УДК 519.676

Об одном методе моделирования неоднородного пуассоновского точечного процесса*

Т.А. Аверина

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mail: ata@osmf.sscc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 15, 2022.

Аверина Т.А. Об одном методе моделирования неоднородного пуассоновского точечного процесса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.—Новосибирск, 2022.—Т. 25, № 1.—С. 1–17.

При статистическом решении задач анализа, синтеза и фильтрации для систем диффузионно-скачкообразного типа требуется моделирование неоднородного пуассоновского точечного процесса. Для моделирования последнего иногда используется алгоритм, основанный на свойстве ординарности процесса. В статье построена модификация этого алгоритма, использующая экономичный способ моделирования случайных величин. Проведена проверка статистической адекватности разработанного метода с помощью решения тестовых задач.

DOI: 10.15372/SJNM20220101

Ключевые слова: *неоднородный пуассоновский точечный процесс, стохастические дифференциальные уравнения, методы Монте-Карло.*

Averina T.A. On one method for modeling an nonhomogeneous Poisson point process // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2022.—Vol. 25, № 1.—P. 1–17.

In the statistical solution to problems of analysis, synthesis and filtration for systems of the diffusion-discontinuous type, it is required to simulate an inhomogeneous Poisson point process. To simulate the latter, an algorithm is sometimes used based on the property of the ordinariness of the process. In this paper, a modification of this algorithm is constructed using an efficient method for modeling random variables. The statistical adequacy of the method developed was checked by solving test problems.

Keywords: *nonhomogeneous Poisson point process, stochastic differential equations, Monte Carlo methods.*

1. Введение

В работе [1] была рассмотрена задача фильтрации случайных процессов в динамических системах, математическая модель которых описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей:

*Работа поддержана базовым проектом № 0251-2021-0002.

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t) + \int_\Theta v\big(t, X(t^-), \theta\big)\nu\,(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

где $X \in R^{n_x}$ — n_x-мерный вектор состояния, $t \in [0, T]$, T — заданный отрезок времени функционирования системы; f, v — n_x-мерные вектор-функции, $\sigma(t, x)$ — матричная функция размера $n_x \times n_w$; $W(t)$ — n_w-мерный стандартный винеровский случайный процесс, ν — пуассоновская случайная мера на $R_+ \times \Theta$ с характеристической мерой Π_ν, заданной функцией $\pi(t, \theta)\colon [0, T] \times \Theta \to R_+$. Закон распределения начального вектора состояния X_0 задан. Начальный вектор состояния X_0, винеровский процесс $W(t)$ и пуассоновская мера ν независимы.

Решение задачи фильтрации предполагает моделирование траекторий решения стохастического дифференциального уравнения вида (1). Процедура моделирования траекторий включает моделирование неоднородного пуассоновского точечного процесса.

В уравнении (1) рассматривается неоднородная пуассоновская мера ν, заданная на $U = [0, T] \times \Theta$, и для произвольной области $\tilde{U} = [t_1, t_2] \times B \subset U$ имеет распределение Пуассона:

$$P\big(\nu(\bar{U}) = k\big) = e^{-\Lambda(\bar{U})}\frac{\Lambda^k(\bar{U})}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (2)$$

$$\mathrm{E}\nu(\tilde{U}) = \Lambda(\tilde{U}) = \int_{t_1}^{t_2}\int_B \pi(t, \theta)\, d\theta\, dt < \infty, \quad (3)$$

где функция $\pi(t, \theta) \geqslant 0$ называется интенсивностью, $\Lambda(\tilde{U})$ — мерой интенсивности, а E обозначает математическое ожидание. Если $\tilde{U_1}$, $\tilde{U_2}$ не пересекаются, то $\nu(\tilde{U_1})$, $\nu(\tilde{U_2})$ независимы. Для любого множества $\tilde{U} \subset U$ пуассоновская мера $\nu(\tilde{U})$ означает количество элементов в множестве $\tilde{U}$.

В общем случае пуассоновская случайная мера задана на произвольном измеримом пространстве и полностью определяется мерой интенсивности. В нашем случае пуассоновская мера определяется характеристической мерой

$$\Pi_\nu(t, B) = \int_B \pi(t, \theta)\, d\theta.$$

Пуассоновскую случайную меру $\nu([0, t] \times \Theta)$ как функцию времени можно рассматривать как неоднородный пуассоновский процесс интенсивности

$$\lambda(t) = \Pi_\nu(t, \Theta) = \int_\Theta \pi(t, \theta)\, d\theta. \quad (4)$$

