

УДК 517.956.3

## Численное моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели “Земля–Атмосфера” при наличии ветра в атмосфере\*

Б.Г. Михайленко, А.А. Михайлов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: mikh@sscc.ru (Михайленко Б.Г.), alex\_mikh@omzg.sssc.ru (Михайлов А.А.)

**Михайленко Б.Г., Михайлов А.А.** Численное моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели “Земля–Атмосфера” при наличии ветра в атмосфере // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 2. — С. 149–162.

В данной статье рассматривается эффективный алгоритм численного решения 2.5D динамической задачи распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для совмещённой математической модели “Земля–Атмосфера” при наличии ветра в атмосфере. Распространение сейсмических волн в упругой среде описывается системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений. Система уравнений, описывающая распространение акусто-гравитационных волн в неоднородной неионизированной атмосфере, записывается через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений, давления и изменения плотности воздуха при наличии ветра, направленного в горизонтальной плоскости. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования интегральных преобразований Лагерра и Фурье с конечно-разностным методом.

**Ключевые слова:** акусто-гравитационные и сейсмические волны, уравнения Навье–Стокса, конечно-разностный метод, преобразование Лагерра.

**Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A.** Numerical modeling of acoustic-gravity waves propagation in a heterogeneous “Earth–Atmosphere” model with a wind in the atmosphere // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 2. — P. 149–162.

A numerical-analytical solution for seismic and acoustic-gravitational waves propagation is applied to a heterogeneous “Earth–Atmosphere” model. Seismic wave propagation in an elastic half-space is described by a system of first order dynamic equations of the elasticity theory. Propagation of acoustic-gravitational waves in the atmosphere is described by the linearized Navier–Stokes equations with the a wind. The proposed algorithm is based on the integral Laguerre transform with respect to time, the finite integral Fourier transform along the spatial coordinate with the finite difference solution of the reduced problem.

**Key words:** seismic waves, acoustic-gravitational waves, Navier–Stokes equations, Laguerre transform, finite difference method.

---

## 1. Введение

При математическом моделировании сейсмических волновых полей внутри упругой среды обычно полагают, что поверхность среды граничит с вакуумом, и задают гра-

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-05-00867).

нические условия на свободной поверхности. Тем самым полагают, что на границе сейсмические волны абсолютно отражаются, при этом пренебрегают эффектом генерации упругими волнами акусто-гравитационных волн в атмосфере и их взаимодействием при распространении вдоль границы.

В последнее десятилетие появились теоретические и экспериментальные исследования, в которых показана высокая степень взаимосвязи между волнами в литосфере и атмосфере. В работе [1] описан эффект акусто-сейсмической индукции, при которой акустическая волна от вибратора, благодаря явлению рефракции в атмосфере, возбуждает интенсивные поверхностные сейсмические волны на расстоянии десятков километров. В свою очередь, литосферные сейсмические волны от землетрясений и взрывов генерируют атмосферные акусто-гравитационные волны, которые особенно интенсивны в верхних слоях атмосферы с малой плотностью и ионосфере.

Теоретическим исследованиям волновых процессов на границе упругого полупространства с изотермической однородной атмосферой посвящены работы [2, 3]. В них установлены и исследуются свойства поверхностной волны Стоунли–Шолтэ и модифицированной волны Лэмба.

В данной статье рассматривается эффективный алгоритм для проведения численных расчётов моделирования и изучения распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для пространственно-неоднородной модели “Атмосфера–Земля”. Особенностью рассматриваемого алгоритма является комбинирование интегральных преобразований с конечно-разностным методом. Подобный подход к решению задачи для вертикально-неоднородной модели в цилиндрической системе координат без учёта ветра в атмосфере был рассмотрен в работе [4]. В рассматриваемой постановке задачи исходная система записывается в виде гиперболической системы первого порядка в терминах вектора скоростей и тензора напряжений для трёхмерной декартовой системы координат. При этом предполагается, что параметры среды (плотность и скорости продольных и поперечных волн) имеют зависимость только по двум координатам, а по третьей координате среда однородна. Данную постановку задачи принято называть 2.5D задачей. Предлагаемый алгоритм основан на применении интегрального преобразования Лагерра по временной координате. Этот метод можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье-преобразования, где вместо частоты  $\omega$  мы имеем параметр  $p$  — степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [5, 6], а затем развит для задач вязкоупругости [7, 8] и теории пористых сред [9]. В указанных работах рассмотрены отличительные особенности данного метода от принятых подходов и обсуждаются преимущества применения интегрального преобразования Лагерра в отличии от разностного метода и Фурье-преобразования по времени.

## 2. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение акусто-гравитационных волн в неоднородной неионизированной изотермической атмосфере в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  при наличии ветра, направленного вдоль горизонтальной оси  $x$  и с вертикальной стратификацией по оси  $z$ , имеет вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} - u_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} = c_0^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] - u_z \frac{\partial P_0}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + F(x, y, z, t). \quad (5)$$

Здесь  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho_0(z)$  — плотность невозмущённой атмосферы,  $c_0(z)$  — скорость звука,  $v_x(z)$  — скорость ветра вдоль оси  $x$ ,  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — вектор скорости смещения частиц воздуха,  $P$  и  $\rho$  — соответственно возмущения давления и плотности под действием распространения волны от источника массы  $F(x, y, z, t) = \delta(r - r_0)f(t)$ , где  $f(t)$  — заданный временной сигнал в источнике. Полагаем, что ось  $z$  направлена вверх. Нулевые подиндексы для физических параметров среды означают, что их значения задаются для невозмущённого состояния атмосферы. Зависимость атмосферного давления  $P_0$  и плотности  $\rho_0$  для невозмущённого состояния атмосферы в однородном гравитационном поле можно определить как

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad \rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H),$$

где  $H$  — высота изотермической однородной атмосферы, а  $\rho_1$  — плотность атмосферы возле поверхности Земли, т. е. при  $z = 0$ .

Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i f(t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u}. \quad (7)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mu(x_1, x_2, x_3)$  — упругие параметры среды,  $\rho_0(x_1, x_2, x_3)$  — плотность среды,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скорости смещений,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\vec{F}(x, y, z) = F_1 \vec{e}_x + F_2 \vec{e}_y + F_3 \vec{e}_z$  описывает распределение локализованного в пространстве источника, а  $f(t)$  — заданный временной сигнал в источнике.

Тогда совмещённую систему уравнений для описания распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн в декартовой системе координат  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  можно записать:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i f(t) - K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\rho g}{\rho_0} e_z - u_z \frac{\partial v_x}{\partial x_3} e_x \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} - \delta_{ik} K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_1} + \rho_0 g u_z \right], \quad (9)$$

$$K_{\text{атм}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{u} - u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right]. \quad (10)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\rho_0(x, z)$  — плотность среды,  $\lambda(x, z)$ ,  $\mu(x, z)$  — упругие параметры среды,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скорости смещений,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\vec{F}(x, y, z) = F_1 \vec{e}_x + F_2 \vec{e}_y + F_3 \vec{e}_z$  описывает распределение локализованного в пространстве источника, а  $f(t)$  — заданный временной сигнал в источнике. Полагаем, что по оси  $Y$  среда однородна.

Система (1)–(5) для атмосферы получается из системы (8)–(10), если полагать  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda = c_0^2 \rho_0$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ,  $K_{\text{атм}} = 1$ . Полагая в системе (8)–(10)  $K_{\text{атм}} = 0$ , получим систему уравнений (6)–(7) для распространения сейсмических волн в упругой среде.

В нашей задаче считаем, что граница раздела сред атмосфера и упругое полупространство проходит по плоскости  $z = x_3 = 0$ . В этом случае условие контакта двух сред при  $z = 0$  записывается как

$$u_z |_{z=0^-} = u_z |_{z=0^+}; \quad \left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right|_{z=0^-} = \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \rho_0 g u_z \right) \Big|_{z=0^+}; \quad \sigma_{xz} |_{z=0^-} = \sigma_{yz} |_{z=0^-} = 0. \quad (11)$$

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_i |_{t=0} = \sigma_{ij} |_{t=0} = P |_{t=0} = \rho |_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Полагаем, что все функции компонент волнового поля обладают достаточной гладкостью для применения последующих преобразований.

### 3. Алгоритм решения

На первом этапе решения воспользуемся конечным косинус-синус преобразованием Фурье по пространственной координате  $y$ , в направлении которой среда считается однородной. Для каждой компоненты системы введём соответствующие косинус или синус преобразования [10]:

$$\vec{W}(x, z, n, t) = \int_0^a \vec{W}(x, y, z, t) \begin{Bmatrix} \cos(k_n y) \\ \sin(k_n y) \end{Bmatrix} d(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

с соответствующей формулой обращения

$$\vec{W}(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi} \vec{W}(x, 0, z, t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \vec{W}(x, n, z, t) \cos(k_n y) \quad (14)$$

или

$$\vec{W}(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \vec{W}(x, n, z, t) \sin(k_n y), \quad (15)$$

где  $k_n = \frac{n\pi}{a}$ .

Выберем расстояние  $a$  достаточно большим и будем рассматривать волновое поле до момента времени  $t < T$ , где  $T$  — минимальное время распространения продольной волны до границы  $r = a$ . В результате данного преобразования получим  $N + 1$  независимых двумерных по пространству нестационарных задач.

На втором этапе решения к полученным таким образом  $N + 1$  независимым задачам применим интегральное преобразование Лагерра по времени вида

$$\vec{W}_p(x, n, z) = \int_0^{\infty} \vec{W}(x, n, z, t) (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_p^{\alpha}(ht) d(ht), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

с формулой обращения

$$\vec{W}(x, n, z, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{(p + \alpha)!} \vec{W}_p(x, n, z) l_p^{\alpha}(ht), \quad (17)$$

где  $l_p^{\alpha}(ht)$  — ортогональные функции Лагерра.

Функции Лагерра  $l_p^{\alpha}(ht)$  выражаются через классические ортонормированные полиномы Лагерра  $L_p^{\alpha}(ht)$  [11]. Здесь мы выбираем  $\alpha$  (порядок функций Лагерра) целым и положительным, тогда имеет место представление

$$l_p^{\alpha}(ht) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_p^{\alpha}(ht).$$

Для удовлетворения начальных условий (12) необходимо и достаточно положить  $\alpha \geq 1$ . Кроме того, введён параметр сдвига  $h > 0$ , смысл и эффективность применения которого подробно обсуждается в работе [6].

