

12. Бенилов М.С., Косов В.Ф., Рогов Б.В., Синельщиков В.А. Токи насыщения на электрические зонды в потоках химически реагирующей плазмы с различными сортами ионов // ТВТ. — 1987. — Т. 25, № 3.
13. Егорова З.М., Кашеваров А.В., Цхай Н.С. Об ионном токе насыщения на электрические зонды в плазме пламени со щелочной присадкой // ТВТ. — 1992. — Т. 30, № 3.

г. Жуковский

Поступила 8/IX 1993 г.

УДК 532.51+536.533

Т.А. Боднарь

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ ВОСХОДЯЩЕГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

Теория теплового взрыва [1, 2] по своей сути сводится к установлению условий, при которых рассматриваемая среда с распределенными источниками тепла теряет тепловую устойчивость. Ниже эта традиция не нарушена, но вместе с тем имеется в виду, что тепловой взрыв является следствием и происходит через определенный промежуток времени после потери системой тепловой устойчивости. Промежуток времени, разделяющий поток жидкости от момента потери устойчивости до теплового взрыва, понимаемого в физическом смысле (самовоспламенение, детонация), может оказаться достаточно большим (например, больше времени прохождения определенного технологического цикла). Поэтому обращено внимание не только на потерю устойчивости, но и на скорость возрастания температуры.

1. Постановка задачи. В потоке несжимаемой жидкости, движущейся в осевом направлении между двумя цилиндрами с фиксированными радиусами $r = r_i$, $r = r_e$, выделяется тепло за счет экзотермических реакций и вязкой диссипации. Вертикальность потока подчеркивает одномерность течения. Ставится задача определения условий, при которых повышение температуры жидкости за счет экзотермических реакций и вязкой диссипации приводит к потере устойчивости теплового состояния и тепловому взрыву.

Математическое описание теплового состояния движущегося с постоянной скоростью потока имеет вид [1—3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] - v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\nu}{c} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \varphi(T);$$

$$(1.2) \quad \nu \rho \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\Delta p}{L} = 0,$$

где x , r — цилиндрические координаты; t — время; T — температура; κ — температуропроводность; v — скорость потока; ν — кинематическая вязкость; c — теплоемкость; ρ — плотность; Δp — перепад давления с учетом сил гравитации; L — длина канала; $\varphi(T)$ — функция источника.

Принимается, что начальная температура жидкости $T(x, r, t = 0) = T_0$, а тепловыделение от экзотермических реакций подчиняется закону Аррениуса

$$\varphi(T) = \frac{Qz}{\rho c} \exp \left(-\frac{E}{RT} \right).$$

Здесь E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; Q — тепловой эффект реакции; z — кинетическая постоянная.

Решения системы (1.1), (1.2) изучаются для потоков, удовлетворяющих дополнительным условиям: а) течение ламинарное, кондуктивный перенос тепла в осевом направлении пренебрежимо мал по сравнению с конвективным; б) течение поршневое. Устойчивость тепловых состояний ламинарного и поршневого потоков рассматривается отдельно.

Переход к безразмерным параметрам

$$\begin{aligned}\theta &= E(T - T_0)R^{-1}T_0^{-2}, \quad \tau = t t_a^{-1}, \quad x_1 = x x_a^{-1}, \quad r_1 = r x_a^{-1}, \\ \beta &= RT_0 E^{-1}, \quad R_1 = r_i x_a^{-1}, \quad R_2 = r_e x_a^{-1}, \quad L_1 = L x_a^{-1}, \\ v_1 &= v t_a x_a^{-1}, \quad v_1 = v E (cRT_0^2 t_a)^{-1}, \quad \Delta p_1 = \Delta p E (cRT_0^2 \rho)^{-1}\end{aligned}$$

($t_a = c\rho RT_0^2 (EQz)^{-1} \exp(E/RT_0)$), $x_a = (\kappa t_a)^{0.5}$ — масштабы времени и расстояния [4]) и разложение функции в ряд по степеням θ позволяют записать систему (1.1), (1.2) в виде

$$(1.3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \theta}{\partial r_1} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} - v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n + \Delta (a_0 + v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial r_1} \right)^2) \equiv F(\theta, \mu, \Delta);$$

$$(1.4) \quad v_1 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial v_1}{\partial r_1} \right) + \frac{\Delta p_1}{L_1} = 0,$$

где μ — параметр из интервала, содержащего нуль; Δ — параметр, принимающий значения 0, 1;

$$a_n = \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \exp(\theta(1 + \beta\theta)^{-1}) \Big|_{\theta=0}.$$

Теория устойчивости систем с распределенными параметрами [5—7] утверждает, что потеря устойчивости решений бесконечномерной задачи (1.3), (1.4) происходит в пространстве конечной размерности.