Ансамбль точек, заданных пуассоновской мерой ν, в области $U = [0, T] \times \Theta$ распределен с плотностью

$$p(t, \theta) = \frac{\pi(t, \theta)}{\Lambda(U)} = \frac{\pi(t, \theta)}{\int_0^T \int_\Theta \pi(t, \theta)\, d\theta\, dt} = p(t)\psi(\theta|t).$$

Временные значения этих точек являются моментами разрыва решения СДУ (1), образуют пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$ и распределены с плотностью

$$p(t) = \frac{\lambda(t)}{\int_0^T \lambda(t)\, dt} = \frac{\int_\Theta \pi(t, \theta)\, d\theta}{\int_0^T \int_\Theta \pi(t, \theta)\, d\theta\, dt}.$$

Величина скачка θ в момент времени t распределена с плотностью

$$\psi(\theta|t) = \frac{\pi(t,\theta)}{\int_\Theta \pi(t,\theta)\,d\theta} = \frac{\pi(t,\theta)}{\lambda(t)}, \tag{5}$$

то есть

$$\pi(t,\theta) = \lambda(t)\psi(\theta|t). \tag{6}$$

В общем случае пуассоновская мера может зависеть от вектора состояния [2].

Обозначим $\tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{l_T} < T$ моменты скачков в порядке возрастания, где

$$l_T = \max\{l \in N\colon \tau_l < T\},$$

а $\theta_l \in \Theta$, $l = 1, 2, \ldots, l_T$, для которых $\nu(\{\tau_l\} \times \{\theta_l\}) = 1$. Тогда на любом полуинтервале $[\tau_{l-1}, \tau_l)$ уравнение (1) эквивалентно

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(\tau_{l-1}) + \int_{\tau_{l-1}}^{t} f\big(\tau, \bar{X}(\tau)\big)\,d\tau + \int_{\tau_{l-1}}^{t} \sigma\big(\tau, \bar{X}(\tau)\big)\,dW(\tau), \tag{7}$$

причем решение $X(t)$ уравнения (1) определяется как

$$X(t) = \begin{cases} \bar{X}(t) & \text{при } t \in [\tau_{l-1}, \tau_l), \\ \bar{X}(t) + v(\tau_l, \bar{X}(\tau_l^-), \theta_l) & \text{при } t = \tau_l. \end{cases}$$

Если обозначить через $\bar{X}_{k+1}$ численное решение в точке t_{k+1}, полученное методом решения СДУ, содержащего только винеровскую составляющую, где $h_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ — шаг интегрирования в узле t_{k+1}, то решение задачи (1) запишется следующим образом:

$$X_{k+1} == \begin{cases} \bar{X}_{k+1}, & \text{если } t_{k+1} \quad \text{— не момент скачка}, \\ \bar{X}_{k+1} + v(\tau_l, \bar{X}_{k+1}, \theta_l), & \text{если } t_{k+1} = \tau_l \text{ — момент скачка}. \end{cases}$$

Неоднородный пуассоновский процесс $P(t)$ интенсивности $\lambda(t, x)$ обладает следующим свойством ординарности:

$$\mathrm{P}\big(P(t+h) - P(t) = 1 \,|\, X(t) = x\big) = \lambda(t, x)h + o(h), \quad h \to 0.$$

В работе [1] для решения задачи фильтрации использовались три алгоритма, которые отличались методом моделирования неоднородного пуассоновского потока, задающего моменты разрыва траекторий, а именно: 1) метод максимального сечения, 2) модифицированный метод максимального сечения и 3) метод на основе свойства ординарности.

Метод на основе свойства ординарности состоит в следующем. В каждом узле равномерной сетки t_k ($h_k = h$) проверяется вероятностное условие разрыва траектории. Узел t_k является моментом разрыва, если

$$\alpha_k \leqslant \lambda(t_k, X_k)h, \tag{8}$$

где α_k — случайная величина, имеющая равномерное распределение в интервале $(0, 1)$.

Замечание 1. Отметим, что в результате проверки условия (8) фактически моделируется бернуллиевская случайная величина со значениями $v_1 = 1$ (означающим, что условие (8) выполнено) и $v_2 = 0$ (означающим, что условие (8) не выполнено).

Проведенные в работе [1] сравнительные расчеты трех алгоритмов показали, что использование метода на основе свойства ординарности увеличивает время решения задачи оптимальной фильтрации из-за большого количества вызовов генератора псевдослучайных чисел. Если временная сетка состоит из N_h узлов и для получения приближенной оптимальной оценки вектора состояния объекта наблюдения требуется моделирование N_{tr} траекторий, то для проверки неравенства (8) требуется моделирование $N_\alpha = N_h N_{\text{tr}}$ независимых равномерных случайных чисел.