В результате этих преобразований решение исходной задачи (8)–(12) сводится к решению  $N + 1$  независимых двумерных дифференциальных задач в спектральной области вида:

$$\frac{h}{2} u_x^p - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} + k_n \sigma_{xy}^p \right) + K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial u_x^p}{\partial x} - u_z^p \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = F_x(n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} u_x^j, \quad (18)$$

$$\frac{h}{2} u_y^p - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \sigma_{yz}^p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}^p}{\partial x} - k_n \sigma_{yy}^p \right) + K_{\text{атм}} v_x \frac{\partial u_y^p}{\partial x} = F_y(n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} u_y^j, \quad (19)$$

$$\frac{h}{2} u_z^p - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \sigma_{zz}^p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial x} + k_n \sigma_{yz}^p \right) + K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial u_z^p}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0} \bar{\rho}^p \right] = F_z(n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} u_z^j, \quad (20)$$

$$\frac{h}{2} \sigma_{xx}^p - \lambda \left( \frac{\partial u_z^p}{\partial z} + k_n u_y^p \right) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x^p}{\partial x} + K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} + \rho_0 g u_z^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{xx}^j, \quad (21)$$

$$\frac{h}{2} \sigma_{yy}^p - \lambda \left( \frac{\partial u_z^p}{\partial z} + \frac{\partial u_x^p}{\partial x} \right) - (\lambda + 2\mu) k_n u_y^p + K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial \sigma_{yy}^p}{\partial x} + \rho_0 g u_z^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{yy}^j, \quad (22)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{zz}^p - \lambda \left( \frac{\partial u_x^p}{\partial x} + k_n u_y^p \right) - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z^p}{\partial z} + K_{\text{атм}} \left[ v_x \frac{\partial \sigma_{zz}^p}{\partial x} + \rho_0 g u_z^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{zz}^j, \quad (23)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{xy}^p - \mu \left( \frac{\partial u_y^p}{\partial x} + k_n u_x^p \right) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{xy}^j, \quad (24)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{xz}^p - \mu \left( \frac{\partial u_x^p}{\partial z} - \frac{\partial u_z^p}{\partial x} \right) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{xz}^j, \quad (25)$$

$$\frac{h}{2}\sigma_{yz}^p - \mu \left( \frac{\partial u_y^p}{\partial z} + k_n u_z^p \right) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{yz}^j, \quad (26)$$

$$K_{\text{атм}} \left[ \frac{h}{2}\rho^p + v_x \frac{\partial \rho^p}{\partial x} + \rho_0 \left( \frac{\partial u_x^p}{\partial x} + k_n u_y^p + \frac{\partial u_z^p}{\partial z} \right) + u_z^p \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \rho^j, \quad (27)$$

где  $f^p$  — коэффициенты Лагерра функции источника  $f(t)$ . Коэффициенты  $u_x^p, u_y^p, u_z^p, \sigma_{xx}^p, \sigma_{yy}^p, \sigma_{zz}^p, \sigma_{xy}^p, \sigma_{xz}^p, \sigma_{yz}^p, \rho^p$  в формулах (18)–(27) являются функциями от переменных  $(n, x, z)$ .

Легко заметить, что параметр преобразования Лагерра  $p$  присутствует только в правой части уравнений, и спектральные гармоники для всех компонент поля имеют рекуррентную зависимость.

Условие контакта двух сред при  $z = 0$  записывается как

$$\frac{h}{2}\sigma_{zz}^p + h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{zz}^j \Big|_{z=-0} = \left( \frac{h}{2}\sigma_{zz}^p + h \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{zz}^j + \rho_0 g u_z^p \right) \Big|_{z=+0}; \quad (28)$$

$$u_z^p \Big|_{z=-0} = u_z^p \Big|_{z=+0}; \quad \sigma_{xz}^p \Big|_{z=-0} = \sigma_{yz}^p \Big|_{z=-0} = 0.$$

Для решения полученной задачи (18)–(28) воспользуемся конечным косинус-синус преобразованием Фурье по пространственной координате  $x$  и конечно-разностной аппроксимацией производных по координате  $z$  со вторым порядком точности [12].

Для этого в расчётной области введём в направлении координаты  $z$  сетки  $\omega z_i$  и  $\omega z_{i+1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta z$ , сдвинутые относительно друг друга на  $\frac{\Delta z}{2}$ :

$$\omega z_i = \{z_i = i\Delta z; i = 0, \dots, K\}, \quad \omega z_{i+1/2} = \{z_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta z; i = 0, \dots, K - 1\}.$$

На данных сетках введём оператор дифференцирования  $D_z$ , аппроксимирующий производную  $\frac{\partial}{\partial z}$  со вторым порядком точности по координате  $z$  вида

$$D_z u(x, z) = \frac{1}{\Delta z} \left[ u \left( x, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - u \left( x, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right].$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\rho^p, u_x^p(x, z), u_y^p(x, z), \sigma_{xx}^p(x, z), \sigma_{yy}^p(x, z), \sigma_{zz}^p(x, z), \sigma_{xy}^p(x, z) \in \omega z_i,$$

$$u_z^p(x, z), \sigma_{xz}^p(x, z), \sigma_{yz}^p(x, z) \in \omega z_{i+1/2}.$$

Выбор расположения компонент в целых и полужелтых узлах сетки осуществляется на основе разностной аппроксимации уравнений (18)–(27) и удовлетворения граничному условию (28). Для верхней границы атмосферы и нижней границы в упругой среде задаются граничные условия 1-го или 2-го рода для соответствующих компонент.

По координате  $x$  воспользуемся конечным косинус-синус преобразованием Фурье, аналогично сделанному ранее преобразованию по координате  $y$  с соответствующими формулами обращения:

$$\vec{W}_p(x, n, z_i, p) = \frac{1}{\pi} \vec{W}_0(n, z_i, p) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^M \vec{W}(m, n, z_i, p) \cos(k_m x) \quad (29)$$

или

$$\vec{W}(x, n, z_i, p) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^M \vec{W}(m, n, z_i, p) \sin(k_m x), \quad (30)$$

где  $k_m = \frac{m\pi}{b}$ .

