

УДК 537.84

О НАГРЕВЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПОСТОЯННЫМ ПОТОКОМ ТЕПЛА

Г. В. Беляков, А. А. Чарахчян*

Институт динамики геосфер РАН, 119334 Москва

* Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 119991 Москва

Численно исследовано несколько вариантов задачи о нагреве сжимаемой жидкости постоянным тепловым потоком. Обнаружено, что начиная с определенного момента времени давление всюду за ударной волной мало отличается от постоянного значения. Получены приближенные аналитические формулы, из которых следуют независимость давления от теплопроводности и некоторые закономерности зависимости давления от интенсивности потока тепла. Приведен ряд примеров, подтверждающих соответствие между формулами и численным решением задачи.

Ключевые слова: нестационарные течения, сжимаемая жидкость, тепловая волна, ударная волна, трение.

Введение. Одномерная плоская задача нагрева вещества, поставленная для уравнения теплопроводности, т. е. без учета движения вещества, хорошо изучена. Такая задача допускает автомодельную постановку для широкого класса граничных условий и зависимостей теплопроводности от температуры [1]. Задача с учетом движения вещества менее исследована; известно только одно автомодельное решение для частного вида граничного условия и коэффициента теплопроводности [2]. В [2] также проведено качественное сопоставление распределений скоростей распространения тепловой и ударной волн. В настоящее время нетрудно получить численное решение задачи при конкретных значениях параметров. Однако это не снижает роли аналитических формул, которые позволяют дать в явном виде зависимость основных характеристик течения от параметров задачи.

Настоящая работа посвящена исследованию важного частного случая нагрева вещества постоянным по времени потоком тепла, когда удастся найти аналитическую формулу для одной из основных характеристик течения. Интерес к данной задаче связан с моделированием нагрева вещества за счет трения, которое, возможно, позволит объяснить особенности одного эксперимента по ударному сжатию алюминиевой пластины на клине. Поэтому основной пример, на котором проверяется точность полученной формулы, несколько необычен. Рассматривается расплав алюминия при высоком давлении, возникающий за фронтом присоединенной ударной волны при бесструйном сжатии пластины со скоростью 4 км/с (см. [3]). Используется широкодиапазонное уравнение состояния алюминия [4] в табличной форме. Кроме того, формула проверяется на задаче с уравнением состояния совершенного газа. Для определенности выбираются параметры, примерно соответствующие воздуху.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00551).

Постановка задачи и приближенная формула. Плоское одномерное течение сжимаемой теплопроводной жидкости описывается уравнениями

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{d(\varepsilon + u^2/2)}{dt} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \varkappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

где x — пространственная переменная; t — время; u — скорость; ρ — плотность; p — давление; ε — удельная внутренняя энергия; $T(x, t)$ — температура; $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$ — лагранжева производная по времени; $\varkappa = \varkappa(\rho, T)$ — теплопроводность. Уравнения (1) замыкаются уравнениями состояния $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Жидкость занимает полупространство $0 \leq x < \infty$. В момент $t = 0$ жидкость неподвижна, а термодинамические переменные постоянны: $\rho = \rho_0$, $T = T_0$, $p = p_0 = p(\rho_0, T_0)$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon(\rho_0, T_0)$. На границе $x = 0$ ставится условие симметрии $u = 0$ и задается постоянный поток тепла q :

$$-\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q. \quad (2)$$

Если в последнем уравнении (1) положить $u \equiv 0$ и $\rho \equiv \rho_0$, то получим уравнение теплопроводности

$$\rho_0 C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \varkappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad C_v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}. \quad (3)$$

Задачу (3), (2) с начальным условием $T(x, 0) = T_0$ будем называть тепловой задачей. Представляет интерес ее решение на конечном интервале времени $0 \leq t \leq t_*$. Полагая коэффициенты уравнения (3) C_v и \varkappa мало изменяющимися в этом интервале, заменим их на постоянные значения $C_{v0} = \partial \varepsilon(\rho_0, T_0)/\partial T$, $\varkappa_0 = \varkappa(\rho_0, T_0)$. Такая задача допускает известную автомодельную постановку [1]. Ее решение имеет вид

$$T_h(x, t) = T_0 + \sqrt{t} A \left[\exp(-\eta^2) - 2\eta \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\beta^2) d\beta \right], \quad (4)$$

$$A = 2q\sqrt{\chi}/(\varkappa_0\sqrt{\pi}), \quad \eta = x/(2\sqrt{\chi t}), \quad \chi = \varkappa_0/(C_{v0}\rho_0).$$

Здесь η — автомодельная переменная; χ — температуропроводность.

