\eta/2\psi, (1 + \xi)/2\psi),$$

$$J(x, y) = \int_0^1 e^{-y \frac{1-z}{z}} \sin\left(x \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \frac{dz}{(1+z)^2(1-z)}.$$

Величину $J(x, y)$ можно получить численно в виде таблицы, выделив особенности на пределах интегрирования. Аналогичная осесимметричная задача (столбик горючего, запрессованный в большой образец окислителя) имеет решение

$$\gamma = -2 \int_0^{\infty} \frac{\exp[-(\eta/\psi)(\sqrt{0.25 + (s\psi)^2} - 0.5)]}{\sqrt{0.25 + (s\psi)^2} + 0.5} J_1(s) J_0(sr/a) ds.$$

Сравнивая (2) с решениями из [1—3], отмечаем, что в них вместо комплекса

$$f(\psi, \eta, k) = \frac{2 \exp[-(\eta/2\psi)(\sqrt{1 + (2\varphi_k\psi)^2} - 1)]}{1 + \sqrt{1 + (2\varphi_k\psi)^2}} \quad (5)$$

входит $\exp(-\eta\psi\varphi_k^2)$, получаемая из $f(\psi, \eta, k)$ при $\psi \ll 1$. Разумеется, этот результат получен в [1—3] не упрощением (2), а решением упрощенной по сравнению с (1) задачи. В частности, показатель экспоненты изменился вследствие пренебрежения в уравнении диффузии (1) членом $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$. Множитель же перед экспонентой в (5) выродился в единицу за счет пренебрежения в граничном условии (1) диффузионным потоком $-\psi \frac{\partial \beta}{\partial(z/b)}$. Использовалось условие

$$z = 0, \quad \beta = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ -\nu, & a < x < b. \end{cases} \quad (6)$$

Сравнивая (2) с решением Бекстеда из [5], обобщенным для «коротких» пламен, убеждаемся, что экспонента выглядит одинаково (в уравнении диффузии учтен член $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$). Множитель перед экспонентой комплекса (5) в решении [5] вырожден в единицу, как и в [1—3], что свидетельствует об использовании в [5] граничного условия (6).

Из определения β видно, что при $\beta = 0$ достигается стехиометрическое соотношение реагентов, поэтому диффузионное пламя расположено на поверхности $\beta = 0$. Из (6) следует, что поверхность $\beta = 0$ находится в месте контакта твердых окислителя и горючего на поверхности: при $z = 0$, $x = a$ величина β принимает все значения от $-\nu$ до 1, в том числе и 0. Точное же граничное условие (1) дает при $z = 0$, $x = a$ разрыв только градиента β . Сама величина β непрерывна и необязательно равна нулю. Проще всего можно убедиться в этом для «антисимметричной» постановки, когда между газонепроницаемыми стенками зажаты соприкасающиеся равновеликие пластины окислителя и горючего (рис. 2). Выполняется уравнение (1) с граничными условиями

$$x = \pm a: \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0,$$

$$z = 0: \quad \beta - \frac{\rho D}{m} \frac{\partial \beta}{\partial z} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -\nu, & x > 0. \end{cases}$$

Обозначим $\delta = (2\beta + \nu - 1)/(\nu + 1)$, тогда для δ

$$x = \pm a: \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0,$$

$$z = 0: \quad \delta - \frac{\rho D}{m} \frac{\partial \delta}{\partial z} = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

Решение (δ) уравнения диффузии с такими граничными условиями представляет собой нечетную функцию от x . Из граничных условий также следует, что при $z = 0$, $x = 0$ разрыв имеет $\nabla \delta$, но не δ . Поэтому $\delta(0, z) = 0$, в частности, $\delta(0, 0) = 0$, $\beta(0, 0) = (1 - \nu)/2 \neq 0$. Поверхность