Редукция размерности рассматриваемой задачи возможна путем построения одного из ее центральных многообразий [5] или методом проекций [6, 7]. В рамках последнего притягивание решений системы (1.3), (1.4) к пространству конечной размерности достигается при помощи проекций на подходящее пространство собственных функций. Рассматривая (1.3), (1.4) как некоторую эволюционную задачу в построенном пространстве функций, сначала изучаем устойчивость бифуркационного решения ($\Delta = 0$), затем изолированных решений, обусловленных дефектом $\Delta = 1$.

2. Ламинарный поток. В силу допущения а) слагаемым $\partial^2 \theta / \partial x_1^2$ в правой части уравнения (1.3) пренебрегается, в результате чего оно приобретает вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \theta}{\partial r_1} \right) - v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \Delta (a_0 + v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial r_1} \right)^2) \equiv F(\theta, \mu, \Delta).$$

В качестве граничных и начальных условий системы (1.4), (2.1) можно использовать соотношения

$$(2.2) \quad \frac{\partial \theta(x_1, R_i, \tau)}{\partial r_1} + \alpha_i \theta(x_1, R_i, \tau) = 0, \quad i = 1, 2;$$

$$(2.3) \quad v_1(R_i) = 0, \quad i = 1, 2;$$

$$(2.4) \quad \theta(0, r_1, \tau) = 0;$$

$$(2.5) \quad \theta(x_1, r_1, 0) = 0.$$

В результате интегрирования уравнения (1.4) с граничными условиями (2.3) получается распределение скоростей [3]

$$v_1 = \frac{\Delta p_1 R_2^2}{4\nu_1 L_1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{R_2} \right)^2 + \frac{1 - \omega^2}{\ln(\omega^{-1})} \ln \left(\frac{r_1}{R_2} \right) \right]$$

($\omega = R_1/R_2, 0 < \omega \leq 1$).

Теперь для построения пространства собственных функций вводится производящий оператор

$$(2.6) \quad L_\mu \theta = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \theta}{\partial r_1} \right) - v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + (a_1 - \mu) \theta \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial F(0, 0, 0)}{\partial \theta} \theta + \mu \frac{\partial^2 F(0, 0, 0)}{\partial \theta \partial \mu} \theta = 0,$$

определенный в прямоугольнике $(0, L_1) \times (R_1, R_2)$.

Метод разделения переменных дает возможность разыскивать решение (2.6) в виде произведения

$$(2.7) \quad \theta = \exp(\lambda x_1) \psi(r_1),$$

где λ — константа разделения.

Подстановка (2.7) в (2.6) приводит к уравнению относительно функции $\psi(r_1)$:

$$(2.8) \quad \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right) + (a_1 - \mu) \psi - \lambda v_1 \psi = 0.$$

Решение (2.7) уравнения (2.1) с условиями (2.2), (2.4), (2.5) в классе экспоненциальных функций не позволяет получить зависимости границ тепловой устойчивости от длины канала L_1 . Для нахождения такой связи вводится дополнительное ограничение на параметры потока:

$$(2.9) \quad G = \int_0^{L_1} \left(R_2 \frac{\partial \theta(x_1, R_2)}{\partial r_1} - R_1 \frac{\partial \theta(x_1, R_1)}{\partial r_1} \right) dx_1 +$$

$$+ \int_0^{L_1} \int_{R_1}^{R_2} a_1 \theta(x_1, r_1) r_1 dr_1 dx_1 - \int_{R_1}^{R_2} v_1 \theta(L_1, r_1) r_1 dr_1 = 0.$$

Выражение (2.9) представляет собой линеаризованное уравнение теплового баланса, устанавливающее, что в стационарном случае количество тепла, поступающее в кольцевой канал через сечение $x_1 = 0$ и выделяющееся в результате происходящих в потоке реакций, равно количеству тепла, уносимому через поверхности $r_1 = R_1, r_1 = R_2$ и через сечение $x_1 = L_1$. При этом подразумевается, что повышение среднеобъемной температуры, обусловленное экзотермическими реакциями при $\theta = 0$ и вязкой диссипацией, незначительно, и им можно пренебрегать. Подобная трактовка теплового баланса основана на том, что из-за неравномерности распределения температуры в потоке потеря тепловой устойчивости имеет локальный характер и происходит еще при $G = 0$, или, иными словами, до начала повышения среднеобъемной температуры жидкости. Действительно, в силу экспоненциальности закона тепловыделения ускорение экзотермических реакций происходит в узком диапазоне температур и потеря тепловой устойчивости должна иметь место в той точке пространства, в которой температура жидкости максимальна.

Использование (2.9) при решении уравнения (2.1) приводит к тому, что распределение температуры на входе в канал $\theta(0, r_1, \tau)$ будет определяться

из решения (2.7) и, следовательно, зависеть от длины L_1 , что, разумеется, противоречит условию (2.4) и не соответствует физическому процессу.

