

УДК 622.241.54:539.3

О ВЛИЯНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ОБЖАТОЙ ПРУЖИНЫ НА ЗОНУ НАРУШЕНИЯ СПЛОШНОСТИ ВОКРУГ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

С. В. Черданцев, Н. В. Черданцев

Кузбасский государственный технический университет, 650026 Кемерово
E-mail: cherdan@bk.ru

Обсуждается использование цилиндрической пружины с целью повышения устойчивости выработки круглого поперечного сечения.

Ключевые слова: напряженное состояние, зоны нарушения сплошности, устойчивость горной выработки, крепь, цилиндрическая пружина.

При проектировании и строительстве горных выработок важнейшей является проблема их устойчивости. Выработка считается устойчивой, если за ее контуром не образуются зоны нарушения сплошности (ЗНС) окружающего массива (или эти зоны небольшие). Если выработка сооружается на небольшой глубине и в достаточно прочных породах, то за ее контуром, как правило, ЗНС не возникают. Если же породы слабые, то размеры ЗНС могут быть достаточно большими и выработка может потерять устойчивость, вследствие чего происходит обрушение пород в выработку. Устойчивость выработок зависит от напряженного состояния массива горных пород в окрестности выработки и от прочностных свойств горных пород.

Задача о напряженном состоянии вокруг выработки формулируется следующим образом [1]: вдоль оси x_3 на бесконечный упругий массив действуют напряжения $\sigma_{33}^\infty = \gamma H$, в горизонтальном направлении вдоль осей x_1, x_2 — напряжения $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = \Lambda \gamma H$, где Λ — коэффициент бокового давления; γ — объемный вес пород массива; H — глубина заложения выработки. Внутри массива имеется полость, моделирующая заданную выработку, на всей поверхности которой (или какой-то ее части) изнутри приложены усилия F , создаваемые реакцией крепи. Для решения поставленной задачи авторы использовали метод граничных интегральных уравнений, сущность которого заключается в следующем [2]. К поверхности полости прикладывается компенсирующая нагрузка интенсивности a . Суммарные напряжения от действия внешней и компенсирующей нагрузок в каждой точке полости должны удовлетворять условиям на поверхности. Напряжения от компенсирующей нагрузки определяются путем интегрирования решения Кельвина по поверхности полости. В результате условия на поверхности приводятся к интегральному уравнению [2]

$$\frac{1}{2} a_q(Q_0) - \iint_O \Phi_{qm}(Q_0, M_0) a_m(M_0) dO_{M_0} = n_q(Q_0) \sigma_{qq}^\infty - F_q(Q_0), \quad (1)$$

где $\Phi_{qm}(Q_0, M_0)$ — тензор Грина; $F_q(Q_0)$ — реактивный отпор крепи, отнесенный к γH ; σ_{qq}^∞ — тензор напряжений на бесконечности; O — площадь поверхности полости; n_q, n_m — единичные векторы внешних к поверхности полости нормалей в точках Q_0, M_0 .

Уравнение (1) решалось численно при условии, что выработка имеет круглую форму в поперечном сечении и в ней отсутствует крепь ($F_q(Q_0) = 0$). ЗНС вокруг выработки