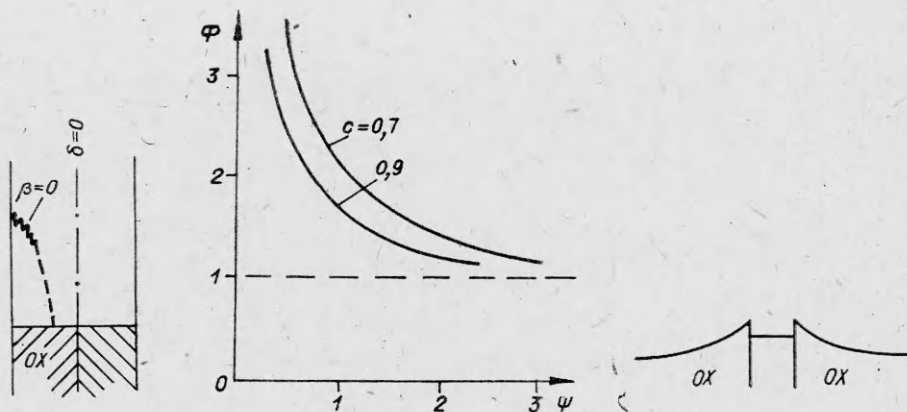


Рис. 2. Пламя в плоской щели.

Рис. 3. Граница области существования поверхности $\beta = 0$, на которой выполняется стехиометрическое соотношение.

Рис. 4. Профиль сечения погашенного слоистого образца.

$\beta = 0$ начинается не в месте контакта твердых окислителя и горючего. Такое смещение имеет место для всех рассмотренных задач, и оно тем больше, чем больше $(1 - \nu)$ и ψ . При некоторых условиях поверхность $\beta = 0$ (а с ней и диффузионное пламя) вообще не реализуется. Найдем для решения (2) условия, при которых эта поверхность стягивается в точку. Подставляя в (2) $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\beta = 0$, имеем

$$\nu(\psi, c) = [(c^2 + 2c\Sigma)^{-1} - 1]^{-1}, \quad \Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\Phi_k c)}{\Phi_k J_0^2(\Phi_k)} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2\Phi_k \psi)^2}}. \quad (7)$$

Результаты расчета по (7) представлены на рис. 3. При одинаковых плотностях окислителя и горючего величина $(1 - c^2)/c^2$ представляет собой массовое отношение горючего и окислителя модельного состава. Отклонение состава от стехиометрического характеризует величина $\Phi = \nu(1 - c^2)/c^2$. При $c = a/b = \text{const}$ выше соответствующей кривой на рис. 3 располагается область значений параметров Φ , ψ , для которых диффузионное пламя в рассмотренной модели заведомо отсутствует ($\beta = 0$ не достигается). Оценим величину $\psi = \rho D / mb$. Согласно [7], $\rho D = 1,6 \cdot 10^{-4} (T/T_0)^{3/4}$ г/(см · с). Для $T_0 \approx 300$ К, $T \approx 2545$ К, $\rho D \approx 0,8 \cdot 10^{-3}$ г/(см · с). Пусть $m \approx 0,5$ г/(см² · с), $2b \approx 20$ мкм (величина $2b$ приблизительно соответствует размеру частиц окислителя), тогда $\psi \approx 1,4$. В этом случае при $c = 0,7$ диффузионного пламени не будет, если $\Phi \geq 1,7$ (вполне реальное значение). На самом деле такое пламя исчезает уже при меньшей величине Φ . Дело в том, что на поверхности $\beta = 0$ концентрации компонентов находятся в стехиометрическом соотношении и необязательно равны нулю. Они обращаются в нуль (что характерно для диффузионного пламени) на этой поверхности лишь на некотором «кинетическом» расстоянии от твердого топлива. Поэтому при уменьшении поверхности $\beta = 0$ диффузионная ее часть исчезнет прежде, чем исчезнет вся поверхность $\beta = 0$. На рис. 1, б схематично показано изменение поверхности $\beta = 0$ при уменьшении давления p (при этом $\psi \sim 1/m$ возрастает). Штриховой линией показана «кинетическая» часть поверхности, которая увеличивается при уменьшении давления.