Следует учитывать, что среда в данном направлении является неоднородной.

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений, которая для  $i$  и  $i + 1/2$  узлов разностной сетки записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{u}_x^p - \sum_{s=0}^M q_1 (D_z \bar{\sigma}_{xz}^p - k_s \bar{\sigma}_{xx}^p + k_n \bar{\sigma}_{xy}^p) + \\ K_{\text{атм}} \sum_{s=0}^M r_1 (v_x k_s \bar{u}_x^p - \bar{u}_z^p D_z v_x) = F_x(m, n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{u}_x^j, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{h}{2} \bar{u}_y^p - \sum_{s=0}^M q_2 (D_z \bar{\sigma}_{yz}^p + k_s \bar{\sigma}_{xy}^p - k_n \bar{\sigma}_{yy}^p) - K_{\text{атм}} \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{u}_y^p = F_y(m, n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{u}_y^j, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M q_3 (D_z \bar{\sigma}_{zz}^p + k_s \bar{\sigma}_{xz}^p + k_n \bar{\sigma}_{yz}^p) + \\ K_{\text{атм}} \left[ \frac{g}{\rho_0} \bar{\rho}^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{u}_z^p \right] = F_z(m, n) f^p - h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{u}_z^j, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{xx}^p - \sum_{s=0}^M q_4 (D_z \bar{u}_z^p + k_n \bar{u}_y^p) - \sum_{s=0}^M q_5 k_s \bar{u}_x^p + K_{\text{атм}} \left[ \rho_0 g \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\sigma}_{xx}^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{xx}^j, \quad (34)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{yy}^p - \sum_{s=0}^M q_4 (D_z \bar{u}_z^p + k_s \bar{u}_x^p) - \sum_{s=0}^M q_5 k_n \bar{u}_y^p + K_{\text{атм}} \left[ \rho_0 g \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\sigma}_{yy}^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{yy}^j, \quad (35)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{zz}^p - \sum_{s=0}^M q_4 (k_s \bar{u}_x^p + k_n \bar{u}_y^p) - \sum_{s=0}^M q_5 D_z \bar{u}_z^p + K_{\text{атм}} \left[ \rho_0 g \bar{u}_z^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\sigma}_{zz}^p \right] = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{zz}^j, \quad (36)$$

$$\frac{h}{2} \bar{\sigma}_{xy}^p - \sum_{s=0}^M q_6 (k_s \bar{u}_y^p + k_n \bar{u}_x^p) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{xy}^j, \quad (37)$$

$$\frac{h}{2}\bar{\sigma}_{xz}^p - \sum_{s=0}^M q_7 (D_z \bar{u}_x^p + k_s \bar{u}_z^p) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{xz}^j, \quad (38)$$

$$\frac{h}{2}\bar{\sigma}_{yz}^p - \sum_{s=0}^M q_8 (D_z \bar{u}_y^p + k_n \bar{u}_z^p) = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\sigma}_{yz}^j, \quad (39)$$

$$K_{\text{атм}} \left[ \frac{h}{2} \bar{\rho}^p - \sum_{s=0}^M r_2 v_x k_s \bar{\rho}^p + \sum_{s=0}^M q_9 (k_s \bar{u}_x^p + k_n \bar{u}_y^p + D_z \bar{u}_z^p) + \bar{u}_z^p D_z \rho_0 = -h \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\rho}^j \right], \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^b \cos(k_s x) \sin(k_m x) dx, & r_2 &= \int_0^b \sin(k_s x) \cos(k_m x) dx, \\ q_1 &= \int_0^b \frac{1}{\rho_0(x, z_i)} \sin(k_s x) \sin(k_m x) dx, & q_2 &= \int_0^b \frac{1}{\rho_0(x, z_i)} \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, \\ q_3 &= \int_0^b \frac{1}{\rho_0(x, z_{i+1/2})} \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, & q_4 &= \int_0^b \lambda(x, z_i) \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, \\ q_5 &= \int_0^b [\lambda(x, z_i) + 2\mu(x, z_i)] \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, & q_6 &= \int_0^b \mu(x, z_i) \sin(k_s x) \sin(k_m x) dx, \\ q_7 &= \int_0^b \mu(x, z_{i+1/2}) \sin(k_s x) \sin(k_m x) dx, & q_8 &= \int_0^b \mu(x, z_{i+1/2}) \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, \\ q_9 &= \int_0^b \rho_0(x, z_i) \cos(k_s x) \cos(k_m x) dx, & k_m &= \frac{m\pi}{b}, \quad k_s = \frac{s\pi}{b}. \end{aligned}$$

В формулах (31)–(40) приняты следующие обозначения:  $\bar{u}_x^p = \bar{u}_x^p(m, n, z_j)$ . Для других компонент аналогично. Черта над символом каждой компоненты поля означает, что рассматриваются коэффициенты преобразования Фурье по координате  $x$ .