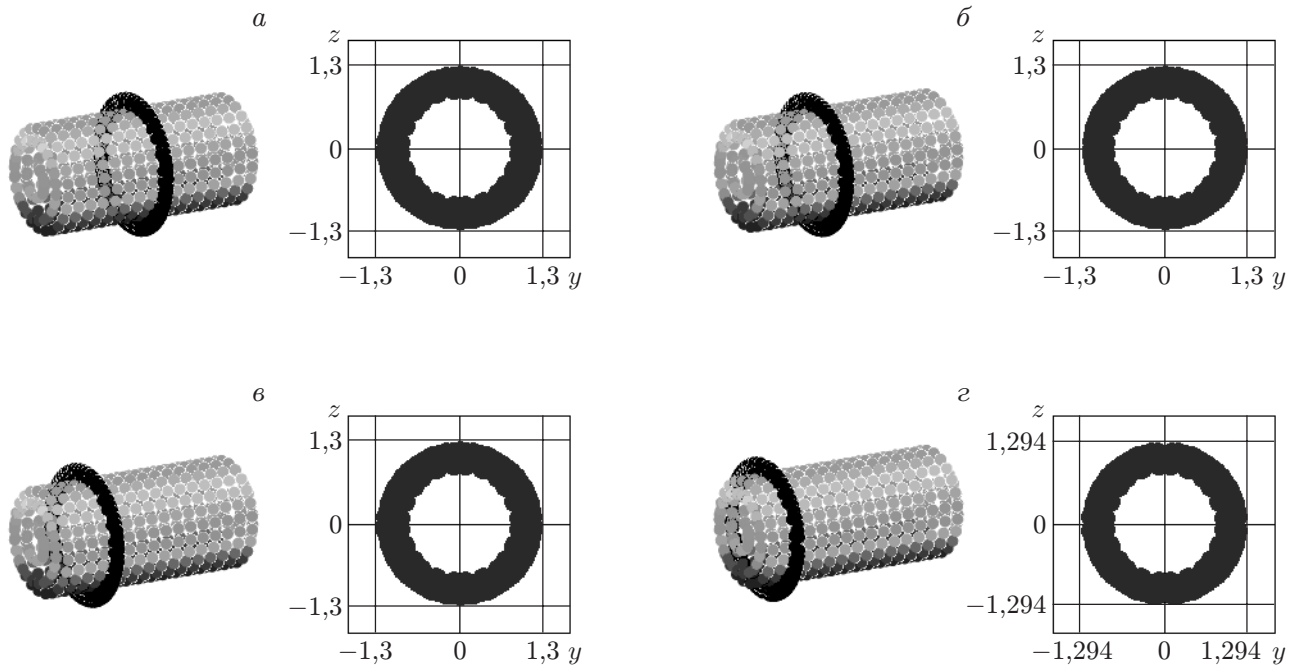


Рис. 1. Зона нарушения сплошности вокруг незакрепленной выработки

определяется как совокупность точек, в которых произошло разрушение пород согласно критерию прочности Мора:

$$\bar{\tau}_\nu = \bar{\sigma}_\nu \operatorname{tg} \varphi + \bar{K},$$

где $\bar{\tau}_\nu$, $\bar{\sigma}_\nu$ — безразмерные касательные и нормальные напряжения, отнесенные к γH , действующие на площадках с нормалью ν , где происходит разрушение пород; \bar{K} — коэффициент сцепления горных пород, также отнесенный к γH ; φ — угол внутреннего трения пород. В дальнейшем массив принят изотропным, породы которого имеют $\bar{K} = 0,25$, $\varphi = 20^\circ$ и находятся в гидростатическом поле напряжений ($\Lambda = 1$).

На рис. 1, а–г показаны (в аксонометрии) круглая выработка длины L и ЗНС (в виде затемненных областей) в сечениях, расположенных соответственно на расстояниях $0,5L$, $0,375L$, $0,25L$, $0,125L$ от забоя выработки. Видно, что ЗНС вокруг незакрепленной выработки в данном случае представляет собой область, ограниченную внешним круговым контуром и контуром выработки.

Для повышения устойчивости выработок используются различные типы крепей. Как правило, крепи являются ограждающими или несущими конструкциями. На процесс формирования ЗНС они не влияют, поскольку не создают реакции отпора ($F_q(Q_0) = 0$). В этом смысле такие крепи являются “пассивными” конструкциями. Крепь анкерного типа, за счет увеличения натяжения анкера, может влиять на размеры ЗНС и поэтому является “активной”. В данной работе обсуждается возможность повышения устойчивости выработок круглой формы в поперечном сечении с помощью предварительно обжатой цилиндрической пружины.

