

УДК 535.417

Ю. Ц. Батомункуев, Н. А. Мещеряков*(Новосибирск)***РАСЧЕТ СХЕМЫ ЗАПИСИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ
ВОЛНАМИ ОБЪЕМНОГО ВНЕОСЕВОГО
ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА**

Из условия минимизации характеристической функции внеосевого объемного голографического оптического элемента (ГОЭ) получены в первом приближении аналитические выражения для вычисления угловых и радиальных координат, а также допусков координат источников записывающих цилиндрических волн. С использованием полученных выражений рассчитаны координаты и допуски схемы записи объемного ГОЭ. Для голографической среды типа реоксан проведено численное сравнение схем записи объемного и тонкого ГОЭ, восстанавливаемых в одинаковых схемах. Показано, что учет объемности ГОЭ приводит к существенному различию радиальных и угловых координат источников схемы записи объемных отражающих ГОЭ по сравнению с тонкими.

Введение. Условия записи тонких фокусирующих голограмм детально исследовались во многих работах, начиная с [1, 2]. Малая дифракционная эффективность, наличие как недифрагировавшего света, так и многих порядков дифракции ограничивают область практического применения тонких голограмм. Объемные фазовые голограммы не имеют указанных недостатков [3]. Анализ условий записи таких голограмм посвящен ряд работ, например [4–8]. Появление новых объемных полимерных голографических материалов [9] открывает возможность создания широкого класса преобразователей волнового фронта, в том числе внеосевых объемных голографических оптических элементов (ГОЭ) с заданными параметрами.

Целью настоящей работы является расчет схемы записи цилиндрическими волнами внеосевых объемных отражающих и пропускающих ГОЭ на основе анализа характеристической функции, вычисление допусков на параметры схем записи, численное сравнение схем записи объемного и тонкого отражающих ГОЭ.

Система уравнений записи и восстановления ГОЭ. Для получения характеристической функции внеосевого объемного ГОЭ рассмотрим аналогично [4] ход лучей для изображений источников цилиндрических волн при записи и восстановлении пропускающих и отражающих объемных ГОЭ, представленных на рисунке, $a - d$. В дальнейшем будут рассматриваться только изображения источников без употребления слова изображение. Центр системы координат совместим с центром внеосевого ГОЭ, ось OZ направим перпендикулярно поверхности ГОЭ. Для источников, расположенных параллельно

льно оси OX , характеристическая функция $V(y, z)$ в плоскости YOZ записывается в виде

$$V(y, z) = n_c [l_c - d_c \pm (l_i - d_i) - M(y, z)\lambda_c],$$

где d_c, d_i, l_c, l_i – расстояния от источников восстанавливающей и восстановленной волн до центра и произвольной точки среды (y, z) вблизи центра ГОЭ; λ_c, n_c – длина волны при восстановлении и средний показатель преломления среды ГОЭ на этой длине волны.

Пространственное распределение «полос» $M(y, z)$ в записанном ГОЭ выражается через разность оптических путей лучей от источников при записи как

$$M(y, z) = n_0 [l_o - d_o \pm (l_r - d_r)] / \lambda_0,$$

где d_o, d_r, l_o, l_r – расстояния от излучателей когерентных цилиндрических волн до центра и произвольной точки (y, z) в окрестности центра ГОЭ; λ_0, n_0 – длина волны при записи и средний показатель преломления среды ГОЭ на этой длине волны. Расстояния l_c, l_i, l_o, l_r могут быть выражены через соответствующие расстояния d_c, d_i, d_o, d_r и углы в среде $\Theta_c, \Theta_i, \Theta_o, \Theta_r$, задаваемые относительно оси OZ с учетом коэффициентов усадки (набухания) m_y вдоль оси OY и m_z вдоль оси OZ [6] (см. рисунок).

