



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ПОРОД ВОКРУГ КРУГОВОЙ ВЫРАБОТКИ
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УСТАНОВКИ ЖЕСТКИХ АНКЕРОВ КОНТАКТНОГО ТИПА**

А. С. Саммаль¹, В. К. Нгуен¹, Т. М. Чан²

¹Тульский государственный университет, E-mail: assammal@mail.ru, nguyenvancong.vimsat@gmail.com,
просп. Ленина 92, г. Тула 300012, Россия

²Ханойский горно-геологический университет, E-mail: tuanminhhung@yahoo.com,
ул. Вьен 18, Дыктханг, Бактыльем, г. Ханой 100000, Вьетнам

Представлен аналитический метод определения напряженного состояния горного массива в окрестности круговой выработки с учетом влияния установки анкеров контактного типа большой жесткости. В основу метода положено решение плоской задачи теории упругости о равновесии весомой изотропной среды с круговым отверстием, вокруг которого имеется некоторая область, армированная произвольным числом радиально установленных стержней большой жесткости. Приведены примеры расчета, иллюстрирующие возможности метода. С целью сравнения рассматриваются соответствующие результаты компьютерного моделирования с использованием метода конечных элементов.

Горная выработка, анкер контактного типа, аналитический метод, расчет, напряженное состояние, компьютерное моделирование

**MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF STRESS STATE OF THE ROCK MASS
AROUND A CIRCULAR OPENING WITH REGARD TO CONTACT RIGID ANCHORS**

A. S. Sammal¹, V. K. Nguen,¹ and T. M. Chan²

¹Tula State University, E-mail: assammal@mail.ru, nguyenvancong.vimsat@gmail.com,
pr. Lenina 92, Tula 300012, Russia

²Hanoi University of Mining and Geology, E-mail: tuanminhhung@yahoo.com,
ul. Vien 18, Duchthang, Bactuliem, Hanoi 100000, Vietnam

An analytical method is presented for determining the stress state of a rock mass in the vicinity of a circular opening, taking into account the influence of contact anchors with high rigidity. The method is based on the solution of a plane problem from the elasticity theory about the equilibrium of a weighty isotropic medium with a circular hole, around which there is a certain region reinforced with an arbitrary number of radially installed rods with high rigidity. The calculation examples illustrating the possibilities of the method are presented. For the purpose of comparison, the corresponding results of computer modeling using the finite element method are considered.

Opening, contact anchor support, analytical method, designing, stress state, computer modeling

В настоящее время основным видом крепления горных выработок в условиях глубоких шахт Вьетнама является рамная металлическая крепь. При этом рост стоимости металла оказывает негативное влияние на экономические показатели добычи угля. Это приводит к необходимости отказа от традиционных инженерных решений, связанных с креплением горных выработок и переходу к более прогрессивным технологиям, основанным на применении анкеров.

Достоинством анкерной крепи является высокая эффективность, достигаемая за счет максимального использования несущей способности самого горного массива, которая может существенным образом увеличиваться в результате армирования окружающих выработку пород жесткими анкерными стержнями, обеспечивающими повышение сплошности, однородности, и как следствие, механических и деформационных характеристик массива.

Следует отметить, что широкое внедрение анкерной крепи в угольных шахтах Вьетнама сдерживается сложными горно-геологическими условиями, характеризующимися практически повсеместным расположением в кровле обрабатываемых угольных пластов весьма слабых и неустойчивых пластов пород, представленных, в основном, алевролитами и аргиллитами. Качество массивов угля и аргиллитов на обрабатываемых месторождениях, обычно оцениваемое по методу RQD (Rock Quality Designation [1]), определяется параметром $RQD = 0$.

Методика проектирования анкерной крепи, используемая во Вьетнаме, в целом согласуется с применяемой в Российской Федерации [2]. При этом применяемая методика обладает рядом недостатков, среди которых следует отметить невозможность учета основных характеристик полей начальных напряжений в массиве пород, таких как коэффициент бокового давления пород, а также угол наклона главных напряжений вследствие тектонических проявлений. Кроме этого, расчет параметров анкеров базируется на предположении об одинаковом их нагружении независимо от места установки, что является существенным упрощением и, как правило, ведет к перерасходу материалов. Таким образом, совершенствование методов расчета анкерной крепи контактного типа применительно к условиям глубоких угольных шахт с целью расширения области применения этого вида крепления является актуальной научной задачей, решение которой имеет важное значение для угольной промышленности Вьетнама.