В.В. Пухначев обратил внимание, что если L_1/R_1 является большим параметром, то противоречие между условиями (2.4) и (2.9) устраняется и (2.9) может быть рассмотрено как следствие стационарности уравнения (2.1) с условиями (2.2), (2.4), (2.5), причем функция G может быть определена с точностью до аддитивной функции от температуры $f(\theta)$, равной нулю при $\theta(x_1, r_1, \tau) = 0$. Действительно, подставив (2.7) в уравнение (2.9) и интегрируя последнее по x_1 , получаем выражение, из которого вытекает, что при больших значениях L_1/R_1 система (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), (2.9) разрешима. Из этого же выражения следует, что если вместо $G = 0$ использовать $G = f(\theta)$, то произойдет лишь смещение границ разрешимости системы (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), (2.9) по параметру L_1/R_1 . Данное обстоятельство указывает на возможность проведения последующих приближений расчетов с использованием уравнения теплового баланса, учитывающего поступление в канал энергии через сечение $x_1 = 0$, если только $\theta(0, r_1, \tau) \neq 0$ при $G = 0$.

Уравнение (2.8) с граничными условиями (2.2) представляет собой задачу о собственных значениях. Среди множества приближенных способов определения собственных значений и собственных функций подобных задач [8] наиболее формализованным представляется способ решения в терминах вариационного исчисления [8, 9]. Утверждается, что функция $\psi(r_1)$ является решением (2.8) при условиях (2.2), если интеграл

$$(2.10) \quad I = \int_{R_1}^{R_2} \left[r_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right)^2 + r_1 (\mu - a_1) \psi^2 \right] dr_1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i R_i \psi^2(R_i)$$

достигает минимального значения при ограничении

$$(2.11) \quad \int_{R_1}^{R_2} v_1 r_1 \psi^2 dr_1 = 1.$$

Применение к системе (2.10), (2.11) расширения метода Ритца дает возможность записать приближенное решение в виде ряда

$$(2.12) \quad \psi(r_1) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(r_1).$$

Здесь c_i — коэффициенты, зависящие от μ ; $\varphi_i(r_1)$ — любые функции, удовлетворяющие граничным условиям (2.2). Если в качестве базового взять уравнение (2.8) при $v_1 = 1$, то естественно положить

$$(2.13) \quad \varphi_i(r_1) = I_0(\delta_i R_2^{-1} r_1) + \epsilon_i N_0(\delta_i R_2^{-1} r_1),$$

где $I_n(\delta_i R_2^{-1} r_1)$, $N_n(\delta_i R_2^{-1} r_1)$ — функции Бесселя и Неймана первого рода n -го порядка; δ_i — положительные корни уравнения

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_1 I_0(\delta \omega) - \delta R_2^{-1} I_1(\delta \omega) & \alpha_1 N_0(\delta \omega) - \delta R_2^{-1} N_1(\delta \omega) \\ \alpha_2 I_0(\delta) - \delta R_2^{-1} I_1(\delta) & \alpha_2 N_0(\delta) - \delta R_2^{-1} N_1(\delta) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\epsilon_i = \frac{\delta_i R_2^{-1} I_1(\delta_i \omega) - \alpha_1 I_0(\delta_i \omega)}{\alpha_1 N_0(\delta_i \omega) - \delta_i R_2^{-1} N_1(\delta_i \omega)}.$$

Подстановка ряда (2.12) с учетом (2.13) в интегралы (2.10), (2.11) с последующим применением метода Лагранжа позволяет получить систему уравнений относительно коэффициентов c_i ($i = 1, 2, \dots, N$), минимизирующих интеграл I :

$$(2.14) \quad \sum_{k=1}^N (\alpha_{ik} + \lambda \beta_{ik}) c_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$\alpha_{ik} = \int_{R_1}^{R_2} \left[r_1 \frac{\partial \varphi_i(r_1)}{\partial r_1} \frac{\partial \varphi_k(r_1)}{\partial r_1} + r_1 (\mu - a_1) \varphi_i(r_1) \varphi_k(r_1) \right] dr_1 + \\ + \sum_{n=1}^2 \alpha_n R_n \varphi_i(R_n) \varphi_k(R_n); \quad \beta_{ik} = \int_{R_1}^{R_2} r_1 v_1 \varphi_i(r_1) \varphi_k(r_1) dr_1.$$

Система (2.14) имеет нетривиальное решение, если

$$(2.15) \quad \det |\alpha_{ik} + \lambda \beta_{ik}| = 0.$$

Корни уравнения (2.15) λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) являются собственными значениями уравнения (2.8). Для каждого λ_i могут быть определены из совместного решения (2.11), (2.14) коэффициенты c_k ($k = 1, 2, \dots, N$), и тем самым найдена собственная функция $\psi_i(r_1)$. Здесь уместно обратить внимание, что собственные значения λ_i и соответствующие им коэффициенты $c_k^{(i)}$ являются функциями от параметра μ : $\lambda_i = \lambda_i(\mu)$, $c_k^{(i)} = c_k^{(i)}(\mu)$. Очевидно, что каждому λ_i будет отвечать определенное значение μ . С точки зрения анализа устойчивости представляет интерес максимальное значение. Можно показать, что оно соответствует минимальному положительному собственному значению λ_1 . Для этого необходимо подставить собственную функцию $\psi_n(r_1)$ в (2.8), затем полученное уравнение умножить на $\psi_n(r_1)$ и проинтегрировать. Результатом является зависимость

$$\mu = \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \psi_n}{\partial r_1} \right) \psi_n dr_1 + \int_{R_1}^{R_2} (a_1 - \lambda_n v_1) \psi_n^2 r_1 dr_1 \right] \times \left[\int_{R_1}^{R_2} r_1 \psi_n^2 dr_1 \right]^{-1}.$$