Напряженно-деформированное состояние цилиндрической пружины (см. рис. 2), изготовленной из стержня круглого поперечного сечения длиной l , материал которого следует закону Гука, описывается системой дифференциальных уравнений, в связанной системе осей имеющей вид [3]:

$$\frac{dQ_1}{ds} - \alpha_{30}Q_2 - \frac{1}{A_{33}}M_3Q_2 + \frac{1}{A_{22}}M_2Q_3 + q_1 = 0; \quad (2a)$$

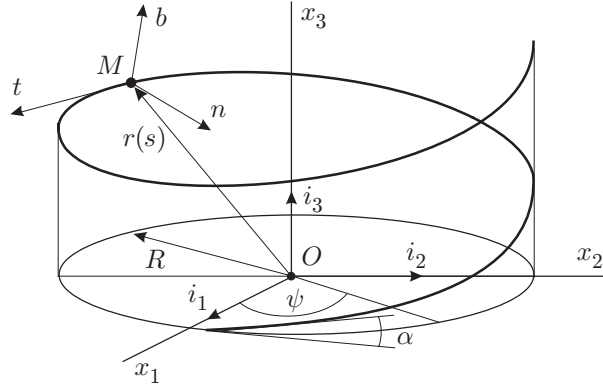


Рис. 2. Геометрические параметры цилиндрической пружины

$$\frac{dQ_2}{ds} + \varkappa_{30}Q_1 - \varkappa_{10}Q_3 + \frac{1}{A_{33}}M_3Q_1 - \frac{1}{A_{11}}M_1Q_3 + q_2 = 0; \quad (2б)$$

$$\frac{dQ_3}{ds} + \varkappa_{10}Q_2 - \frac{1}{A_{22}}M_2Q_1 + \frac{1}{A_{11}}M_1Q_2 + q_3 = 0; \quad (2в)$$

$$\frac{dM_1}{ds} - \varkappa_{30}M_2 = 0; \quad (2г)$$

$$\frac{dM_2}{ds} + \varkappa_{30}M_1 - \varkappa_{10}M_3 + \frac{1}{A_{33}}M_3M_1 - \frac{1}{A_{11}}M_1M_3 - Q_3 = 0; \quad (2д)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + \varkappa_{10}M_2 - \frac{1}{A_{22}}M_2M_1 + \frac{1}{A_{11}}M_1M_2 + Q_2 = 0; \quad (2е)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{ds} + \left(1 - \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3}\right) \varkappa_{10} + \left(\sin \theta_1 \operatorname{tg} \theta_3 - \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_3}\right) \varkappa_{30} - \\ - \frac{1}{A_{11}}M_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3} - \frac{1}{A_{33}}M_3 \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_3} = 0; \end{aligned} \quad (2ж)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_2}{ds} - \varkappa_{10} \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3 + \left(\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_3} - \sin \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3\right) \varkappa_{30} - \\ - \frac{1}{A_{11}}M_1 \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3 - \frac{1}{A_{22}}M_2 - \frac{1}{A_{33}}M_3 \sin \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3 = 0; \end{aligned} \quad (2з)$$

$$\frac{d\theta_3}{ds} + \varkappa_{10} \sin \theta_2 + (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \varkappa_{30} + \frac{1}{A_{11}}M_1 \sin \theta_2 - \frac{1}{A_{33}}M_3 \cos \theta_2 = 0; \quad (2и)$$

$$\frac{du_1}{ds} - \varkappa_{30}u_2 - \frac{1}{A_{33}}M_3u_2 + \frac{1}{A_{22}}M_2u_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3 - 1 = 0; \quad (2к)$$

$$\frac{du_2}{ds} + \varkappa_{30}u_1 - \varkappa_{10}u_3 + \frac{1}{A_{33}}M_3u_1 - \frac{1}{A_{11}}M_1u_3 - \sin \theta_3 = 0; \quad (2л)$$

$$\frac{du_3}{ds} + \varkappa_{10}u_2 - \frac{1}{A_{22}}M_2u_1 + \frac{1}{A_{11}}M_1u_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_3 = 0. \quad (2м)$$