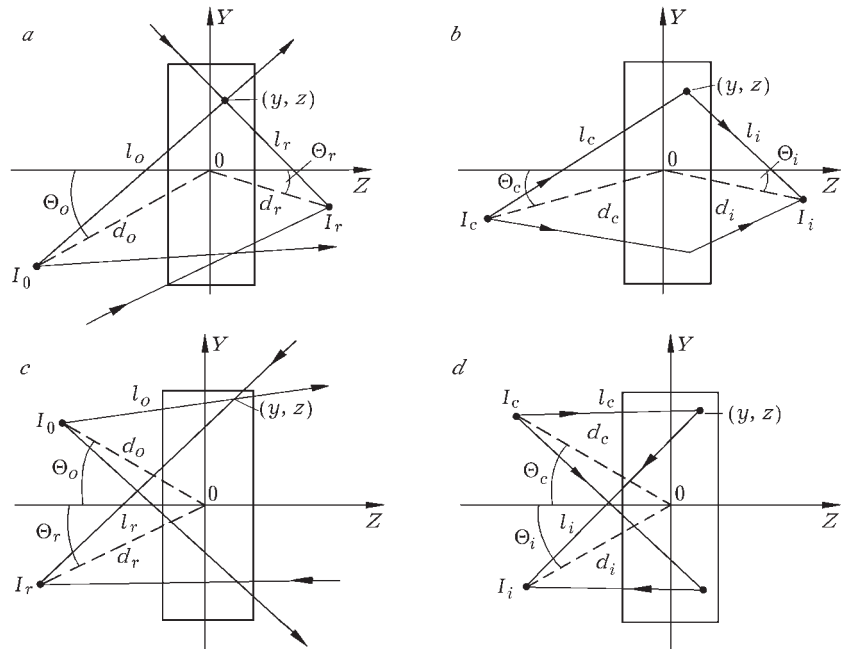


Схема записи и восстановления внеосевого пропускающего ГОЭ (a, b) и внеосевого отражающего ГОЭ (c, d): I_0, I_r – источники цилиндрических волн при записи; I_c – источник восстанавливаемой цилиндрической волны; I_i – восстановленная цилиндрическая волна

В этих и последующих выражениях верхние знаки соответствуют отражающим ГОЭ, а нижние – пропускающим. Подставляя $M(y, z)$ в первое выражение, разлагая характеристическую функцию $V(y, z)$ по параметрам малости $y/d_j, z/d_j$ ($j = o, r, c, i$) и приравнявая к нулю коэффициенты первых членов разложения, получим выражения, связывающие параметры схем записи и восстановления:

$$\begin{aligned}\sin \Theta_o \pm \sin \Theta_r &= m_y (\sin \Theta_c \pm \sin \Theta_i) / \mu, \\ \cos \Theta_o \pm \cos \Theta_r &= m_z (\cos \Theta_c \pm \cos \Theta_i) / \mu, \\ \cos^2 \Theta_o / d_o \pm \cos^2 \Theta_r / d_r &= m_y^2 (\cos^2 \Theta_c / d_c \pm \cos^2 \Theta_i / d_i) / \mu, \\ \sin^2 \Theta_o / d_o \pm \sin^2 \Theta_r / d_r &= m_z^2 (\sin^2 \Theta_c / d_c \pm \sin^2 \Theta_i / d_i) / \mu, \\ \sin 2\Theta_r / d_r \pm \sin 2\Theta_o / d_o &= m_y m_z (\sin 2\Theta_c / d_c \pm \sin 2\Theta_i / d_i) / \mu,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\mu = n_o \lambda_c / n_c \lambda_o. \quad (1a)$$

Первая пара уравнений полученной системы позволяет однозначно определить угловые координаты цилиндрических источников во время записи по известным углам при восстановлении и эквивалентна условиям дифракции Брэгга [4]. Следующие три уравнения системы дают возможность определить расстояния до источников записывающих волн d_o, d_r по известным d_c и d_i . При этом следует учесть, что если углы в среде $\Theta_c, \Theta_i, \Theta_o, \Theta_r$ меньше по абсолютной величине $\pi/4$, то большее значение принимают коэффициенты в разложении характеристической функции, из которых получены третье и пятое уравнения системы (1), а в случае углов в среде, близких к $\pi/2$, – коэффициенты, из которых получены четвертое и пятое уравнения. Третье уравнение, представляющее условие фокусировки в плоскости $Y0Z$, совпадает при $n_o = n_c = 1$ с аналогичным уравнением для тонкой голограммы [6]. Четвертое и пятое уравнения отсутствуют для тонкого ГОЭ и получены при учете объемности среды.

Таким образом, в отличие от других работ в данной работе при расчете схемы записи учитывается влияние объемности среды ГОЭ на радиальные координаты источников цилиндрических волн.

Определение координат цилиндрических волн при записи. Далее рассмотрим случай углов в среде меньше $\pi/4$ как более интересный с практической точки зрения; случай углов больше $\pi/4$, требующий дополнительных способов введения излучения в среду, будет специально оговариваться. Преобразуя первые два уравнения системы при записи отражающего ГОЭ в случае изотропной усадки среды $m_y = m_z = m$ (голографическая среда типа реоксан), получаем

$$\begin{aligned}\Theta_o / 2 + \Theta_r / 2 &= \Theta_c / 2 + \Theta_i / 2, \\ \mu \cos(\Theta_o / 2 - \Theta_r / 2) &= m \cos(\Theta_c / 2 - \Theta_i / 2).\end{aligned}\quad (2)$$

Указанные выражения отражают условия локального равенства угла наклона и периода интерференционной картины и «полос» регистрируемого ГОЭ.

