

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

В. Н. Штерн

(Новосибирск)

Исследованию устойчивости плоского течения Куэтта посвящено более трех десятков работ. Первой среди них была статья Кельвина [1], и задача привлекает внимание исследователей до сих пор [2]. Как справедливо отмечено в [3], хотя исследователи убеждены в устойчивости течения Куэтта к малым возмущениям, области численных и асимптотических расчетов не перекрывались, и поэтому утверждения об устойчивости носили частный характер.

Численный анализ на ЭВМ проведен для выборочных значений волнового числа α и числа Рейнольдса R , причем в области $\alpha R \lesssim 10^4$ [4-6].

Целью данной работы является: 1) расширить область численных расчетов до $\alpha R \sim 10^7$; 2) исследовать зависимость собственного значения от α во всем диапазоне $0 \leq \alpha < \infty$; 3) на основе численного анализа предсказать поведение собственных значений при произвольных α и R ; 4) сомкнуть область численных расчетов с областью применимости асимптотических методов.

Задача сводится [3] к отысканию собственных значений уравнения

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R (y - C) (\varphi'' - \alpha^2\varphi) \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \quad (2)$$

Здесь $C = X + iY$ — искомое собственное значение, случай $Y < 0$ соответствует затухающим возмущениям.

Все параметры в уравнении (1) безразмерны и построены по полуширине канала, скорости стенок и молекулярной вязкости.

Собственные значения находились методом пошагового интегрирования [7], модифицированным для случая несимметричных профилей.

Для наглядной иллюстрации асимптотических закономерностей на фигурах используется логарифмический масштаб, при этом принято $L = \lg(1 - |X|)$.

На фиг. 1 представлены зависимости первых шести собственных значений от R при $\alpha = 1$. Эти расчеты в основном проводились для контроля и сравнения с результатами других авторов. При малых R собственные значения чисто мнимы в соответствии с общими закономерностями, отмеченными в [8]. С ростом R собственные значения попарно сливаются и, пройдя точку кратности, образуют пары $C = \pm X + iY$. Первые две пары собственных значений совпадают с точностью графического изображения с результатами [4,5] во всей области, исследованной этими авторами ($R \lesssim 10^3$). Для третьей пары собственных значений при $R > 100$ результаты автора отличаются от результатов Р. В. Бириха даже с учетом поправок [5].

Это, видимо, объясняется тем, что погрешности вариационного метода существенно увеличиваются с ростом номера собственного значения и с ростом R , в то время как данные расчеты проводились с фиксированной точностью, не зависящей от указанных факторов. Отметим также, что результаты, полученные численным анализом, значительно расходятся с расчетами [9], в которых использовался асимптотический метод.

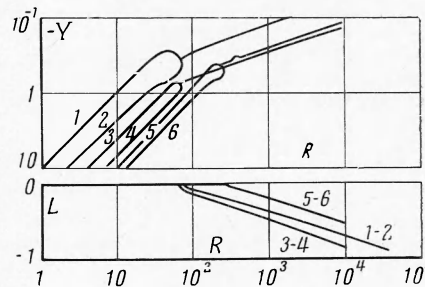
Детальный асимптотический анализ, проведенный В. Вазовым [10], показал, что при больших αR для C справедлива оценка

$$C = \pm 1 + (\alpha R)^{-1/3}\eta + 0 [(\alpha R)^{-2/3}] \quad (3)$$

На фиг. 1 отчетливо видно, что при $R > 10^3$ собственные значения выходят на асимптотические зависимости, причем в полном соответствии с (3). Например, первая пара собственных значений с хорошей точностью описывается соотношением

$$C = \pm 1 + (\alpha R)^{-1/3} (\pm 4.1 - i1.1) \quad (4)$$

Численные расчеты были проведены до $R = 34000$ и прекращены вследствие очевидности асимптотического поведения C . Известно [3], что область неустойчивости может охватить сравнительно узкий диапазон изменения α , и поэтому для полного анали-



Фиг. 1

за устойчивости необходимо исследовать весь диапазон изменения волнового числа $0 \leq \alpha < \infty$.