Здесь Q_1, Q_2, Q_3 — соответственно продольная и перерезывающие силы в поперечном сечении стержня, из которого изготовлена пружина; M_1, M_2, M_3 — крутящий и изгибающие моменты в этом же сечении стержня; A_{11}, A_{22}, A_{33} — крутильная и изгибные

жесткости поперечного сечения стержня; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — углы поворота осевой линии стержня соответственно относительно оси стержня, ее главной нормали и бинормали; u_1, u_2, u_3 — перемещения соответственно вдоль оси стержня, главной нормали и бинормали; q_1, q_2, q_3 — компоненты внешней распределенной по длине стержня нагрузки. Кручение \varkappa_{10} и кривизны $\varkappa_{20}, \varkappa_{30}$ осевой линии стержня в естественном состоянии, определяются как [4]

$$\varkappa_{10} = \sin \alpha \cos \alpha / R, \quad \varkappa_{30} = \cos^2 \alpha / R, \quad \varkappa_{20} = 0, \quad (3)$$

где R — радиус недеформированной пружины; α — угол подъема ее витков. Поскольку материал пружины работает в упругой стадии, справедливы следующие формулы:

$$M_1 = A_{11}(\varkappa_1 - \varkappa_{10}), \quad M_2 = A_{22}(\varkappa_2 - \varkappa_{20}), \quad M_3 = A_{33}(\varkappa_3 - \varkappa_{30}), \quad (4)$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ — компоненты кручения и кривизны осевой линии деформированного стержня.

Пусть цилиндрическая оболочка круглого поперечного сечения радиуса R подкреплена цилиндрической пружиной такого же радиуса и равномерно обжимается на величину Δ . При этом величина перемещения u_2 в стержне будет постоянной и равна величине обжатия оболочки Δ . Пусть концы пружины не закреплены, тогда их перемещения, очевидно, симметричны относительно точки, находящейся посередине стержня, а сама срединная точка не перемещается. Следовательно, если начало координат совместить с этой точкой, то перемещения u_1, u_3 и угол поворота θ_1 в начале координат будут равны нулю:

$$u_1(0) = 0, \quad u_3(0) = 0, \quad \theta_1(0) = 0. \quad (5)$$

Поскольку оболочка в результате равномерного обжатия остается круговым цилиндром, и пружина, находящаяся внутри оболочки, после деформации также сохранит цилиндрическую форму. Поэтому угол поворота $\theta_3 = 0$ и уравнения (2ж)–(2м) преобразуются к виду

$$\frac{d\theta_1}{ds} + (1 - \cos \theta_2)\varkappa_{10} - \varkappa_{30} \sin \theta_2 - \frac{1}{A_{11}} M_1 \cos \theta_2 - \frac{1}{A_{33}} M_3 \sin \theta_2 = 0; \quad (6a)$$

$$\frac{d\theta_2}{ds} + \varkappa_{30} \sin \theta_1 - \frac{1}{A_{22}} M_2 = 0; \quad (6б)$$

$$\varkappa_{10} \sin \theta_2 + (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)\varkappa_{30} + \frac{1}{A_{11}} M_1 \sin \theta_2 - \frac{1}{A_{33}} M_3 \cos \theta_2 = 0; \quad (6в)$$

$$\frac{du_1}{ds} - \varkappa_{30}u_2 - \frac{1}{A_{33}} M_3u_2 + \frac{1}{A_{22}} M_2u_3 + \cos \theta_2 - 1 = 0; \quad (6г)$$

$$\varkappa_{30}u_1 - \varkappa_{10}u_3 + \frac{1}{A_{33}} M_3u_1 - \frac{1}{A_{11}} M_1u_3 = 0; \quad (6д)$$

$$\frac{du_3}{ds} + \varkappa_{10}u_2 - \frac{1}{A_{22}} M_2u_1 + \frac{1}{A_{11}} M_1u_2 + \sin \theta_2 = 0. \quad (6е)$$