В результате всех сделанных преобразований получим  $N + 1$  систем линейных алгебраических уравнений, где  $N + 1$  — количество суммируемых членов ряда в преобразовании Фурье по координате  $y$ . Представим искомый вектор решения  $\vec{W}$  в следующем виде:

$$\vec{W}(p) = (\vec{V}_0(p), \vec{V}_1(p), \dots, \vec{V}_K(p))^\top,$$

$$\vec{V}_i = (\bar{\rho}^p(m = 0, \dots, M; z_i), \bar{\sigma}_{xx}^p(m = 0, \dots, M; z_i), \bar{u}_x^p(m = 0, \dots, M; z_i), \dots)^\top.$$

Тогда, для каждой  $n$ -й гармоники ( $n = 0, \dots, N$ ) система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана:

$$\left( A + \frac{h}{2} E \right) \vec{W}(p) = \vec{F}(p-1). \quad (41)$$



Последовательность компонент волнового поля в векторе решения  $\vec{V}$  выбирается с учётом минимизации количества диагоналей в матрице  $A$ . При этом на главной диагонали матрицы решаемой системы уравнений специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве множителя параметр  $h$  (параметр преобразования по Лагерру). За счёт выбора значения параметра  $h$  имеется возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений (41), можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля  $\vec{W}(m, n, p)$ . Затем, воспользовавшись формулами обращения для Фурье-преобразования (14), (15), (29), (30) и преобразования Лагерра (17), получим решение исходной задачи (8)–(12).

#### 4. Аспекты численной реализации

В аналитических преобразованиях Фурье и Лагерра при определении значений функций по их спектру используются формулы обращения в виде сумм с бесконечным пределом. При численной реализации необходимым условием является определение требуемого количества членов суммируемого ряда для построения решения с заданной точностью. Так, например, количество членов в формулах обращения преобразования Фурье (14), (15), (29), (30) зависит от минимальной пространственной длины волны в моделируемой среде и размеров расчётной пространственной области восстанавливаемого поля, которая задаётся конечными пределами интегрального преобразования. Кроме того, скорость сходимости суммируемого ряда зависит от гладкости функций моделируемого волнового поля.

Количество членов ряда в разложении по функциям Лагерра, необходимых для определения компонент поля по формуле (17), зависит от задаваемого сигнала в источнике  $f(t)$ , выбора параметра  $h$  и значения временного интервала моделируемого волнового поля. Как можно определить требуемое количество гармоник и выбрать оптимальное значение параметра  $h$ , подробно рассмотрено в работах [6–8].

Анализ численных расчётов показывает, что основная погрешность вычислений в представленном алгоритме решения поставленной задачи связана с численной аппроксимацией пространственных производных. Поэтому для более точной аппроксимации производных вблизи границ раздела сильноконтрастных слоёв среды, а также более точного учёта условия на границе раздела “Земля–Атмосфера” (11) лучше использовать разностную сетку с переменным шагом дискретизации. Таким образом можно уменьшать шаг разбиения сетки при аппроксимации производных на определённых участках среды, что позволяет получить решение с требуемой точностью при меньшем количестве узлов разностной сетки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (41) наиболее эффективным оказалось использование итерационного метода сопряжённых градиентов [13, 14]. В этом случае для матриц систем большой размерности не требуется хранение всей матрицы в машинной памяти. Преимуществом этого метода является также быстрая сходимость к решению задачи при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Наша матрица, как раз, обладает этим свойством за счёт введённого параметра  $h$ . Задав нужное значение  $h$ , можно существенно ускорить сходимость итерационного процесса. Выбор оптимального значения  $h$ , в этом случае, осуществляется исходя из минимизации количества членов ряда в формуле обращения Лагерра (17) и уменьшения количества итераций, требуемых для нахождения решения для каждой гармоники.

Использование преобразования Фурье по пространственной координате, в направле-

нии которой среда считается однородной, позволяет реализовать эффективное распараллеливание решения. В этом случае на каждом процессоре будет решаться независимая задача для каждой гармоники Фурье-преобразования. Дополнительно при проведении расчётов на кластерных вычислительных комплексах с малым объёмом оперативной памяти, доступной одному процессору, для решения больших пространственных задач (более 100 длин волн) было осуществлено распараллеливание решения двухмерной пространственной задачи [15]. На этом этапе расчётов была реализована распараллеленная версия метода сопряжённых градиентов для решения системы алгебраических уравнений для каждой гармоники Фурье. На уровне входных данных, при задании модели среды, это равносильно декомпозиции исходной области на несколько подобластей двухмерной задачи по координате  $z$ . Такой подход даёт возможность распределения памяти как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

Анализ тестовых расчётов показывает устойчивость представленного алгоритма даже для моделей сред, имеющих резкоконтрастные границы раздела слоёв или содержащих тонкие слои, сравнимые с пространственной длиной волны.

## 5. Численные результаты

В данной статье мы рассматриваем результаты численного моделирования для двух вариантов распространения волн в среде “Земля–Атмосфера” при наличии ветра. Первый вариант рассматривает случай, когда скорость сейсмических волн в упругом полупространстве меньше скорости звука в атмосфере (типичный случай для сейсморазведки при наличии зоны малых скоростей в верхней части литосферы). Во втором варианте скорость сейсмических волн в упругом полупространстве превышает скорость звука в атмосфере. Результаты численных расчётов волнового поля в виде мгновенных снимков в фиксированный момент времени и расчётных сейсмотрасс представлены на рис. 1–5. Скорость ветра была задана равной 50 м/с для того, чтобы получить основные физические эффекты распространения волн, не проводя расчёты на очень большие расстояния. Из результатов численного моделирования видно, что в первом варианте не образуется конических волн в атмосфере, которые во втором варианте генерируются продольной и поперечной волнами, распространяющимися вдоль поверхности упругого полупространства. Во втором варианте волновая картина при наличии ветра существенно не меняется, но изменяется амплитуда и скорость волн, распространяющихся в атмосфере и поверхностных волн Стоунли.