Поскольку

$$\int_{R_1}^{R_2} r_1 \psi_n^2 dr_1 > 0, \quad \int_{R_1}^{R_2} r_1 v_1 \psi_n^2 dr_1 > 0,$$

максимальное значение μ достигается при минимальном λ_1 .

Отдельно следует остановиться на вопросе о кратности собственных значений λ_i , вычисляемых приближенно, поскольку он имеет принципиальное значение при анализе устойчивости методом проекций. В этом смысле все решения (2.8) удовлетворяют интегральному уравнению Фредгольма с осцилляционным ядром, откуда вытекает, что все собственные значения простые (см. [7], приложение Г). Это же утверждение следует из осцилляционной теоремы Штурма [8] применительно к системе уравнений (1.4), (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3).

Каждая из функций $\theta_i = \exp(\lambda_i x_1) \psi_i(r_1)$ является решением уравнения (2.1), поэтому справедливы соотношения $\theta = \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i$, $G(\sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i) = 0$, причем в силу ортогональности функций $\psi_i(r_1)$ последнее соотношение в стационарном случае распадается на систему уравнений $G(\theta_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$). В нестационарном случае основной вклад в величину G вносит функция θ_1 , остальные решения экспоненциально убывают со временем.

Таким образом, подстановка выражения $\theta_i = \exp(\lambda_1 x_1) \psi_i(r_1)$ в уравнение (2.9) позволяет вычислить значение μ как функцию от параметров задачи $\beta, R_1, R_2, L_1, \alpha_1, \alpha_2, \nu_1$, которые могут быть рассмотрены как бифуркационные. Решение линеаризованной системы (1.4), (2.1) устойчиво, если $\mu < 0$.

Пространство ортогональных с весом $r_1 \nu_1$ собственных функций $\theta_i = \exp(\lambda_1 x_1) \psi_i(r_1)$ со скалярным произведением $\langle \theta_i, \theta_j^* \rangle$ на интервале (R_1, R_2) является полным, и, следовательно, любое решение нелинейной задачи (1.4), (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.2), (2.3), может быть представлено с любой степенью точности в виде разложения по функциям этого пространства. Появившаяся выше функция θ_j^* ($j = 1, 2, \dots$) принадлежит сопряженному с L_μ оператору L_μ^* и с точностью до постоянного множителя A_j равна $A_j r_1 \nu_1 \theta_j$.

Из определения области скалярного произведения собственных функций θ_i ($i = 1, 2, \dots$) вытекает тождество

$$(2.16) \quad \langle \theta_i^n, \theta_j^* \rangle \equiv \exp((n\lambda_i + \lambda_j)x_1) \langle \psi_i^n(r_1), \psi_j^*(r_1) \rangle, \\ n, i, j = 1, 2, \dots,$$

где $\psi_j^*(r_1) = \theta_j^* \exp(-\lambda_j x_1)$.

Теперь, определив амплитуду ϵ как проекцию $\theta_0 = \theta(\mu = 0)$ на собственное подпространство, ассоциированное с сопряженным вектором $\theta_{10}^* = \theta_1^*(\mu = 0)$: $\epsilon = \langle \theta_0, \theta_{10}^* \rangle$, будем искать бифуркационное решение ($\Delta = 0$) системы (1.4), (2.1) в окрестности точки $(\theta, \mu) = (0, 0)$ в виде рядов

$$(2.17) \quad \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} y^n, \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mu_n.$$

Здесь коэффициенты разложения y_n, μ_n ($n = 1, 2, \dots$) подлежат определению.

Параметр μ , найденный из уравнения $G = 0$, является функцией от длины канала $L_1, \mu = \mu(L_1)$. В силу этого и тождества (2.16) функции θ_i, θ_j^* , входящие в правые части уравнения (2.17), должны быть определены в точке $x_1 = L_1$ в виде $\bar{\theta}_i = \theta_i(L_1), \bar{\theta}_j^* = \theta_j^*(L_1)$.

Подстановка рядов (2.17) в (2.1) и приравнивание нулю совокупностей членов при одинаковых степенях амплитуды ϵ приводят к системе уравнений

$$(2.18) \quad L_0 y_1 = 0;$$

$$(2.19) \quad L_0 y_2 + 2\mu_1 \frac{\partial^2 F(0, 0, 0)}{\partial \theta \partial \mu} y_1 + \frac{\partial^2 F(0, 0, 0)}{\partial \theta^2} y_1^2 = 0$$

и уравнению при более высоких степенях ϵ .