Из уравнения (6а) в силу формул (4) следует уравнение

$$\frac{d\theta_1}{ds} + \varkappa_{10} - \varkappa_1 \cos \theta_2 - \varkappa_3 \sin \theta_2 = 0, \quad (7)$$

в котором кручение \varkappa_1 и кривизна \varkappa_3 цилиндрической пружины после ее обжатия могут быть определены по формулам (3):

$$\varkappa_1 = \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 / R_1, \quad \varkappa_3 = \cos^2 \alpha_1 / R_1, \quad (8)$$

где α_1 и $R_1 = R - u_2$ — соответственно угол подъема витков пружины и ее радиус после обжатия. С учетом формул (8) представим уравнение (7) следующим образом:

$$\frac{d\theta_1}{ds} + \varkappa_{10} - \frac{\cos \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \theta_2)}{R(1 - \bar{u}_2)} = 0, \quad (9)$$

где $\bar{u}_2 = u_2/R$ — безразмерная величина обжатия.

Рассмотрим далее уравнение (6в), которое с учетом формул (4) и (8) представим в виде

$$\varkappa_{30} \cos \theta_1 - \cos \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \theta_2)/(R(1 - \bar{u}_2)) = 0. \quad (10)$$

Решив совместно уравнения (9) и (10), получим

$$\frac{d\theta_1}{ds} + \varkappa_{10} - \varkappa_{30} \operatorname{tg}(\alpha_1 + \theta_2) \cos \theta_1 = 0. \quad (11)$$

Заметим, что угол подъема витка пружины α_1 после деформации представляет собой алгебраическую сумму угла подъема витков α недеформированной пружины и угла поворота θ_2 относительно главной нормали:

$$\alpha_1 = \alpha - \theta_2. \quad (12)$$

С учетом формулы (12) уравнение (11) приводится к виду

$$\frac{d\theta_1}{ds} - (\cos \theta_1 - 1)\varkappa_{10} = 0.$$

Его решение в силу третьего граничного условия (5) и теоремы о единственности решения является тривиальным:

$$\theta_1 = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (10) и формул (12), (13) вытекает уравнение

$$\bar{\varkappa}_{30}(1 - \bar{u}_2) - \cos(\alpha - \theta_2) \cos \alpha = 0 \quad (14)$$

($\bar{\varkappa}_{30} = \varkappa_{30}R$), из которого следует, что $\theta_2 = \operatorname{const}$.

Приведем уравнение (14) к виду

$$\operatorname{tg}^2 \theta_2 - a \operatorname{tg} \theta_2 + b = 0, \quad (15)$$

где

$$a = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{(1 - \bar{u}_2)^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad b = \frac{(1 - \bar{u}_2)^2 - 1}{(1 - \bar{u}_2)^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Уравнение (15) имеет два корня — $\theta_{2(1)}$ и $\theta_{2(2)}$. Один корень (отрицательный) соответствует правой навивке пружины ($\varkappa_{10} > 0$), другой (положительный) — левой навивке ($\varkappa_{10} < 0$). В дальнейшем рассматривается пружина с правой навивкой. Учитывая, что $\theta_1 = 0$, а $\theta_2 = \operatorname{const}$, из уравнений (6а)–(6в) получим выражения для моментов в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= M_1R/A_{11} = \bar{\varkappa}_{10} \cos \theta_2 - \bar{\varkappa}_{30} \sin \theta_2 - \bar{\varkappa}_{10}, & \bar{M}_2 &= 0, \\ \bar{M}_3 &= M_3R/A_{33} = \bar{\varkappa}_{10} \sin \theta_2 + \bar{\varkappa}_{30} \cos \theta_2 - \bar{\varkappa}_{30}, \end{aligned}$$

где $\bar{\varkappa}_{10} = \varkappa_{10}R$, $\bar{\varkappa}_{30} = \varkappa_{30}R$ — безразмерные кручение и кривизна осевой линии пружины.