Следуя [2], введем в рассмотрение скорость тепловой волны \dot{x}_h и скорость ударной волны D . Используя приближенное решение тепловой задачи (4), скорость \dot{x}_h определим как скорость движения точки с фиксированным значением автомодельной переменной $\eta = \eta_0$:

$$\dot{x}_h = \eta_0 \sqrt{\chi/t}. \quad (5)$$

Так как $\dot{x}_h \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ и $\dot{x}_h \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, условие $\dot{x}_h = D$ определяет некоторый момент времени t_* . Будем полагать, что начиная с t_* ударная волна обгоняет тепловую и движется по невозмущенной жидкости. Сделаем замену $D = M c_0$ (M — число Маха ударной волны; c_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости), тогда в силу (5) имеем

$$\sqrt{t_*} = \eta_0 \sqrt{\chi}/(M c_0). \quad (6)$$

Решение задачи (1), (2), как показал анализ представленных ниже результатов расчетов, обладает следующим свойством. После формирования ударной волны давление всюду за ее фронтом мало отличается от характерного значения p_* , не зависящего от x и t . Это, в частности, означает, что скорость ударной волны D и параметры непосредственно за ее фронтом, которые однозначно определяются по давлению за фронтом, слабо зависят от t . Следует отметить существенное отличие от работы [2], в которой зависимость $D(t)$ предполагается такой же, как и зависимость температуры на границе от времени, т. е. $D \sim \sqrt{t}$.

Еще одно важное следствие слабой зависимости давления от времени заключается в том, что рост температуры на границе происходит почти по изобаре $p = p_*$. Поэтому знание величины p_* позволяет приближенно определить температуру, при которой начинается испарение жидкости, найдя в плоскости термодинамических переменных точку пересечения изобары и кривой испарения.

Для определения p_* сделаем два предположения. Во-первых, полагаем температуру на границе $T(0, t)$ мало отличающейся от $T_h(0, t)$ вплоть до момента t_* . Подставляя (6) в (4), получим

$$T_* = T_h(0, t_*) = T_0 + \frac{2q\eta_0}{\sqrt{\pi}\rho_0 C_{v0} c_0 M(p_*)}. \quad (7)$$

Зависимость $M(p_*)$ определяется ударной адиабатой для волны с давлением за фронтом p_* и невозмущенной жидкостью перед фронтом. Во-вторых, пренебрегаем отличием плотности на границе в момент t_* от начальной плотности ρ_0 , что позволяет определить p_* формулой

$$p_* = p(\rho_0, T_*), \quad (8)$$

которая вместе с (7) является алгебраическим уравнением относительно p_* .

Формулы (7), (8) позволяют сделать два важных вывода о характере зависимости p_* от параметров задачи: 1) p_* не зависит от теплопроводности κ_0 , хотя решение задачи (1), (2) и, в частности, момент t_* существенно зависят от κ ; 2) p_* возрастает с увеличением q . Для слабых ударных волн ($M \approx 1$) приращение температуры $(T_* - T_0) \sim q$, что в случае уравнения состояния совершенного газа дает $(p_* - p_0) \sim q$. Для сильных ударных волн $M(p_*) \sim \sqrt{p_*}$. Полагая $T_* \gg T_0$, для уравнения состояния совершенного газа получим $p_* \sim q^{2/3}$.

Сравнение формул (7), (8) с результатами расчетов задачи (1), (2). Ниже представлены результаты расчетов задачи (1), (2) для проверки точности формул (7), (8). Вопрос о степени соответствия математических моделей реальным физическим процессам здесь не рассматривается. Везде, где не оговорено особо, числовой множитель в (7) $\eta_0 = 1$.