Отметим, что в [7] «кинетическая» высота пламени непропорционально прибавляется к высоте поверхности $\beta = 0$ над топливом. Последняя уже включает в себя «кинетическую» высоту. Численно ее можно найти, решая нелинейные уравнения для α_1 , α_2 .

Развитый подход позволяет частично объяснить результаты экспериментов [6], где сжигали трехслойные образцы, в которых тонкий слой

горючего находился между толстыми слоями ПХА. Образцы гасили сбросом давления, погашенную поверхность фотографировали. Для пяти типичных горючих при $p = 30, 70$ и 140 атм и при различных толщинах прослойки горючего (как наиболее характерные взяты $30, 70, 150$ мкм) получен одинаковый результат: скорость горения ПХА вблизи прослойки горючего уменьшена (см. на рис. 4 типичный профиль разреза погашенного образца). При $p = 70$ и 140 атм, когда ПХА нормально горит самостоятельно, на полученных профилях вообще нет четко выраженных минимумов, которые указывали бы на тепловое воздействие от «первичного» пламени. Торможение горения ПХА вблизи горючего нельзя объяснить плавлением и растеканием последнего: по крайней мере одно из горючих не плавилось. По-видимому, торможение вызвано тем, что в газовой фазе горючее просто разбавило газообразный окислитель над ПХА, затормозив этим горение ПХА как монотоплива. При этом тепловыделение от диффузионного пламени ввиду большого значения «кинетической» высоты не компенсирует уменьшение теплового потока к поверхности за счет торможения собственного пламени ПХА.

Поступила в редакцию 9/IV 1984,
после доработки — 23/VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. S. P. Burke, T. E. W. Schumann. First and Second Symposium on Combustion. Combustion Institute, Pittsburgh, 1965.
2. Ф. А. Вильямс. Теория горения. М.: Наука, 1974.
3. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович и др. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
4. R. L. Derr, M. W. Beckstead, N. S. Cohen. AFRPL-TR-69-190, Lockheed Propulsion Co., 1969.
5. Н. С. Козн. РТК, 1980, 18, 4.
6. Е. Прайс, Дж. Хэндли, Р. Паниам и др. РТК, 1981, 19, 4.
7. М. Бекстед, Р. Дерр, С. Прайс. РТК, 1970, 8, 12.

ТЕОРИЯ ГОРЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ. II. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ГОРЕНИЯ ЖИДКОСТИ — ГОРЕНИЕ СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

С. Н. Мильков, Г. С. Сухов, Л. П. Ярин
(Ленинград)

Горение конечного слоя жидкости имеет ряд специфических особенностей, обусловленных теплоотводом в подложку, на которой покоится жидкость. Это определяет зависимость характеристик процесса не только от физико-химических свойств реагирующих компонентов и геометрических параметров системы, но и от свойств подложки и ее агрегатного состояния.

Процесс горения жидкости, покоящейся на поверхности твердого тела, подобен процессу горения полубесконечного слоя. В обоих случаях непрерывность горения обеспечивается прогревом жидкости путем теплопроводности и испарения ее со свободной поверхности. При большой скорости химической реакции в газовой фазе теплоотвод в подложку ведет лишь к некоторому уменьшению скорости процесса, не изменяя общего характера явления. Аналогично развивается горение, когда подложка представляет собой инертную жидкость, температура кипения которой $T_{к3}$ выше температуры кипения реагирующей жидкости $T_{к2}$.

Ситуация качественно изменяется, если подложка — легкокипящая жидкость. В этом случае, когда $T_{к2} > T_{к3}$, на некотором удалении от границы раздела реагирующей и инертной жидкостей располагается изотер-