С учетом того, что моменты M_1 и M_3 постоянны, а $M_2 = 0$ из уравнений (2д), (2е) определяем внутренние усилия Q_2 и Q_3 в обжатой пружине (в безразмерном виде):

$$Q_2 = 0, \quad \bar{Q}_3 = Q_3R^2/A_{11} = \bar{\varkappa}_{30} \bar{M}_1 - m \bar{\varkappa}_{10} \bar{M}_3 + \bar{M}_1 \bar{M}_3(1 - m),$$

где $m = A_{33}/A_{11}$.

Рассмотрим далее уравнения (2а)–(2в), приведя их к безразмерному виду, имеем

$$\frac{d\bar{Q}_1}{d\bar{s}} \bar{\lambda} + \bar{q}_1 = 0; \quad (16а)$$

$$(\bar{\alpha}_{30} + \bar{M}_3)\bar{Q}_1 - (\bar{\alpha}_{10} + \bar{M}_1)\bar{Q}_3 + \bar{q}_2 = 0; \quad (16б)$$

$$q_3 = 0, \quad (16в)$$

где $\bar{\lambda} = \cos \alpha$, $\bar{s} = s\bar{\lambda}/R$ — безразмерная координата, а безразмерные компоненты внешней распределенной нагрузки определяются как

$$\bar{q}_i = q_i R^3 / A_{11}. \quad (17)$$

Поскольку $q_3 = 0$, система (16) сводится к двум уравнениям, содержащим три неизвестные функции: \bar{Q}_1 , \bar{q}_1 , \bar{q}_2 , и, следовательно, является неопределенной. Чтобы исключить эту неопределенность, воспользуемся гипотезой Кулона

$$\bar{q}_1 = f\bar{q}_2, \quad (18)$$

в которой силой трения является компонента q_1 , а f — коэффициент трения стержня об оболочку (в дальнейшем $f = 0,55$). Поскольку направление силы трения q_1 противоположно перемещению u_1 , в уравнении (16а) ее величину следует принять отрицательной. В силу сказанного система (16) принимает вид

$$\frac{d\bar{Q}_1}{d\bar{s}} \bar{\lambda} - f\bar{q}_2 = 0; \quad (19а)$$

$$(\bar{\alpha}_{30} + \bar{M}_3)\bar{Q}_1 - (\bar{\alpha}_{10} + \bar{M}_1)\bar{Q}_3 + \bar{q}_2 = 0. \quad (19б)$$

Исключив из (19) \bar{q}_2 , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{Q}_1}{d\bar{s}} + k\bar{Q}_1 - \beta = 0, \quad (20)$$

где

$$k = f(\bar{\alpha}_{30} + \bar{M}_3)/\bar{\lambda}, \quad \beta = f(\bar{\alpha}_{10} + \bar{M}_1)\bar{Q}_3/\bar{\lambda}.$$

Поскольку концы пружины свободны, продольная сила в концевых сечениях

$$\bar{Q}_1(\bar{l}/2) = 0. \quad (21)$$

Выражение (21) является граничным условием для дифференциального уравнения (20), решение которого в этом случае имеет вид

$$\bar{Q}_1 = \beta(1 - e^{-k(\bar{s}-0,5\bar{l})})/k. \quad (22)$$

Далее из уравнения (16а) и формулы (18) определяем \bar{q}_1 :

$$\bar{q}_1 = \frac{d\bar{Q}_1}{d\bar{s}} \bar{\lambda} \implies \bar{q}_1 = \bar{\lambda}\beta e^{-k(\bar{s}-0,5\bar{l})}, \quad (23)$$