Рассматривается нагрев алюминия, находящегося в жидком состоянии, с начальными данными $p_0 = 60$ ГПа, $\rho_0 = 3,5$ г/см³, $T_0 \approx 3600$ К. Поток тепла q меняется в интервале от 3 до 90 ГВт/см². (Выбор максимального значения q связан с ограниченностью имевшихся в распоряжении авторов таблиц уравнений состояния алюминия.) При $T \leq 10^5$ К для теплопроводности алюминия используется модель [5] для электропроводности, основанная на некоторых экспериментальных данных, и закон Видемана — Франца (см. [6]). При $T > 10^5$ К коэффициент теплопроводности вычисляется по формуле $\kappa(\rho, T) = \kappa(\rho, T_c)(T/T_c)^{5/2}$, где $T_c = 10^5$ К.

На рис. 1 приведены распределения параметров p , u , ρ и T вдоль оси x для $q = 3$ ГВт/см² при $t = 6$ нс. Координата $x_s \approx 0,06$ мм соответствует фронту ударной волны, на котором происходит основное изменение давления. Тепловая волна, на фронте которой происходит основное изменение температуры и плотности, прошла значительно меньшее расстояние ($x_h \approx 0,002$ мм). Давление в области тепловой волны почти постоянно, а между тепловой и ударной волнами плавно увеличивается.

На рис. 2 для тех же условий представлены зависимости от времени давления на границе $p_b(t) = p(0, t)$ и давления за фронтом ударной волны $p_s(t)$. Вначале оба давления возрастают до примерно одинакового значения, а затем медленно уменьшаются. Функция $p_s(t)$ убывает значительно медленнее, чем $p_b(t)$. Здесь же показано давление p_* , полученное по формулам (7), (8). Видно, что p_* является хорошим приближением для $p_s(t)$ и средним значением для $p_b(t)$.

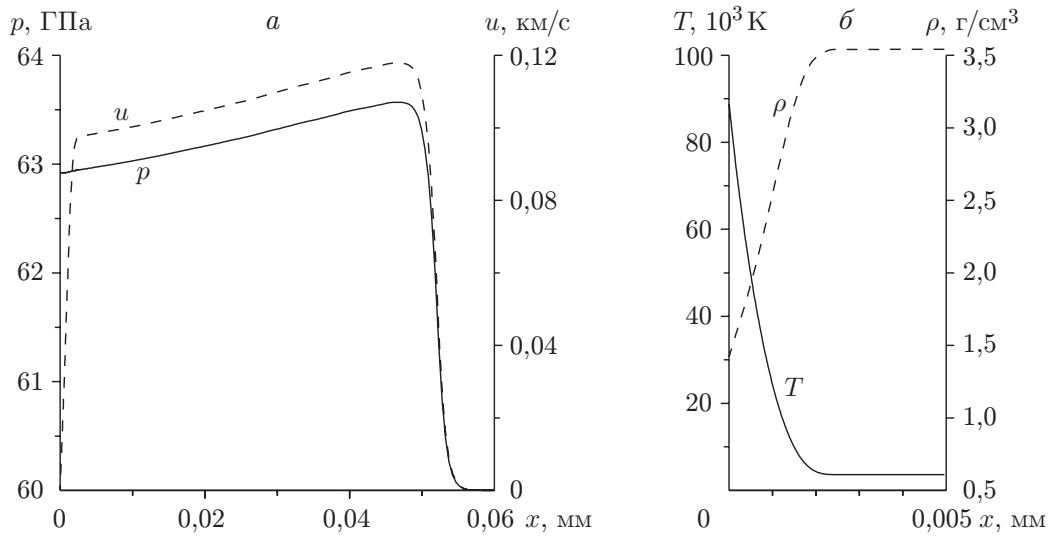


Рис. 1. Распределение параметров p , u (а) и T , ρ (б) в момент времени $t = 6$ нс для алюминия ($q = 3$ ГВт/см²)