На рис. 1–3 представлены результаты расчётов волнового поля для случая, когда скорость сейсмических волн в упругой среде меньше скорости звука в атмосфере. Заданная модель среды состоит из однородного упругого слоя и слоя атмосферы, разделённых плоской границей. Физические характеристики слоёв были заданы следующими:

1. Атмосфера: скорость звука  $c_p = 340$  м/с, плотность, в зависимости от координаты  $z$ , рассчитывалась по формуле  $\rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H)$ , где  $\rho_1 = 1.225 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $H = 6700$  м.
2. Упругий слой: скорость продольной волны  $c_p = 300$  м/с, скорость поперечной волны  $c_s = 200$  м/с, плотность  $\rho_0 = 1.2$  г/см<sup>3</sup>.

Для расчётов использовалась ограниченная область среды размерностью  $(x, y, z) = (30$  км,  $30$  км,  $20$  км). Моделировалось волновое поле от точечного источника типа центр

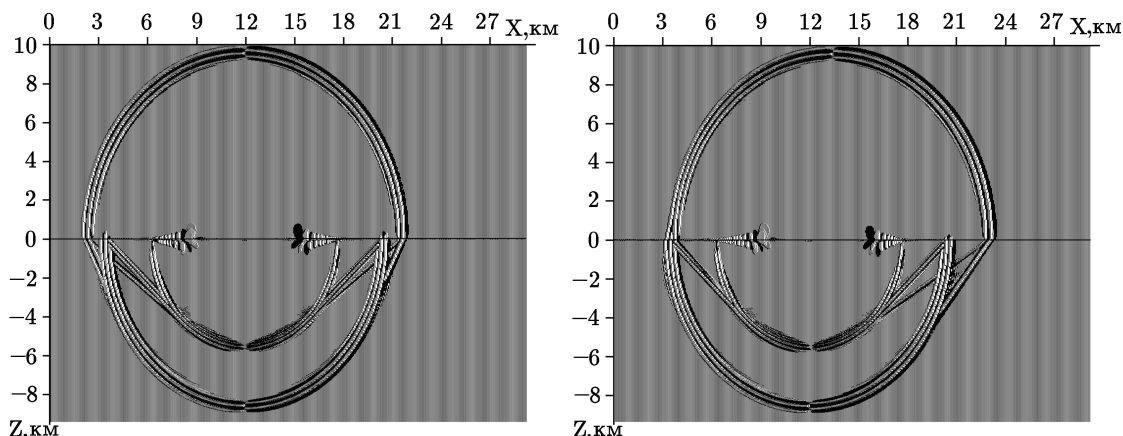
давления, расположенного в упругой среде на глубине  $1/4$  длины продольной волны с координатами  $(x_0, y_0, z_0) = (12 \text{ км}, 15 \text{ км}, -0.075 \text{ км})$ . Временной сигнал в источниках задавался в виде импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)), \quad (42)$$

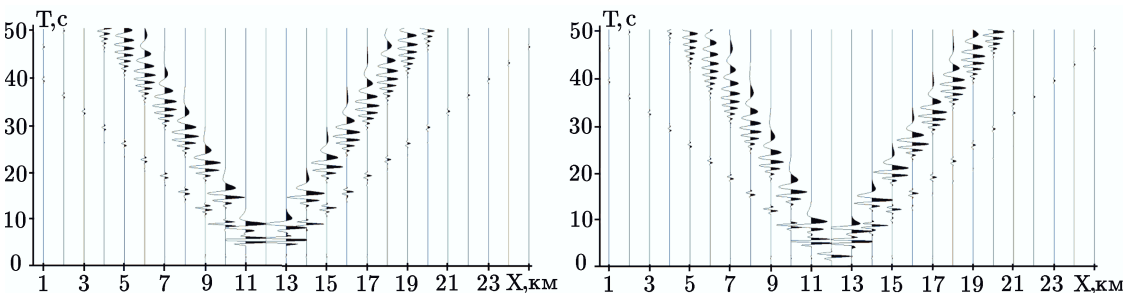
где  $\gamma = 4$ ,  $f_0 = 1 \text{ Гц}$ ,  $t_0 = 1.5 \text{ с}$ .

На рис. 1 изображены мгновенные снимки волнового поля в момент времени  $t=30 \text{ с}$  для компоненты  $u_x(x, y, z)$  в плоскости XZ при  $y = y_0 = 15 \text{ км}$ . Левый — без ветра, правый — с ветром (скорость ветра  $50 \text{ м/с}$ ). Граница раздела упругой среды и атмосферы показана сплошной линией.

Из рисунка видно, что в упругой среде кроме сферической продольной волны  $P$  и конической поперечной волны  $S$  распространяется “нелучевая” сферическая волна  $S^*$ , а далее следует поверхностная волна Стоунли. В атмосфере распространяется преломлённая на границе “Земля–Атмосфера” сферическая акусто-гравитационная волна, которая распространяясь вдоль границы генерирует в упругой среде продольную и поперечную волну.