Из системы (2) находится зависимость угловых координат источников записывающих волн от угловых координат источников восстанавливающей и восстановленной волн и представляется для отражающего ГОЭ в виде

$$\begin{aligned}\Theta_o &= \frac{\Theta_c + \Theta_i}{2} + \arccos\left(\mu m \cos\left(\frac{\Theta_c - \Theta_i}{2}\right)\right), \\ \Theta_r &= \frac{\Theta_o + \Theta_i}{2} - \arccos\left(\mu m \cos\left(\frac{\Theta_c - \Theta_i}{2}\right)\right),\end{aligned}\quad (3)$$

где μ дается выражением (1а).

Для пропускающих ГОЭ соответствующие выражения отличаются от (2), (3) тем, что арккосинусы заменены на арксинусы, косинусы – на синусы соответствующих полусуммы и полуразности углов.

Если углы Θ_c , Θ_i , Θ_o , Θ_r меньше по модулю $\pi/4$, то расстояния, на которых расположены источники d_o , d_r , определяются из третьего и пятого уравнений системы (1) (при углах больше $\pi/4$ – из четвертого и пятого уравнений). В случае изотропной усадки (набухания) получаем для расстояний:

$$\frac{1}{d_o} = \frac{m}{2 \cos \Theta_c} \left[(1+p) \frac{\cos \Theta_c}{d_c} + (1-p) \frac{\cos \Theta_i}{d_i} \right], \quad (4)$$

$$\frac{1}{d_r} = \frac{m}{2 \cos \Theta_i} \left[(1-p) \frac{\cos \Theta_c}{d_c} + (1+p) \frac{\cos \Theta_i}{d_i} \right],$$

где

$$p = \frac{m \cos\left(\frac{\Theta_i - \Theta_c}{2}\right)}{\mu \cos\left(\frac{\Theta_r - \Theta_o}{2}\right)} \quad \text{для пропускающих ГОЭ}, \quad (4a)$$

$$p = \frac{m \sin\left(\frac{\Theta_i - \Theta_c}{2}\right)}{\mu \sin\left(\frac{\Theta_r - \Theta_o}{2}\right)} \quad \text{для отражающих ГОЭ}. \quad (4b)$$

Для случая углов больше по модулю $\pi/4$ выражения, аналогичные (4), отличаются заменой косинусов на синусы соответствующих углов.

Таким образом, выражения (3), (4) позволяют определить в указанных приближениях угловые и радиальные координаты источни-

ков цилиндрических волн при записи по известным координатам источников восстанавливающей и восстановленной волн.

Определение допустимой погрешности координат волн при записи. Для определения погрешности установки угловых $\Delta\Theta_o$, $\Delta\Theta_r$ и радиальных Δd_o , Δd_r координат источников волн при записи ГОЭ найдем дифференциал от правой и левой частей выражений (3), (4) и, произведя преобразования, получим:

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_o &= (1+p)\frac{\Delta\Theta_c}{2} + (1-p)\frac{\Delta\Theta_i}{2}, \\ \Delta\Theta_r &= (1-p)\frac{\Delta\Theta_c}{2} + (1+p)\frac{\Delta\Theta_i}{2}, \\ \Delta d_o &= \frac{md_o^2}{2\cos\Theta_o} \left[(1+p)\frac{\cos\Theta_c}{d_c^2} \Delta d_c + (1-p)\frac{\cos\Theta_i}{d_i^2} \Delta d_i \right], \\ \Delta d_r &= \frac{md_r^2}{2\cos\Theta_r} \left[(1-p)\frac{\cos\Theta_c}{d_c^2} \Delta d_c + (1+p)\frac{\cos\Theta_i}{d_i^2} \Delta d_i \right],\end{aligned}\tag{5}$$

где p дается для пропускающих ГОЭ выражением (4а), а для отражающих – выражением (4б). Система (5) получена в предположении малых значений углов (меньше $\pi/4$), в случае углов больше $\pi/4$ соответствующие выражения получают заменой косинусов углов на синусы.

Полученные выражения позволяют определить допустимые погрешности установки, погрешности юстировки угловых и радиальных координат цилиндрических источников при записи объемных ГОЭ по известным допустимым отклонениям угловых и радиальных координат источников восстанавливаемой и восстановленной волн.