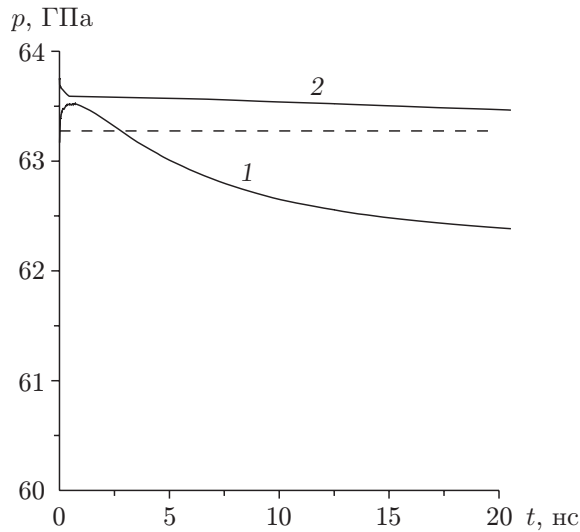


Рис. 2. Зависимости давления на границе и за фронтом ударной волны от времени:

1 — p_b ; 2 — p_s ; штриховая линия — значение p_* , полученное по формулам (7), (8)

В табл. 1 представлены результаты расчетов задачи (1), (2) в сравнении с p_* и температурой испарения T_{v*} , вычисленной как точка пересечения изобары $p = p_*$ с кривой испарения, которая определялась с точностью до шага таблиц уравнений состояния. Эта же приближенная кривая испарения использовалась для определения температуры начала испарения T_v в решении задачи (1), (2).

Для количественного сравнения p_* с функциями $p_b(t)$ и $p_s(t)$ последние осреднялись по формуле

$$\bar{p} = \frac{1}{t_{\max} - t_0} \int_{t_0}^{t_{\max}} p(t) dt,$$

где t_{\max} — максимальное время, до которого проводился расчет; t_0 — момент времени, при котором зависимость $p(t)$ достигает максимума. Полученные величины обозначены через \bar{p}_b и \bar{p}_s (см. табл. 1). Через \bar{p}_{b10} и \bar{p}_{s10} обозначены соответствующие средние значения для задачи (1), (2) с коэффициентом теплопроводности α , увеличенным в 10 раз. Почти для

Таблица 1

q , ГВт/см ²	p_* , ГПа	\bar{p}_b , ГПа	\bar{p}_{b10} , ГПа	\bar{p}_s , ГПа	\bar{p}_{s10} , ГПа	T_v , 10 ³ К	T_{v*} , 10 ³ К	$M(p_*)$
3	63,2	62,8	63,5	63,5	63,6	141	141	1,01
30	82,3	81,9	81,9	88,1	88,2	159	161	1,07
90	115	111	112	125	126	184	189	1,20

всех вариантов расчет проводился до начала испарения. Исключением является вариант с $q = 3$ ГВт/см² и увеличенным в 10 раз значением \varkappa , расчет которого до момента начала испарения требует большого числа шагов по времени. В этом варианте значение t_{\max} было примерно тем же, что и в варианте без увеличения \varkappa .

Прежде всего следует отметить, что давление, полученное из решения задачи (1), (2), почти не зависит от теплопроводности, как это и предсказывается формулами (7), (8). В то же время другие функции существенно зависят от \varkappa . Например, для момента времени $t = 6$ нс (см. рис. 1) температура на границе $T(0, t) \approx 9 \cdot 10^4$ К. При увеличении \varkappa в 10 раз $T(0, t) \approx 3 \cdot 10^4$ К.

Результаты расчетов по формулам (7), (8) удовлетворительно согласуются с результатами численных расчетов. При изменении q в 30 раз, а p_* примерно в 2 раза отклонение средних значений давления от p_* не превышает 10 %, а температуры испарения — 3 %.

Согласно последней графе табл. 1 представленные выше варианты задачи (1), (2) относятся к случаю слабых ударных волн. В случае сильных ударных волн точность формул (7), (8) исследовалась на задаче (1), (2) с уравнением состояния совершенного газа $\varepsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$, $p = R\rho T$, где постоянные γ и R для определенности соответствуют неионизированному воздуху. Теплопроводность полагалась равной постоянному значению $\varkappa = \varkappa_0 = 4,2 \cdot 10^{-4}$ Вт/(см · К) или $\varkappa = 10\varkappa_0$, где \varkappa_0 примерно соответствует холодному воздуху. Начальные данные: $p_0 = 1$ атм, $\rho_0 = 1,205 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