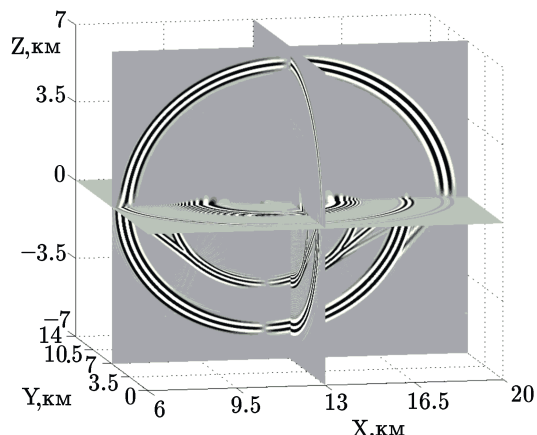
**Рис. 1.** Мгновенные снимки в момент времени  $t = 30 \text{ с}$  для компоненты скорости  $u_x$  в плоскости (XZ). Левый — без ветра, правый — с ветром (скорость ветра  $50 \text{ м/с}$ )



**Рис. 2.** Сейсмограммы для горизонтальной компоненты скорости  $u_x$ . Слева — без ветра, справа — с ветром (скорость ветра  $50 \text{ м/с}$ )

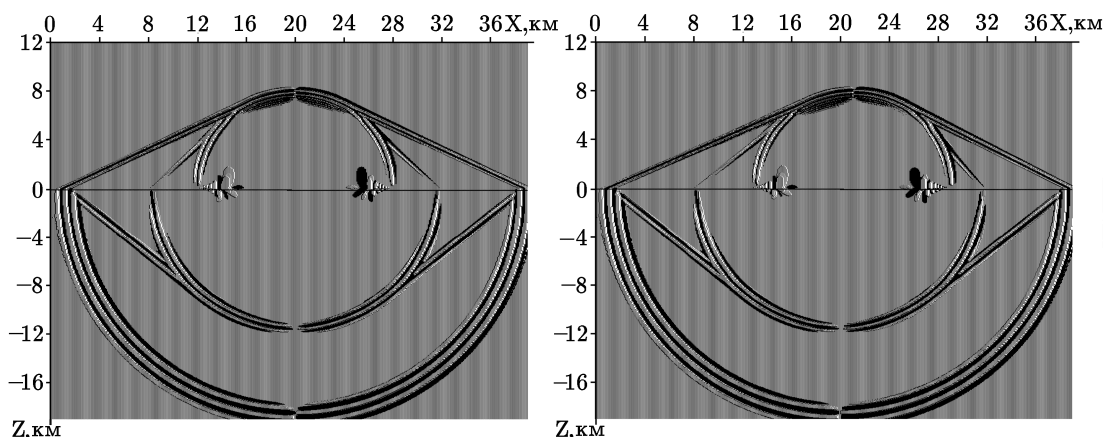
На рис. 2 изображены сейсмограммы для горизонтальной  $u_x$  компоненты скорости смещений, регистрируемые в упругой среде в плоскости XZ на глубине  $\Delta z = 25 \text{ м}$  с шагом  $\Delta x = 1 \text{ км}$ . Координата 1-й трассы  $x_1 = 1 \text{ км}$ . Слева — без ветра, справа — скорость ветра  $50 \text{ м/с}$ .

На рис. 3 представлен мгновенный снимок трёхмерного волнового поля при  $t = 20 \text{ с}$  для  $u_x$  компоненты скорости при наличии ветра в атмосфере равного  $50 \text{ м/с}$ .



**Рис. 3.** Мгновенный снимок волнового поля для горизонтальной компоненты скорости  $u_x(x, y, z)$  в момент времени  $t = 20$  с при наличии ветра в атмосфере (скорость ветра 50 м/с)

Из представленных рисунков видно влияние ветра на распространение акусто-гравитационных волн в атмосфере и поверхностной волны Стоунли, а также на волновую картину в целом.

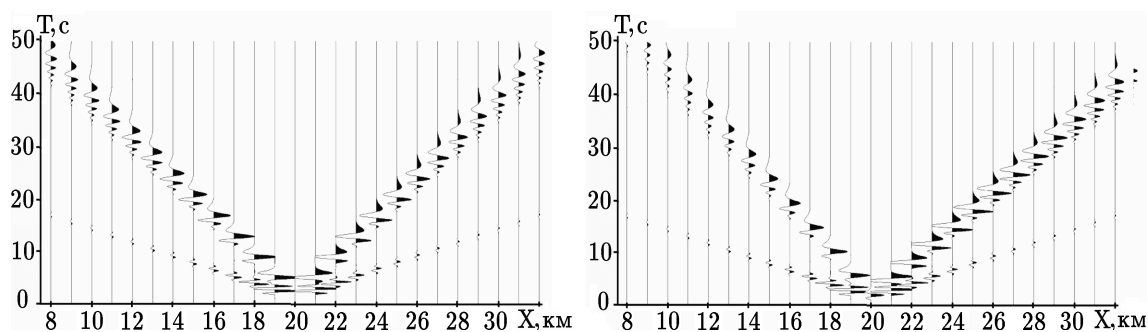


**Рис. 4.** Мгновенные снимки в момент времени  $t = 25$  с для компоненты скорости  $u_x$  в плоскости (XZ). Левый — без ветра, правый — с ветром (скорость ветра 50 м/с)

На рис. 4 и 5 представлены результаты расчётов волнового поля в случае, когда скорость сейсмических волн в упругой среде больше, чем скорость звука в атмосфере. В данной модели физические характеристики упругой среды и атмосферы были заданы следующими:

1. Атмосфера: скорость звука  $c_p = 340$  м/с, плотность, в зависимости от координаты  $z$ , рассчитывалась по формуле  $\rho_0(z) = \rho_1 \exp(-z/H)$ , где  $\rho_1 = 1.225 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $H = 6700$  м.
2. Упругий слой: скорость продольной волны  $c_p = 800$  м/с, скорость поперечной волны  $c_s = 500$  м/с, плотность  $\rho_0 = 1.5$  г/см<sup>3</sup>.