Из уравнения (2.18) непосредственно следует $y_1 = \bar{\theta}_{10} = \bar{\theta}_1$ ($\mu = 0$). Условие разрешимости уравнения (2.19)

$$\langle L_0 y_2, \bar{\theta}_{10}^* \rangle = 0$$

для коэффициента разложения μ_1 дает

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F(0, 0, 0)}{\partial \theta^2} \bar{\theta}_{10}^2, \bar{\theta}_{10}^* \right) \left(\frac{\partial^2 F(0, 0, 0)}{\partial \theta \partial \mu} \bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{10}^* \right)^{-1}.$$

Таким образом, граница устойчивости решений системы (1.4), (2.1) будет определяться в плоскости (μ, ϵ) выражением $\mu = \mu_1 \epsilon$.

Условие нормировки $\langle \bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{10}^* \rangle = 1$ (или, что то же самое, $A_1 = \langle \bar{\theta}_{10}, r_1 v_1 \bar{\theta}_{10} \rangle^{-1}$, $\epsilon = 1$) позволяет записать выражение для границы устойчивости бифуркационного решения системы (1.4), (2.1) в виде

$$(2.20) \quad s = \mu - \mu_1 = 0.$$

Возвращаясь к системе (1.4), (2.1) с условиями (2.2), (2.3) при $\Delta = 1$, заметим, что данная задача отличается от рассмотренной в [10] лишь видом производящего оператора L_μ . Поэтому, воспользовавшись разложением формально введенной зависимости $\Delta = \Delta(\mu, \epsilon)$ в ряд по степеням μ, ϵ , приведенным в [10], запишем уравнение для границы устойчивости изолированных решений при $\epsilon = 1$:

$$(2.21) \quad s = \mu - \mu_1 + \Delta \left(\frac{\partial F(0,0,0)}{\partial \Delta}, \bar{\theta}_{10}^* \right) \left(\frac{\partial^2 F(0,0,0)}{\partial \theta \partial \mu}, \bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{10}^* \right)^{-1} = 0.$$

Вычисление границ устойчивости бифуркационного и изолированных решений системы (1.4), (2.1) в пространстве физических параметров $\beta, R_1, R_2, L_1, \alpha_1, \alpha_2, v_1$ осуществляется при совместном решении уравнений (2.9), (2.20) и (2.9), (2.21) соответственно.

В связи с применением приближенных методов определения собственных значений и собственных функций оператора L_μ возникает вопрос о точности полученных результатов. Известно [9], что с увеличением количества слагаемых ряда (2.12) приближенные собственные значения λ_i стремятся к истинным сверху. Используя методы, изложенные в [11], можно без принципиальных затруднений построить пространство собственных функций оператора L_μ и определить границы (2.20), (2.21) при оценке собственных значений λ_i снизу.

В качестве примера рассматривается течение жидкости в кольцевом канале при отношении $\omega = 0,05$. На внешней стенке канала температура поддерживается постоянной ($\alpha_2 = \infty$), внутренняя стенка теплоизолирована ($\alpha_1 = 0$). Если ограничиваться в (2.12) двучленной аппроксимацией ($N = 2$), то

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2,416, \delta_2 = 5,576, \alpha_{11} = 0,779 + 0,132R_2^2(\mu - a_1), \\ \beta_{11} &= 6,030 \cdot 10^{-2} v_0 R_2^2, \alpha_{12} = \alpha_{21} = -9,208 \cdot 10^{-4} + 9,968 \cdot 10^{-5} R_2^2(\mu - a_1), \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = 6,506 \cdot 10^{-4} v_0 R_2^2, \alpha_{22} = 1,756 + 5,632 \cdot 10^{-2} R_2^2(\mu - a_1), \\ \beta_{22} &= 2,076 \cdot 10^{-2} v_0 R_2^2, \end{aligned}$$

где v_0 — максимальная скорость в потоке, определяемая зависимостью [3]

$$v_0 = \frac{\Delta p_1 R_2^3}{4\nu_1 L_1} \left[1 - \frac{1 - \omega^2}{2 \ln(\omega^{-1})} \left(1 - \ln \left(\frac{1 - \omega^2}{2 \ln(\omega^{-1})} \right) \right) \right].$$

Собственное значение λ_1 является минимальным положительным корнем уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2) + \lambda (\beta_{11} \alpha_{22} + \alpha_{11} \beta_{22} - 2\alpha_{12} \beta_{12}) + \\ + \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 0. \end{aligned}$$

Собственные функции операторов L_μ, L_μ^* , соответствующие значению λ_1 , при $x_1 = L_1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{10} &= \exp(\lambda_1(0)L_1) c_1^{(1)}(0) [\varphi_1(\delta_1 R_2^{-1} r_1) + g(0) \varphi_2(\delta_2 R_2^{-1} r_1)], \\ \bar{\theta}_{10}^* &= r_1 v_1 \bar{\theta}_{10} (\bar{\theta}_{10}, r_1 v_1 \bar{\theta}_{10})^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь

$$c_1^{(1)}(\mu) = [v_0 R_2^2 (6,030 \cdot 10^{-2} + 1,994 \cdot 10^{-4} g(\mu) + 2,076 \cdot 10^{-2} g^2(\mu))]^{-0,5};$$

$$g(\mu) = \frac{c_2^{(1)}(\mu)}{c_1^{(1)}(\mu)} = -\frac{\alpha_{11} + \lambda_1(\mu)\beta_{11}}{\alpha_{12} + \lambda_1(\mu)\beta_{12}}$$