а из уравнения (19б) — распределенную нагрузку \bar{q}_2 :

$$\bar{q}_2 = (\bar{\alpha}_{10} + \bar{M}_1)\bar{Q}_3 - (\bar{\alpha}_{30} + \bar{M}_3)\bar{Q}_1. \quad (24)$$

Таким образом, для равномерного обжатия цилиндрической пружины необходимо приложить к ней неравномерную внешнюю нагрузку, компоненты которой определяются по формулам (23) и (24). Если же равномерно обжатую цилиндрическую пружину установить в выработку круглого поперечного сечения, то последняя будет создавать реактивный отпор, действующий на окружающий массив, определяемый как

$$F_q(Q_0) = q_2/(L\gamma H). \quad (25)$$

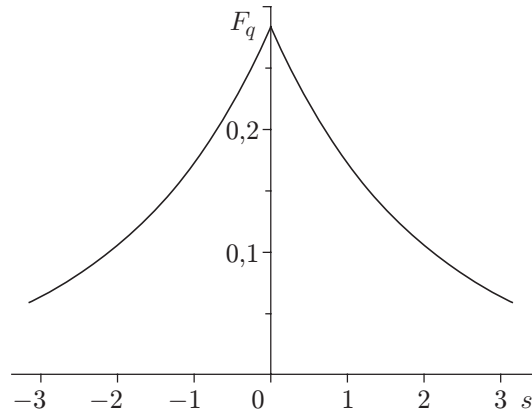


Рис. 3. Распределение отпора $F_q(Q_0)$ в витке пружины вдоль его оси

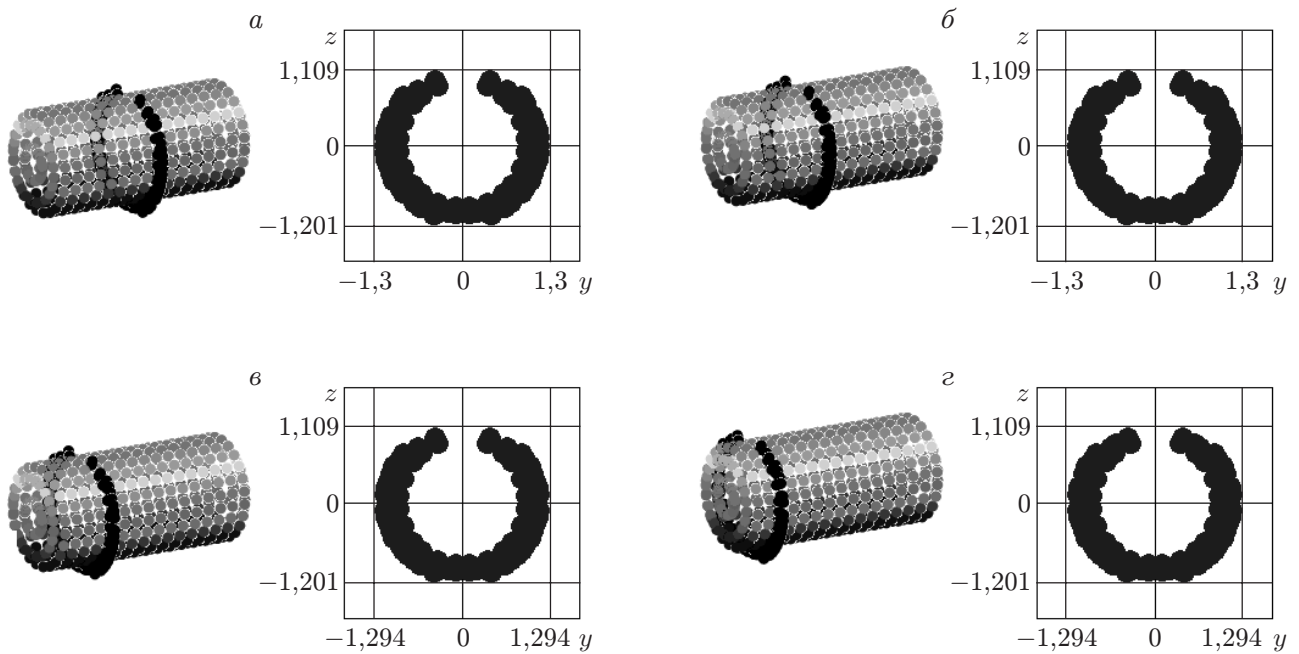


Рис. 4. Зона нарушения сплошности вокруг закрепленной выработки

Здесь $L = hn$ — длина пружины; $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$ — межвитковое расстояние; n — число витков.

На наш взгляд, целесообразно использовать не сплошную пружину, а состоящую из нескольких не связанных между собой витков. Дело в том, что в сплошной пружине максимальный отпор (большой, чем в витках составной пружины) будет возникать в ее середине. По мере удаления от середины отпор резко уменьшается. В составной же пружине каждый виток создает одинаковый отпор, значение которого максимально посередине витка и несколько уменьшается на его концах. Поэтому каждый виток составной пружины желательно устанавливать таким образом, чтобы его концы находились в почве выработки, а середина — в кровле.

В силу сказанного в формуле (25) следует принять $L = h$, положив $n = 1$. Далее с учетом (17) преобразуем (25) к виду

$$F_q(Q_0) = 0,1\bar{q}_2\bar{d}^4/(2\pi\gamma\bar{H}\operatorname{tg} \alpha),$$

где $\gamma\bar{H} = \gamma H/E$; E — модуль Юнга материала пружины; $\bar{d} = d/R$ — безразмерный диаметр стержня, из которого изготовлена пружина.