Для расчётов использовалась ограниченная область среды размерностью  $(x, y, z) = (40 \text{ км}, 40 \text{ км}, 32 \text{ км})$ . Моделировалось волновое поле от точечного источника типа центр давления, расположенного в упругой среде на глубине  $1/4$  длины продольной волны с координатами  $(x_0, y_0, z_0) = (20 \text{ км}, 20 \text{ км}, -0.2 \text{ км})$ . Временной сигнал в источниках задавался по формуле (42). На рис. 4 изображены мгновенные снимки волнового поля в момент времени  $t = 25$  с для горизонтальной  $u_x$  компоненты скорости смещений в



**Рис. 5.** Сейсмограммы для компоненты скорости  $u_x$ . Слева — без ветра, справа — с ветром (скорость ветра 50 м/с)

плоскости XZ при  $y = y_0 = 20$  км. Левый — без ветра, правый — с ветром (скорость ветра 50 м/с). Граница раздела упругой среды и атмосферы показана сплошной линией. Из рисунка видно, что в атмосфере и упругой среде, кроме преломлённых на границе конических продольной волны  $P$  и поперечной волны  $S$ , распространяется сферическая волна  $P^*$ , а далее следует поверхностная волна Стоунли.

На рис. 5 изображены сейсмограммы для горизонтальной  $u_x$  компоненты скорости смещений, регистрируемые в упругой среде в плоскости XZ на глубине  $\Delta z = 40$  м ( $1/20$  длины  $P$ -волны) с шагом  $\Delta x = 1$  км. Координата 1-й трассы  $x_1 = 8$  км. Слева — без ветра, справа — скорость ветра в атмосфере 50 м/с.

Из рис. 4 и 5 видно, что при наличии ветра в атмосфере скорость и амплитуда сферической волны в атмосфере и поверхностной волны Стоунли зависит от направления распространения этих волн относительно направленности вектора скорости ветра.

В ходе анализа полученных численных результатов моделирования были выявлены новые особенности распространения волн при наличии ветра в атмосфере. Так, например, был установлен факт влияния ветра на скорость распространения поверхностных волн Стоунли в упругой среде. На основе численных результатов было установлено, что скорость этих волн увеличивается в направлении ветра и соответственно уменьшается при распространении против ветра на величину, равную скорости ветра. Такое же влияние ветер оказывает и на нелучевую сферическую акусто-гравитационную обменную волну, распространяющуюся в атмосфере, в случае расположения источника в твердой среде. Следующий установленный факт влияния ветра — это изменение амплитуды поверхностной волны по её фронту. Это выражается в увеличении амплитуды в той части фронта волны, которая распространяется по ветру, и уменьшении амплитуды в части фронта волны, распространяющейся против ветра, но с сохранением суммарной энергии волны.

## 6. Заключение

Предлагаемый подход к постановке и решению рассмотренной задачи позволяет моделировать эффекты распространения волнового поля для единой математической модели среды “Земля–Атмосфера” и исследовать процессы возникновения обменных волн на их границе. Численное моделирование таких процессов позволяет также исследовать особенности влияния ветра на распространение акусто-гравитационных волн в атмосфере и поверхностных волн Стоунли.

## Литература

1. **Алексеев А.С., Глинский Б.М., Дряхлов С.И. и др.** Эффект акустосейсмической индукции при вибросейсмическом зондировании // Доклады РАН. — 1996. — Т. 346, № 5. — С. 664–667.
2. **Гасилова Л.А., Петухов Ю.В.** К теории поверхностных волн, распространяющихся вдоль разных границ раздела в атмосфере // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 14–23.
3. **Разин А.В.** Распространение сферического акустического дельта-импульса вдоль границы газ–твёрдое тело // Изв. РАН. Физика Земли. — 1993. — № 2. — С. 73–77.
4. **Михайленко Б.Г., Решетова Г.В.** Математическое моделирование распространения сейсмических и акустогравитационных волн для неоднородной модели Земля–Атмосфера // Геология и геофизика. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 547–556.
5. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. — 1999. — № 12. — P. 105–110.
6. **Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., and Mikhailov A.A.** Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. of Computational Acoustics. — 2001. — Vol. 9, № 4. — P. 1523–1541.
7. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., and Reshetova G.V.** Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // J. Pure and Applied Geophysics. — 2003. — № 160. — P. 1207–1224.
8. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., and Reshetova G.V.** Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. — 2003. — № 51. — P. 37–48.
9. **Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.** Использование спектрального метода Лагерра для решения линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2008. — Т. 11, № 2(35). — С. 86–95.
10. **Михайлов А.А.** Моделирование сейсмических полей для 2.5D неоднородных вязкоупругих сред // Тр. Междунар. конф. “Математические методы в геофизике”. — Новосибирск. — 2003. — Часть 1. — С. 146–152.
11. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974.
12. **Virieux J.** *P*-, *SV*-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. — 1986. — № 51. — P. 889–901.
13. **Saad Y., Van der Vorst H.A.** Iterative solution of linear systems in the 20th century // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — № 123. — P. 1–33.
14. **Sonneveld P.** CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear system // SIAM J. of Scientific and Statistical Computing. — 1989. — № 10. — P. 36–52.
15. **Михайленко Б.Г., Михайлов А.А.** Численное решение 2.5D динамической задачи сейсмике с использованием алгоритмов распараллеливания // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ’2012): Тр. Междунар. научн. конф. (Новосибирск, 26–30 марта 2012 г.). — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. — 2012. — С. 612–620.

Поступила в редакцию 24 октября 2013 г.,  
в окончательном варианте 13 ноября 2013 г.