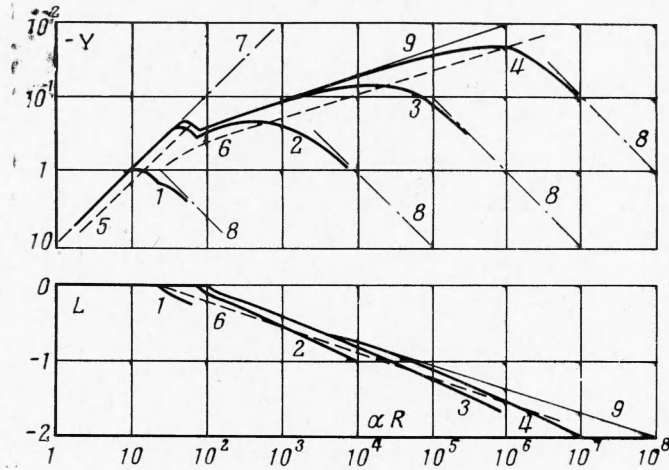
На фиг. 2 сплошными линиями представлены результаты численных расчетов зависимости $Y(\alpha)$ при $R = 5, 10^2, 10^3, 10^4$ для первого собственного значения (соответственно кривые 1, 2, 3, 4). Для малых α , как и при малых R , справедливо [8]

$$Y = -\pi^2 / \alpha R \quad (5)$$

при этом $X = 0$. Нетрудно убедиться, что при достаточно больших α имеет место зависимость

$$Y = -\alpha / R \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) представлены на фиг. 2 соответственно прямыми 7 и 8.



Фиг. 2

Зависимость $Y(\alpha)$ имеет в общем случае два локальных максимума. Первый достигается в зоне монотонных возмущений ($X = 0$). Положение этого максимума в зависимости от R было рассчитано в диапазоне $0 \leq R \leq 10^3$ (зависимости $X(R)$ и $Y(R)$ вдоль локальных максимумов нанесены на фиг. 2 пунктирными линиями 5 и 6 в области больших и малых α соответственно). Во всем рассмотренном диапазоне R выполняется соотношение

$$\Pi(R) \equiv \max_{\alpha} Y \approx 4\pi / \alpha_{\max} R \quad (7)$$

причем α_{\max} изменяется от 2.81 для неподвижной жидкости до нуля при $R \rightarrow \infty$, а величина αR с возрастанием R стремится к предельному значению $\alpha R = 55.2$. Таким образом, в области монотонных возмущений $Y < -0.226$ и это находится в соответствии со строгим доказательством устойчивости, полученным Л. А. Диким [11].

Точка излома зависимости $Y(\alpha)$ соответствует слиянию первых двух собственных значений и рождению комплексно сопряженной пары декрементов. Второе собственное значение на фиг. 2 не приведено, поскольку оно не влияет на анализ устойчивости.

Второй локальный максимум возникает в точке излома при $R = 8$ и с ростом R смещается в сторону больших α . Зависимость $\Pi(R)$ рассчитана до $\alpha R = 3 \cdot 10^7$, причем практически с $\alpha R > 100$ справедливо соотношение

$$C = \pm 1 + (\alpha R)^{-1/3} (\pm 3 - i\pi^{1/2} / 3) \quad (8)$$

После достижения второго локального максимума (или после прохождения точки излома при $R < 8$) зависимость $Y(\alpha)$ быстро выходит на асимптоту (6), при этом разность между фазовой скоростью возмущения X и скоростью связи стремится к нулю по закону

$$1 - |X| = \{8/3\} 2^{-1/3} \alpha^{-2/3} \quad (9)$$

Из фиг. 2 видно, что для $R \geq 10^3$ собственное значение при $\alpha < 1$ зависит только от комплекса αR . Опираясь на полученные численные результаты, можно предсказать зависимость $C(\alpha)$ для любого большого числа R . При $\alpha R < 10^4$ эта зависимость совпадает с зависимостью для $R = 10^4$, далее вплоть до $\alpha \sim 1$ имеет вид (на фиг. 2 этой зависимости соответствует прямая 9)

$$C = \pm 1 + (\alpha R)^{-1/3} (\pm 4.1 - i1.1) \quad (10)$$

при $\alpha = 0.632 \sqrt{R} Y(\alpha)$ достигает максимума, а значение $C(\alpha)$ рассчитывается по (8), затем Y выходит на асимптоту $Y = -\alpha / R$, а X подчиняется зависимости (9).