Цель данного исследования — разработка нового аналитического метода оценки напряженного состояния пород вокруг горной выработки с учетом влияния установки жестких анкеров контактного типа и изучение закономерностей формирования напряжений в массиве при различных сочетаниях основных влияющих факторов на основе анализа компьютерного моделирования различных геомеханических ситуаций с использованием разработанной авторами компьютерной программы.

Постановка и решение задачи. Предлагаемый подход к определению влияния установки жестких анкеров контактного типа на напряженное состояние и устойчивость горной выработки основан на аналитическом решении соответствующей плоской задачи геомеханики, расчетная схема которой приведена на рис. 1.

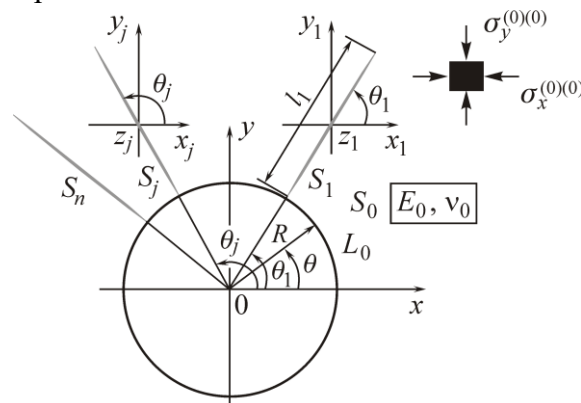


Рис. 1. Расчетная схема

Здесь весома isotропная линейно-деформируемая бесконечная среда S_0 , деформационные свойства которой характеризуются среднестатистическими значениями модуля деформации E_0 и коэффициента Пуассона ν_0 , моделирует горный массив. Среда ослаблена круговым отверстием L_0 радиусом R , моделирующим горную выработку. Анкера моделируются жесткими прямолинейными включениями S_j ($j = 1, \dots, n$, n — число анкеров) в среде S_0 вне отверстия. Все рассматриваемые включения (анкера) ориентированы по нормали к контуру отверстия.

С целью удобства решения задачи начало координат помещается в центр отверстия. При этом положения центров рассматриваемых включений S_j ($j = 1, \dots, n$) располагаются в точках $z_j = x_j + iy_j$, а их продольные оси составляют углы θ_j ($j = 1, \dots, n$) с действительной осью x .

Действие собственного веса пород моделируется заданием в моделирующей горный массив среде S_0 неравнокомпонентного поля начальных напряжений:

$$\sigma_x^{(0)(0)} = -\lambda\gamma H\alpha^*, \quad \sigma_y^{(0)(0)} = -\gamma H\alpha^*, \quad (1)$$

где H — глубина заложения выработки; γ — удельный вес пород; λ — коэффициент бокового давления пород в ненарушенном массиве; α^* — корректирующий множитель, введенный для учета пространственного характера нагружения анкеров и других несовершенств расчетной схемы [3].

Полные напряжения в среде S_0 (горном массиве) представляются в виде сумм начальных напряжений (1) и дополнительных напряжений, обусловленных образованием выработки:

$$\tilde{\sigma} = \sigma^{(0)} + \sigma^{(0)(0)}. \quad (2)$$

Здесь символом σ обозначены все компоненты тензора напряжений.

Смещения рассматриваются только дополнительные, т. е. начальные смещения, реализовавшиеся в массиве до сооружения выработки, из рассмотрения исключаются.

Граничные условия, отражающие отсутствие внешних сил на контуре L_0 отверстия (выработки), записываются в виде

$$\tilde{\sigma}_r = 0, \quad \tilde{\tau}_{r\theta} = 0. \quad (3)$$

Принимая во внимание, что рассматриваемые анкера контактного типа обладают большой жесткостью, на контурах L_j ($j = 1, \dots, n$) включений принимаются условия отсутствия дополнительных смещений, т. е.

$$u^{(j)} = 0, \quad (4)$$

где $u^{(j)} = u_x^{(j)} + iu_y^{(j)}$ — вектор смещений соответствующей точки j -го контура (i — мнимая единица).