Пусть предварительно обжатая на $\bar{u}_2 = 0,1$ составная пружина, содержащая 8 витков, установлена в выработке, пройденной на глубине $H = 400$ м в массиве пород, имеющих $\gamma = 25$ кН/м³. Витки пружины изготовлены из стержня круглого поперечного сечения $\bar{d} = 0,1$ с углом подъема $\alpha = 5^\circ$. В этом случае каждый виток пружины создает отпор $F_q(Q_0)$, распределение которого вдоль оси витка приведено на рис. 3. Влияние отпора витков пружины на размер ЗНС показано на рис. 4, на котором ЗНС изображены в тех же сечениях выработки, в каких они ранее были определены вокруг незакрепленной выработки (см. рис. 1). Видно, что ЗНС имеет форму подковы, симметричной относительно вертикали, разомкнутые концы которой расположены в своде выработки, где и возникает наибольший отпор витков пружины. При этом уменьшение ЗНС на 14,7 % в кровле выработки и на 7,6 % в почве по сравнению с ЗНС вокруг незакрепленной выработки происходит равномерно вдоль ее оси. Представленные результаты получены при наличии только силы \bar{q}_2 , поскольку сила \bar{q}_1 практически не влияет на размер ЗНС, нарушая лишь ее симметричность.

Таким образом, предварительно обжатая цилиндрическая пружина, установленная в выработке, повышает ее устойчивость и поэтому может использоваться в качестве крепи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баклашов И. В., Картозия Б. А.** Механика подземных сооружений и конструкции крепей. М.: Недра, 1992.
2. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
3. **Черданцев С. В.** Нелинейные уравнения равновесия пространственного винтового стержня // Вестн. Кузбас. гос. техн. ун-та (Кемерово). 2000. № 1. С. 12–17.
4. **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

*Поступила в редакцию 19/XII 2003 г.,
в окончательном варианте — 22/IV 2004 г.*