Для анализа устойчивости достаточно убедиться в том, что $\Pi(R) < 0$ при любом R . Что касается максимума, расположенного в области монотонности возмущений, то с ростом R $\Pi(R)$ стремится к предельному значению $\Pi = -0.225$, как это видно из фиг. 3 (кривая 1). Для максимума в области колебательных возмущений (на фиг. 3 кривая 2) зависимость (8) предсказывает отрицательность при всех R . Отметим, что Вазов [10] доказал устойчивость при больших R в случае зависимости (3). Численные расчеты проведены до значений αR , при которых в (3) можно пренебречь последним членом, т. е. области асимптотического и численного анализа перекрываются. Таким образом, хотя строгое доказательство по-прежнему отсутствует, устойчивость течения Куэтта к малым возмущениям показана практически исчерпывающе во всем диапазоне изменения α и R .

В заключение хотелось бы обсудить экспериментальные результаты по турбулизации течения Куэтта. Экспериментальных работ по исследованию устойчивости плоского течения Куэтта немного. Это объясняется тем, что организовать чистый эксперимент здесь значительно сложнее, чем, например, для течения между соосными вращающимися цилиндрами.

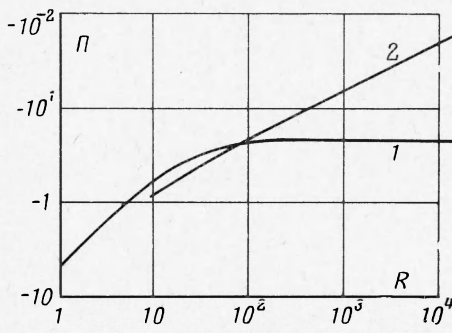
Рейхардт [12] указывает на диапазон чисел $600 < R < 1450$, в котором наблюдался переход от ламинарного режима к турбулентному. Кольман [13] приводит более широкий диапазон $10^3 < R < 10^4$. По-видимому, более тонкие опыты позволили бы затянуть ламинарный режим до более высоких чисел Рейнольдса, как это наблюдается для случая круглой трубы. На это указывают асимптотические и численные результаты, свидетельствующие об устойчивости течения Куэтта при произвольном числе Рейнольдса к достаточно малым возмущениям.

Автор выражает признательность В. А. Сапожникову за сотрудничество в детализации метода расчета. Автор благодарит М. А. Гольдштика и С. С. Кутателадзе за постоянное внимание к работе.

Поступила 31 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelvin Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes. Philos Mag., 1887, vol. 24, pp. 188—196, pp. 272—278.
2. Пономаренко Ю. Б. Об устойчивости плоского течения Куэтта. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
4. Gallagher A. P., Mercer A. McD. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, pt. 1, 1964, vol. 18, pt. 3.
5. Бирх Р. В. О спектре малых возмущений плоско-параллельного течения Куэтта. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4. (См. также «Замечание» к работам Р. В. Вириха, ПММ, 1966, т. 30, вып. 6).
6. Hains F. G. Stability of plane Couette — Poiseuille flow. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9.
7. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
8. Бирх Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоско-параллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
9. Grohne D. Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. Z. angew. Math. und Mech., 1953, Bd. 34, H. 8/9, S. 344.
10. Wasow W. On small disturbances of plane Couette flow. J. Res. Nat. Bureau Standards, 1953, vol. 51, No. 4.
11. Дикий Л. А. Об устойчивости плоско-параллельного течения Куэтта. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
12. Reichardt H. Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen Turbulenten Couetteströmung. Z. angew. Math. und Mech., 1956, Bd 36, Sonderheft.
13. Kohnan D. L. Experiments on cylinder drag, sphere drag and stability in rectilinear Couette flow. MIT Fluid Dynam. Res. Lab. Rept. 1, 1963.



Фиг. 3