Решение поставленной задачи получено с применением теории аналитических функций комплексного переменного, аппарата конформных отображений, свойств комплексных рядов Лорана и Фабера, а также интегралов типа Коши [4]. С этой целью вводятся комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$ (здесь $z = x + iy$ — аффикс рассматриваемой точки), определяющие напряженно-деформированное состояние бесконечной изотропной среды с круговым отверстием и конечным числом жестких включений.

Граничные условия (3) после перехода к рассмотрению дополнительных напряжений принимают вид

$$\varphi(t_0) + t_0 \overline{\varphi'(t_0)} + \overline{\psi(t_0)} = i \int_{L_0} (X_n^{(0)(0)} + iY_n^{(0)(0)}) ds, \quad (5)$$

где $t_0 = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R\sigma$ — точка кругового контура L_0 ; $X_n^{(0)(0)}$, $Y_n^{(0)(0)}$ — усилия, обусловленные действием начальных напряжений на элемент ds контура L_0 .

В свою очередь, условия (4) записываются в форме ($j = 1, \dots, n$):

$$\varkappa \varphi(t_j) - t_j \overline{\varphi'(t_j)} - \overline{\psi(t_j)} = 0. \quad (6)$$

здесь использовано обозначение $\varkappa = 3 - 4\nu_0$, принятое в работе [4].

Таким образом, поставленная задача теории упругости сводится к краевой задаче теории аналитических функций комплексного переменного, связанной с определением искомым потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ из выражений (5)–(6).

Введенные комплексные потенциалы представляются следующим образом:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{j=1}^n \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \sum_{j=1}^n \psi_j(z), \quad (7)$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, регулярные вне кругового отверстия (контур L_0) и исчезающие на бесконечности; $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ — функции, регулярные вне соответствующих контуров L_j ($j = 1, \dots, n$).

Функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, следуя работе [4], определяются в виде рядов

$$\varphi_0(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}^{(1)(0)} z^{-\nu}, \quad \psi_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(2)(0)} z^{-\nu}, \quad (8)$$

где $c_{\nu}^{(k)}$ ($k = 1, 2; \nu = 1, \dots, \infty$) коэффициенты, подлежащие определению в процессе решения задачи.

Далее вводятся в рассмотрение рациональные функции ($j = 1, \dots, n$)

$$z = \Omega_j(\zeta_j) = z_j + \omega_j(\zeta_j), \quad (9)$$

с помощью которых производится отображение внешностей единичных окружностей на внешности включений L_j , центры которых расположены в точках z_j [5]. При этом функции $\omega_j(\zeta_j)$, представляемые в виде

$$\omega_j(\zeta_j) = r_j \left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right) e^{i\theta_j}, \quad (10)$$

осуществляют отображение внешностей единичных окружностей на внешности эллипсов S_j ($j = 1, \dots, n$), геометрические параметры которых $r_j = (a_j + b_j)/2R_0$, $m_j = (a_j - b_j)/(a_j + b_j)$ определяются размерами полуосей a_j и b_j , причем большие полуоси a_j составляют углы θ_j с направлением действительной оси Ox . Несложно заметить, что при выполнении условия $a_j \gg b_j$ имеет место $m_j \rightarrow 1$, и соответствующий j -й эллипс принимает форму, близкую к отрезку прямой (прямолинейному стрингеру), как показано на рис. 1.

Далее, следуя работе [5] функции $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ представляются в виде рядов

$$\varphi_j(z) = \varphi_j[\Omega_j(\zeta_j)] = \varphi_j(\zeta_j) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}^{(1)(j)} \zeta_j^{-\nu}, \quad \psi_j(z) = \psi_j(\zeta_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(2)(j)} \zeta_j^{-\nu}, \quad (11)$$

где коэффициенты $c_{\nu}^{(k)(j)}$ ($k = 1, 2; j = 1, \dots, n; \nu = 1, \dots, \infty$) также подлежат определению.

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению $n + 1$ пар комплексных потенциалов, имеющих представления (8)–(11), в результате их подстановки в условия (5) и (6).

С целью упрощения математических преобразований решение описанной задачи построено в виде итерационного процесса, в каждом приближении которого рассматривается круговое отверстие в бесконечной весоной среде, а учет влияния жестких включений осуществляется путем введения дополнительных функций, представляемых в виде комплексных рядов, коэффициенты разложений которых на начальном этапе вычислений обнуляются, а затем уточняются на основе предыдущих итераций по результатам проверки граничных условий (5) и (6). При этом, когда найденные в соответствующих точках контуров отверстия L_0 и включений L_j ($j = 1, \dots, n$) напряжения и смещения в двух смежных итерациях будут совпадать (с заданной точностью), расчет завершается.