На рис. 3 показаны зависимости $p_b(t)$ и $p_s(t)$ для варианта с $q = 30$ МВт/см². В отличие от случая нагрева алюминия обе функции монотонно возрастают и близки друг к другу. Последнее означает, что давление всюду за фронтом ударной волны почти не зависит от x . Видно, что при $t \rightarrow \infty$ обе функции стремятся к некоторому значению p_∞ . Увеличение \varkappa в 10 раз изменяет зависимость давления от времени, однако p_∞ не меняется, так же как в случае нагрева алюминия и как предсказывается формулами (7), (8).

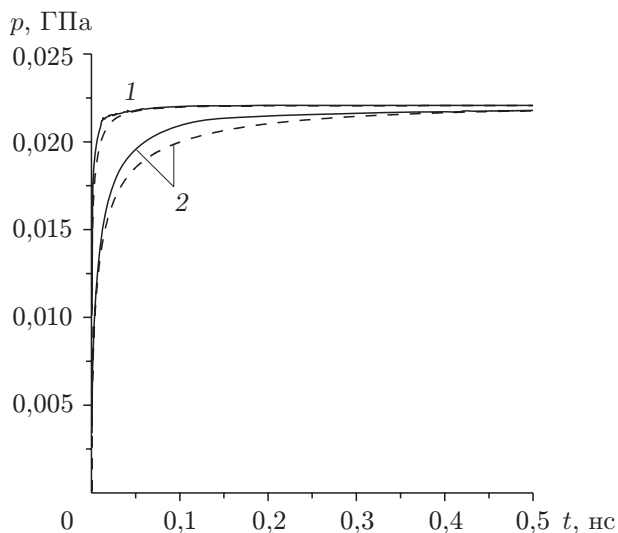


Рис. 3. Зависимости давления на границе и за фронтом ударной волны от времени для воздуха ($q = 30$ МВт/см²): сплошные кривые — p_b ; штриховые — p_s ; 1 — $\varkappa = \varkappa_0$; 2 — $\varkappa = 10\varkappa_0$

Таблица 2

Вариант	q , МВт/см ²	p_* , МПа	p_∞ , МПа	$M(p_*)$
1	30	26,5	22,06	15,0
2	300	122,6	102,1	32,4

В табл. 2 приведены значения p_∞ и p_* для двух значений q , различающихся в 10 раз. Различие между p_∞ и p_* не превышает 20 %. Такая точность формул (7), (8) представляется удовлетворительной, так как при различных q значения давления в табл. 2 различаются примерно в 4,5 раза. Заметим, что формулы (7), (8) определены с точностью до числового множителя η_0 . Приведенные в табл. 2 значения p_* получены при $\eta_0 = 1$. Подходящий выбор η_0 позволяет существенно увеличить точность формул (7), (8), что подтверждает следующий пример. Если для варианта 1 ($q_1 = 30$ МВт/см²) подобрать η_0 так, чтобы p_* совпало с p_∞ с точностью до трех десятичных знаков, то для варианта 2 ($q_2 = 300$ МВт/см²) p_* также совпадет с p_∞ с точностью до трех десятичных знаков. Это означает, что погрешность формул (7), (8) оказывается менее 1 %. С погрешностью не более 1 % выполняется и соотношение $p_* \sim q^{2/3}$ для сильных ударных волн, полученное выше из анализа формул (7), (8). Для значений из табл. 2 имеем

$$(q_2/q_1)^{2/3} \approx 4,64; \quad p_{*2}/p_{*1} \approx p_{\infty 2}/p_{\infty 1} \approx 4,63$$

(индексы 1, 2 соответствуют номеру варианта в табл. 2).

Заключение. Во всех рассмотренных вариантах задачи (1), (2) имеется хорошее соответствие между давлениями, полученными из решения задачи и по формулам (7), (8). Давление почти не зависит от теплопроводности. Исключением является начальный интервал времени, когда давление растет. С увеличением потока тепла давление увеличивается. В случае нагрева алюминия погрешность в определении давления составляла менее 10 %, а температуры начала испарения — менее 3 %. В случае нагрева совершенного газа выбор числового коэффициента η_0 позволяет уменьшить погрешность формул (7), (8) до значения менее 1 %.