После умножения $\bar{\theta}_{10}^*$ на

$$(c_1^{(1)}(0))^2 R_2^3 v_0 (2,583 \cdot 10^{-2} - 1,130 \cdot 10^{-2} g(0) + 9,958 \cdot 10^{-3} g^2(0))$$

дальнейшие вычисления дают

$$\begin{aligned} G &= c_1^{(1)}(\mu)(1 - \exp(\lambda_1(\mu)L_1))\lambda_1^{-1}(1,251 - 1,909g(\mu) - \\ &\quad - a_1 R_2^2(0,214 - 6,140 \cdot 10^{-2}g(\mu))) - \\ &\quad - c_1^{(1)}(\mu)R_2^2 v_0 \exp(\lambda_1(\mu)L_1)(9,164 \cdot 10^{-2} - 1,769 \cdot 10^{-2}g(\mu)), \\ \left\langle \frac{\partial^2 F(0,0,0)}{\partial \theta^2}, \bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{10}^* \right\rangle &= 2a_2(c_1^{(1)}(0))^3 R_2^3 v_0 \exp(\lambda_1(0)L_1) \times \\ &\times (1,694 \cdot 10^{-2} - 2,792 \cdot 10^{-3}g(0) + 1,502 \cdot 10^{-2}g^2(0) - 1,545 \cdot 10^{-3}g^3(0)), \\ \left\langle \frac{\partial^2 F(0,0,0)}{\partial \theta \partial \mu}, \bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{10}^* \right\rangle &= -(c_1^{(1)}(0))^2 R_2^3 v_0 (2,583 \cdot 10^{-2} - \\ &\quad - 1,130 \cdot 10^{-2}g(0) + 9,958 \cdot 10^{-3}g^2(0)), \\ \left\langle \frac{\partial F(0,0,0)}{\partial \Delta}, \bar{\theta}_{10}^* \right\rangle &= \exp(-\lambda_1(0)L_1)(4c_1^{(1)}(0)R_2 v_1 \sigma_0^3 \times \\ &\quad \times (1,522 \cdot 10^{-2} - 1,183 \cdot 10^{-2}g(0)) + \\ &\quad + a_0 c_1^{(1)}(0)R_2^3 v_0 (4,460 \cdot 10^{-2} + 1,995 \cdot 10^{-2}g(0))). \end{aligned}$$

Результаты расчетов по формулам (2.20), (2.21) границ устойчивости бифуркационного и изолированных решений (линии 1 и 2), полученных при $R_2 = 6$, $\beta = 10^{-2}$, $v_1 = 10^{-3}$, приведены на рис. 1. Кривые 1, 2 ограничивают область устойчивости сверху.

На рис. 2 область устойчивости бифуркационных решений, определенная при $R_2 = 6$, $v_0 = 1$, находится между кривыми 1, 2. Область устойчивости изолированных решений, полученная при $R_2 = 6$, $v_0 = 1$, $v_1 = 10^{-3}$, находится под линией 3.

Можно обратить внимание на слабую зависимость границы устойчивости изолированных решений при фиксированных R_2 , ω , v_0 , α_1 , α_2 , v_1 от параметра β или для конкретной жидкости с заданными E , R от начальной температуры. Вместе с тем изменение начальной температуры жидкости не только влияет на параметр μ через $a_2(\beta)$, но и оказывает воздействие на мощность притяжения того или иного (устойчивого или неустойчивого) решения, рассматриваемого как аттрактор, через временной масштаб t_a , $\theta \sim \exp(st_a^{-1})$. Это представляется важным в том смысле, что если размеры канала и граничные условия таковы, что $s > 0$ при любых $\beta \ll 1$, то понижением температуры можно добиться увеличения масштаба t_a и стабилизации теплового состояния, понимая под этим, что температура жидкости за определенный конечный промежуток времени изменится незначительно. Вопросы стабилизации могут приобрести первостепенное значение при пусках и остановках технологических процессов, связанных с транспортировкой реакционноспособной жидкости в кольцевых каналах. Так, если точка M на рис. 1 изображает устойчивое тепловое состояние относительно кривой 2, то, направляясь в эту точку из $v_0 = 0$ или покидая ее в сторону $v_0 = 0$, приходится двигаться по полю скоростей, при которых тепловое состояние неустойчиво. Поэтому при пуске и остановке таких процессов, когда, основываясь на проведенных расчетах, можно предположить, что потеря тепловой устойчивости наиболее вероятна, следует понизить температуру жидкости или, если есть возможность, регулировать ее