Расчет схемы записи внеосевого отражающего ГОЭ. Рассчитаем условия записи внеосевого отражающего ГОЭ при заданных величинах: расстояние от центра ГОЭ до цилиндрического излучателя $d_c = 100 \pm 2$ мм, расстояние $d_i = \infty$, угловые координаты $\Theta_c = 10 \pm 0,5^\circ$, $\Theta_i = 0 \pm 0,3^\circ$, длина волны восстановления $\lambda_c = 655$ нм, длина волны записи $\lambda_0 = 632,8$ нм.

Для объемных полимерных сред (например, типа реоксан [10]) относительное изменение среднего показателя преломления и толщины среды меньше относительных погрешностей координат источников записи. Поэтому, пренебрегая усадкой ($m = 1$) и изменением среднего показателя преломления ($n_o = n_r$), из систем (3), (4) получаем значения угловых и радиальных координат источников записывающих волн, равные: $\Theta_o = 22,5^\circ$, $\Theta_r = -12,3^\circ$, $d_o = 148$ мм, $d_r = 277$ мм.

Допуски на рассчитанные углы и расстояния определяются из системы (5) и равны: $\Delta\Theta_o = \pm 0,4^\circ$, $\Delta\Theta_r = \pm 0,4^\circ$, $\Delta d_o = \pm 3$ мм, $\Delta d_r = \pm 5$ мм.

Расчетные значения допусков близки к допускам на пространственные координаты волн при восстановлении, что свидетельствует

| φ_o , град | d_o , мм | φ_r , град | d_r , мм |
|-------------------------|------------|--------------------|------------|
| Объемный отражающий ГОЭ | | | |
| 34,5 | 99 | -18,7 | 184 |
| Тонкий отражающий ГОЭ | | | |
| 34,5 | 99 | 18,7 | 146 |
| -0,4 | 109 | -18,7 | 184 |

о достаточной устойчивости к отклонениям полученных значений координат записывающих волн. Величины углов в воздухе, соответствующие рассчитанным углам в среде, получаются из закона преломления, расстояния в воздухе – делением рассчитанных расстояний в среде на n_0 . Результаты для голографической среды типа реоксан с $n_0 = 1,5$ представлены в таблице.

Для сравнения в таблице также приведены расчеты схемы записи внеосевого тонкого отражающего ГОЭ [6, 10], который восстанавливается в первом порядке в той же схеме, что и внеосевой объемный отражающий ГОЭ, причем пространственное расположение одного из источников при записи остается неизменным.

Заключение. Таким образом, из условия минимизации характеристической функции внеосевого объемного ГОЭ получены в первом приближении аналитические выражения для вычисления угловых и радиальных координат, а также допусков координат источников записывающих цилиндрических волн. С использованием полученных выражений рассчитаны координаты и допуски схемы записи объемного ГОЭ. Для голографической среды типа реоксан проведено численное сравнение схем записи объемного и тонкого ГОЭ, восстанавливаемых в одинаковой схеме. Показано, что учет объемности ГОЭ (при отсутствии усадки и изменения среднего показателя преломления) приводит к существенному различию радиальных и угловых координат источников схемы записи объемных отражающих ГОЭ по сравнению с тонкими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Moran T. M.** Compensation of aberration due to a wave length shift in holography // Appl. Opt. 1971. **10**, N 8. P. 1909.
2. **Pat. 3586412 USA.** Holographic lens with aberration correction /E. N. Leith. Publ. 06.12.71.
3. **Денисюк Ю. Н.** Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения // Оптика и спектроскопия. 1963. **15**, № 4. С. 522.
4. **Forshow M. R. B.** The imaging properties and aberrations of thick transmission holograms // Opt. Acta. 1973. **20**, N 9. P. 669.
5. **Winick K.** Designing efficient aberration – free holographic lenses in the presence of a construction–reconstruction wavelength shift // JOSA. 1982. **72**, N 1. P. 143.
6. **Ган М. А.** Теория и методы расчета голограммных и киноформных оптических элементов. Л.: ГОИ, 1984.

7. **Батомункуев Ю. Ц., Сандер Е. А., Шойдин С. А.** Аберрации объемных пропускающих голограмм // Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: ГОИ, 1989. С. 101.
8. **Шойдин С. А., Батомункуев Ю. Ц.** Расчет аберраций фокусирующего элемента на основе глубокой трехмерной голограммы // Оптическая голография с записью в трехмерных средах. Л.: Наука, 1989. С. 49.
9. **Суханов В. И.** Трехмерные глубокие голограммы и материалы для их записи // Опт. журн. 1994. № 1. С. 61.
10. **Пейсахсон И. В.** Оптика спектральных приборов. Л.: Машиностроение, 1975.

Поступила в редакцию 29 июня 1998 г.