Помимо задачи с постоянным потоком тепла рассматривалась задача нагрева алюминиевого расплава потоком тепла, пропорциональным давлению на границе:

$$q = q_0 p_b(t)/p_0, \quad q_0 = \text{const}.$$

Как показали расчеты, давление в такой задаче ведет себя так же, как и в задаче с $q = \text{const}$. Для определения характерного значения p_* можно использовать формулы (7), (8), в которые вместо q следует подставить зависимость $\bar{q}(p_*)$, определяющую подходящее среднее значение q в интервале $p_0 \leq p_b \leq p_*$. Выбор зависимости $\bar{q} = q_0(0,25 + 0,75p_*/p_0)$ обеспечил погрешность определения температуры начала испарения T_v по формулам (7), (8) менее 1 К для значений $q_0 = 30, 90$ ГВт/см². Заметим, что высокая точность определения температуры T_v не является следствием близости p_* и p_0 , так как $p_* \approx 90$ ГПа для первого значения q_0 и $p_* \approx 160$ ГПа для второго значения q_0 , что превышает значение p_0 примерно в 1,5 и 2,5 раза соответственно.

В заключение следует предостеречь от формального использования приемов получения формул (7), (8) для задач с граничным условием, отличным от (2). В качестве примера рассмотрим задачу с граничным условием

$$T(0, t) = T_0 + \beta t, \quad \beta = \text{const}. \quad (9)$$

Решение соответствующей тепловой задачи с постоянными коэффициентами зависит от той же автомодельной переменной, что и решение (4). Поэтому формулы (5), (6) не меняются. Подставляя t_* из (6) в (9), получаем T_* , а для p_* по-прежнему используем формулу (8).

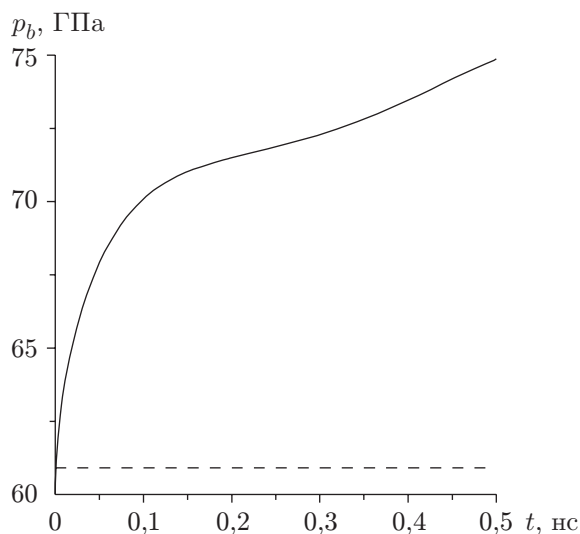


Рис. 4. Зависимость давления на границе от времени (сплошная кривая) и значение p_* (штриховая линия) для задачи с граничным условием (9)

На рис. 4 приведены полученное таким образом значение p_* и давление на границе $p_b(t)$ для $\beta \approx 4,3 \cdot 10^{14}$ К/с. Видно, что в данном случае p_* не имеет отношения к функции $p_b(t)$.

Авторы выражают благодарность И. В. Ломоносову и К. В. Хищенко за предоставленные таблицы уравнений состояния алюминия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 1. С. 67–78.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
3. Чарахчян А. А. Ударное сжатие пластины на клине // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 17–24.
4. Бушман А. В., Канель Г. И., Ни А. Л., Фортов В. Е. Теплофизика и динамика интенсивных импульсных воздействий. Черноголовка: Ин-т хим. физики АН СССР, 1988.
5. Чарахчян А. А. Численное исследование спонтанного электромагнитного поля, генерируемого кольцевыми кумулятивными струями в конических мишенях // Физика плазмы. 1998. Т. 24, № 4. С. 349–355.
6. Ермаков В. В., Калиткин Н. Н. Электронный перенос в сверхплотной невырожденной плазме. М., 1977. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 26).

Поступила в редакцию 13/VI 2002 г.