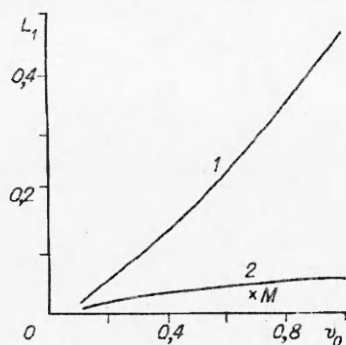


Рис. 1

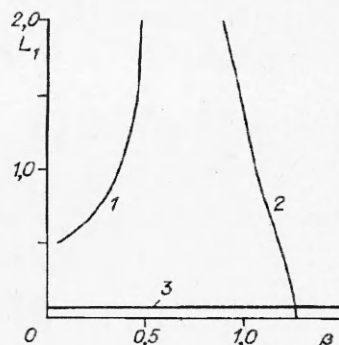


Рис. 2

химическим составом в сторону увеличения энергии активации. В любом случае переходные режимы должны быть пройдены по возможности быстрее.

3. Поршневой поток. При медленных течениях, для которых пренебрежение кондуктивной составляющей переноса тепла вдоль оси недопустимо, сделано предположение о постоянстве скорости потока по сечению канала $v_1 = v_0$.

В этом случае производящий оператор

$$(3.1) \quad L_\mu = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \theta}{\partial r_1} \right) - v_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + (a_1 - \mu)\theta = 0.$$

Для (3.1) и для системы (1.3), (1.4) справедливы граничные условия (2.2), а в плоскостях $x_1 = 0$, $x_1 = L_1$ они имеют вид

$$(3.2) \quad \theta(0, r_1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \theta(L_1, r_1, \tau)}{\partial x_1} = 0.$$

Собственные значения оператора (3.1) при граничных условиях (2.2), (3.2) следующие:

$$\lambda_i = a_1 - \frac{\delta_i^2}{R_2^2} - \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Здесь γ_i — положительные корни уравнения $\gamma = -\frac{v_0}{2} \operatorname{tg}(\gamma L_1)$; значения δ_i те же, что и в (2.13). Решение (3.1) устойчиво, если $\mu = \lambda_1 < 0$.

Все собственные значения λ_i двукратны, и каждому из них соответствуют две независимые функции:

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &= I_0(\delta_i R_2^{-1} r_1) \sin(\gamma_i x_1) \exp(0,5 v_0 x_1), \\ \varphi_{2i} &= N_0(\delta_i R_2^{-1} r_1) \sin(\gamma_i x_1) \exp(0,5 v_0 x_1). \end{aligned}$$

При двукратных собственных значениях оператора L_μ система (1.3), (1.4) может иметь при одних и тех же исходных данных три решения, представляющих собой точки пересечения конических сечений на плоскости с координатами (μ, η) . Связь координат μ, η с параметрами задачи приведена в [12].

Проекция решений системы (1.3), (1.4) на двойное нуль-пространство оператора L_μ в каждой точке пересечения конических сечений $(\mu_1^{(i)}; \eta^{(i)})$ ($i = 1 \div 3$) записываются как

$$\theta^{(i)} = f_1^{(i)}(x_1, r_1) \exp(\mu s_1^{(i)} \tau) + f_2^{(i)}(x_1, r_1) \exp(\mu s_2^{(i)} \tau),$$

где $\theta^{(i)}$ — решение в i -й точке пересечения конических сечений; $s_1^{(i)}, s_2^{(i)}$ — параметры, метод определения которых для бифуркационного и изолирован-

ных решений приведен в [12]; $f_1^{(i)}(x_1, r_1)$, $f_2^{(i)}(x_1, r_1)$ — функции от координат.

Параметры $s_1^{(i)}$, $s_2^{(i)}$ ($i = 1 \div 3$) могут быть действительными или комплексными. Если рассматривать действительные числа как частный случай комплексных, то устойчивость решений (1.3), (1.4) определяется неравенством

$$\mu \max(\operatorname{Re}s_1^{(i)}, \operatorname{Re}s_2^{(i)}) < 0$$

при условии, что $\operatorname{Re}s_1^{(i)}$, $\operatorname{Re}s_2^{(i)}$ имеют одинаковые знаки [12].

Проведены расчеты для канала с постоянной температурой стенок $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = \infty$ при следующих исходных данных: $\omega = 0,05$, $R_2 = 6$, $\beta = 10^{-2}$, $L_1 = 1,93$. Здесь и далее длина L_1 выбиралась так, чтобы решение (3.1) находилось на границе устойчивости ($\mu = 0$).