Полученное решение, представленное в виде полного алгоритма расчета, реализовано в виде компьютерной программы, на основе которых разработан метод определения напряженного состояния массива пород в окрестности круговой выработки с учетом влияния жестких анкеров контактного типа.

Отметим, что положив $m_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$) в формуле (10), мы приходим к частному случаю, когда рассматриваемые жесткие включения в окрестности выработки имеют круговую форму. Эта задача является более простой, и может быть решена на основе применения изложенной в работе [3] методики расчета обделок произвольного числа произвольным образом расположен-

ных круговых тоннелей, если принять в моделирующих включения обделках большие значения толщины и модуля деформации. Выполненное сравнение результатов, получаемых в соответствии с предлагаемым методом и с использованием описанного ранее приема, связанного с адаптацией методики [3], показало практически полное их совпадение.

Примеры расчета. В качестве иллюстрации возможности применения предлагаемого метода в практических целях приводятся результаты расчета конкретных примеров. На первом этапе рассматривается простейший случай моделирования влияния одного анкера, установленного вертикально (вдоль оси Oy), на напряженное состояние массива вокруг круговой выработки в предположении однородного поля начальных напряжений в массиве, т. е. при $\sigma_x^{(0)(0)} = \sigma_y^{(0)(0)}$. Расчетная схема и исходные данные для расчета показаны на рис. 2а. На рис. 2б приведено распределение расчетных нормальных тангенциальных напряжений на контуре выработки (в силу симметрии рассмотрена правая половина сечения). Здесь же для сравнения пунктирной линией показана соответствующая эпюра напряжений (значения в скобках), полученная без учета влияния анкера.

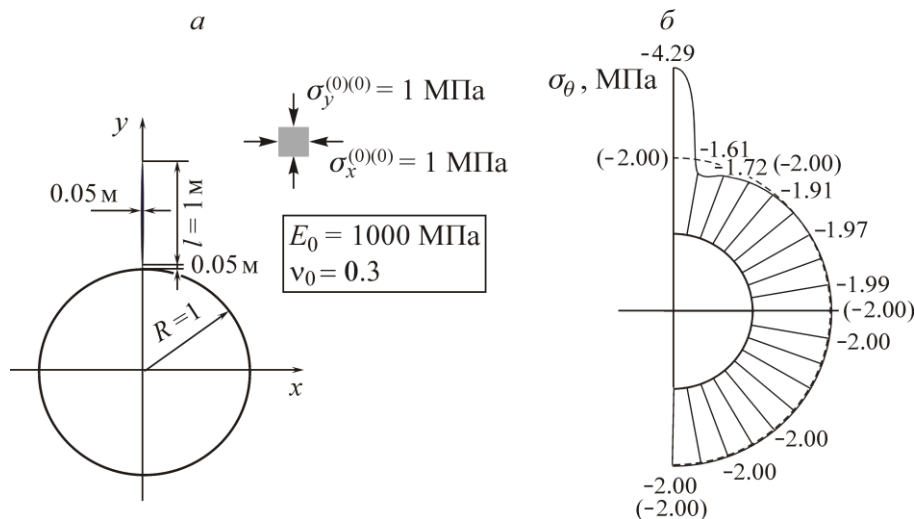


Рис. 2. Расчетная схема (а) и эпюры нормальных тангенциальных напряжений на контуре выработки (б)

Как следует из представленных рис. 2б результатов расчета, жесткий анкер, препятствуя смещениям контура выработки, создает значительную локальную концентрацию сжимающих напряжений в массиве. Можно также отметить разгружающий эффект анкера, который наблюдается в прилегающей к анкеру зоне пород. В целом влияние анкера распространяется на небольшую часть поверхности выработки, и с удалением оно довольно быстро затухает. В связи с этим, как показывает расчет, применение одиночных анкеров является малоэффективным. В то же время применение излишне густой сетки установки анкеров может также оказаться не удачным инженерным решением.