В результате расчетов получены три бифуркационных решения системы (1.3), (1.4):

$$(\mu_1^{(1)}; \eta^{(1)}) = (1,019; -9,501), (\mu_1^{(2)}; \eta^{(2)}) = (-0,291; -1,912 \cdot 10^{-2}), (\mu_1^{(3)}; \eta^{(3)}) = (-0,113; -0,321)$$

(рис. 3, точка $(\mu_1^{(1)}, \eta^{(1)})$ находится за пределами рисунка). Эти решения являются точками стационарного равновесия, для которых определены параметры

$$(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (-13,418; -80,242), (s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (5,592; -1,813), (s_1^{(3)}; s_2^{(3)}) = (4,106; 0,929),$$

показывающие, что решение в первой точке устойчиво при $\mu > 0$, в третьей — при $\mu < 0$. Решение во второй точке неустойчиво при любом μ .

Рассматривая точки стационарного равновесия как аттракторы, легко убедиться, что как при $\mu > 0$, так и при $\mu < 0$ захват любых возмущений температуры устойчивым или неустойчивым аттрактором приблизительно равновероятен.

При тех же исходных данных, что и выше, но при теплоизолированной внутренней стенке канала ($\alpha_1 = 0$) и $L_1 = 1,78$ (из условия $\mu = 0$) система (1.3), (1.4) имеет одно действительное решение и два комплексно-сопряженных:

$$(\mu_1^{(1)}; \eta^{(1)}) = (-0,227; -9,789), (\mu_1^{(2)}; \eta^{(2)}) = (-0,353 - 0,312i; 5,534 \cdot 10^{-2} + 0,446i).$$

Третья точка не приводится. Для этих решений найдено

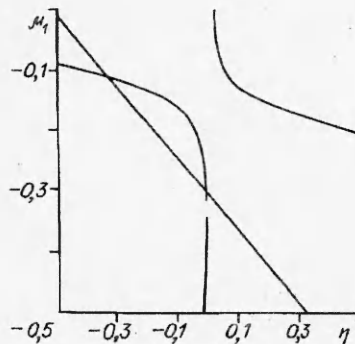
$$(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (0,363; -27,675), (s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (-0,150 + 0,156i; -1,649 - 2,003i),$$

откуда следует, что стационарное решение неустойчиво при любом μ , а периодические (рис. 4, кривая 1) устойчивы при $\mu > 0$.

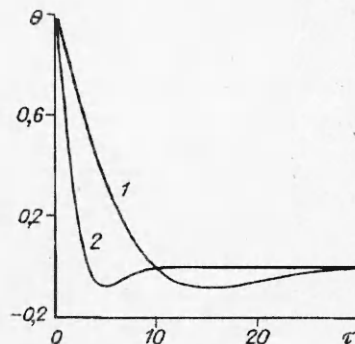
Увеличение или уменьшение внешнего радиуса канала при тех же исходных данных не меняет общей картины распределения решений, но увеличивает или уменьшает силу их притяжения. Так, если взять $R_2 = 12$, то $(s_1^{(1)}; s_2^{(1)}) = (1,117; -85,177)$, $(s_1^{(2)}; s_2^{(2)}) = (-0,140 + 0,479i; -5,076 - 6,144i)$, откуда видно, что при любом μ скорость повышения или понижения (рис. 4, кривая 2) температуры выше, чем при $R_2 = 6$.

Разумеется, здесь, так же как и для ламинарного потока, скорость изменения температуры в реальном времени должна быть определена с учетом масштаба t_a .

Автор выражает глубокую признательность рецензенту за конструктивные замечания и благодарит участников семинара В.В. Пухначева при ИГиЛ СО РАН за обсуждение результатов.



Р и с. 3



Р и с. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.В., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б. и др. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
2. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1987.
3. Берд Р., Стюарт В., Лайфут Е. Явления переноса. — М.: Химия, 1974.
4. Вилюнов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. — Новосибирск: Наука, 1984.
5. Марслен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложение. — М.: Мир, 1980.
6. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Мир, 1983.
7. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости. — М.: Мир, 1981.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1961.
9. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах. — М.: Мир, 1971.
10. Боднарь Т.А. Тепловая устойчивость проточного химического реактора с неподвижным слоем катализатора // ФГВ. — 1990. — № 4. — С. 68—74.
11. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. — М.: Мир, 1970.
12. Боднарь Т.А. Тепловая устойчивость тангенциального потока жидкости в кольцевом канале // ПМТФ. — 1991. — № 4. — С. 127—133.

г. Бийск

Поступила 1/VII 1991 г.,
в окончательном варианте — 30/VI 1993 г.

УДК 537.84

А.А. Чарахчян

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЖАТИЯ ДЕЙТЕРИЯ В КОНИЧЕСКОЙ МИШЕНИ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО КУМУЛЯТИВНОГО ЭФФЕКТА

Идея использовать конические мишени для целей управляемого синтеза была высказана уже сравнительно давно [1]. Привлекательность конических мишеней связана с возможностью сосредоточить всю энергию, например, лазерной установки в небольшом телесном угле, в то время как использование традиционных сферически-симметричных мишеней требует по возможности равномерного распределения лазерного излучения по всей поверхности сферы. Недостатком конических мишеней является неизбежная деформация конуса на финальной стадии сжатия, ограничивающая возмож-

© А.А. Чарахчян, 1994