Показанная на рис. 2 расчетная схема реализована с помощью метода конечных элементов на основе использования компьютерной программы PHASE2, которая широко применяется во Вьетнаме при расчете и проектировании крепи горных выработок. Компьютерная модель и результаты моделирования приведены на рис. 3 (в силу осесимметричного нагружения модели направление анкера не имеет значения). Большая жесткость анкера моделировалась заданием соответствующих деформационных характеристик его материала $E_a = 100E_0$, $\nu_a = \nu_0 = 0.3$.

Конечно-элементное моделирование с применением программы PHASE2 в рассмотренном примере показывает, что какое-либо заметное влияние анкера на напряженное состояние пород в окрестности выработки отсутствует. Этот вывод не согласуется со сделанным ранее на основе

анализа данных, полученных с применением аналитического метода расчета, и является трудно объяснимым. В целом можно отметить, что конечно-элементный пакет программ PHASE2 не подходит для моделирования напряженного состояния пород в окрестности выработки с учетом влияния жестких анкеров контактного типа.

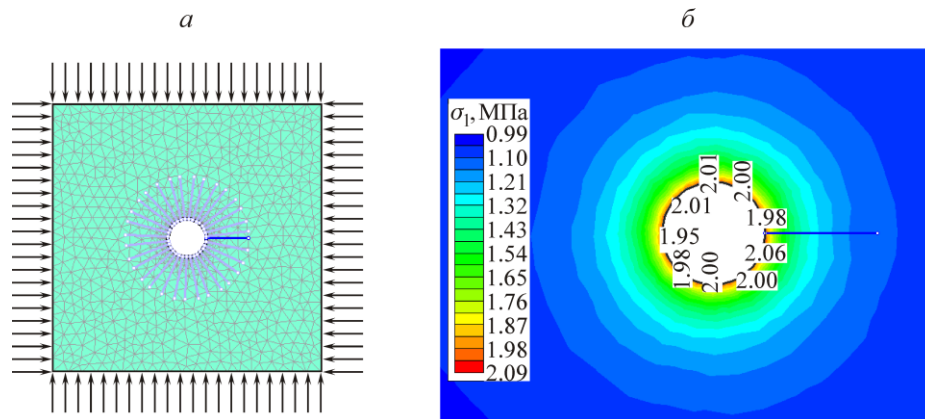


Рис. 3. Расчетная конечно-элементная модель (а) и результаты компьютерного моделирования (б)

ВЫВОДЫ

Предлагаемый аналитический метод расчета позволяет рассматривать произвольное количество анкеров в массивах, в том числе при действии неравнокомпонентного поля начальных напряжений. При этом в процессе расчета учитывается взаимное влияние устанавливаемых анкеров на напряжения и смещения пород. Метод расчета может применяться как самостоятельно при решении различных инженерных задач подземного строительства, так и с целью тестирования конечно-элементных моделей и программ, используемых при проектировании жестких анкеров контактного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Nghiên cứu xây dựng bộ tiêu chuẩn thiết kế và chế tạo cấu kiện neo cho các công ty sản xuất cơ khí thuộc TKV, Báo cáo nghiên cứu khoa học, Viện Khoa học Công nghệ mỏ, Hà Nội, năm 2018 – 104 trang. [Исследование и разработка набора стандартов для проектирования и производства анкерных конструкций для предприятий механического производства в рамках TKV // Отчет о научных исследованиях, Институт горных наук и технологий. — Ханой, 2018. — 104 с.]**
2. **Guidelines for the design of underground mine workings and calculation of the support, VNIMI, VNIIOMShS of the USSR Ministry of Coal Industry, Moscow, Stroyizdat, 1983, 273 pp. [Руководство по проектированию подземных горных выработок и расчету крепи / ВНИМИ, ВНИИОМШС Минуглепрома СССР. — М.: Стройиздат, 1983. — 273 с.]**
3. **Fotieva N. N. Designing the support for underground structures in seismically active areas, Moscow, Nedra, 1980, 219 pp. [Фотиева Н. Н. Расчет крепи подземных сооружений в сейсмически активных районах. — М.: Недра, 1980. — 219 с.]**
4. **Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. [Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.]**
5. **Antsiferov S. V., Deev P. V., and Sammal A. S. Calculation and design of tunnels built in areas with high seismicity, Tula, Publishing house of Tula State University, 2019, 217 pp. [Анциферов С. В., Деев П. В., Саммалья А. С. Расчет и проектирование тоннелей, сооружаемых в районах с повышенной сейсмичностью. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. — 217 с.]**