Представим S_{prog} — время работы программы, использующей формулу (8) для моделирования пуассоновского точечного процесса, как

$$S_{\text{prog}} = S_\alpha + S, \tag{9}$$

где S_α — время, затрачиваемое на проверку условия (8), и S — время, затрачиваемое на все остальные вычисления. Очевидно, что S_α пропорционально $t_\alpha N_\alpha$, где t_α — время вычисления равномерного псевдослучайного числа, N_α — число вызовов генератора для проверки неравенства (8). Заметим, что в S также может входить вызов генератора, но для других целей.

Если вычислять α_k с затратами меньшими, чем вызов генератора, или уменьшить число вызовов генератора N_α, то можно уменьшить трудоемкость алгоритма (а значит, и время счета). Это уменьшение будет тем значительнее, чем больше доля первого слагаемого в S_{prog}. Возможно максимальное уменьшение времени счета в k раз, где

$$k = \frac{S_{\text{prog}}}{S}. \tag{10}$$

В данной работе рассмотрена экономичная модификация метода моделирования пуассоновского точечного процесса (8), позволяющая уменьшить трудоемкость вычислений α_k в результате уменьшения числа вызовов генератора псевдослучайных чисел. Проведена проверка статистической адекватности модифицированного метода с помощью решения тестовых задач.

2. Специальный способ моделирования независимых случайных величин

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает два значения v_1 и v_2 и имеет распределение с параметром q:

$$P(\xi = v_1) = q, \quad P(\xi = v_2) = 1 - q, \quad 0 < q < 1. \tag{11}$$

Обозначим реализацию этой случайной величины через $\eta^{(1)}$ и положим $q = p^{(1)}$. Тогда случайную величину ξ можно моделировать с помощью [3, алгоритм 1.3]:

$$\eta^{(1)} = v_j, \quad \text{если} \quad \beta^{(1)} \in \Delta_j^{(1)}, \quad j = 1, 2,$$

где $\beta^{(1)} = \alpha$ — равномерно распределенная случайная величина в интервале $(0, 1)$; $\Delta_1^{(1)} = (0, p^{(1)})$, $\Delta_2^{(1)} = (p^{(1)}, 1)$.

Замечание 2. При $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ случайная величина $\eta^{(1)}$ равна номеру интервала, в который попало $\beta^{(1)}$. При $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ случайная величина $\eta^{(1)}$ имеет распределение Бернулли с параметром $p^{(1)}$ и ее можно рассматривать как индикатор принадлежности $\beta^{(1)}$ интервалу $\Delta_1^{(1)}$.

В работе [4] предложен экономичный способ моделирования случайных величин, плотности распределения которых представляют собой взвешенные суммы (смеси) эффективно моделируемых плотностей. Для моделирования таких величин предложено использовать модифицированный метод суперпозиции, который использует "двухэтапное" моделирование по одному и тому же значению случайного числа.

В работе [5] эта методика формулируется и обосновывается в многоэтапном варианте и может быть применена для моделирования неоднородных пуассоновских точечных процессов с использованием последовательности "исключений" по одному случайному числу.

Теорема [5]. *Пусть задан набор* $\{p^{(i)}\}$, $p^{(i)} \in (0,1)$, *и построены последовательности случайных величин* $\{\beta^{(i)}\}$:

$$\beta^{(1)} = \alpha, \quad \beta^{(i+1)} = \begin{cases} \dfrac{\beta^{(i)}}{p^{(i)}}, & \text{если} \quad \beta^{(i)} \in \Delta_1^{(i)} = (0, p^{(i)}), \\ \dfrac{\beta^{(i)} - p^{(i)}}{1 - p^{(i)}}, & \text{если} \quad \beta^{(i)} \in \Delta_2^{(i)} = (p^{(i)}, 1), \end{cases} \tag{12}$$

и $\{\eta^{(i)}\}$:

$$\eta^{(i)} = v_j, \quad \text{если} \quad \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, 2,$$

где α *— равномерно распределенная случайная величина в интервале* $(0,1)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любого натурального* k *верно следующее*:

1. *Случайные величины* $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(k+1)}$ *являются равномерно распределенными в интервале* $(0,1)$;
2. *Случайные величины* $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(k)}$ *имеют распределение* (11) *с параметрами* $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}$ *соответственно*;
3. *Случайные величины* $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(k)}$, $\beta^{(k+1)}$ *являются независимыми.*

При применения теоремы в случае (8) нужно положить:

$$\alpha_i = \beta^{(i)}, \qquad p^{(i)} = \lambda(t_i, X_i)h, \quad i = 1, \ldots, T/h. \tag{13}$$

Применяемая методика теоретически обоснована для случайных чисел. Для псевдослучайных чисел требуется проверка. Алгоритм, соответствующий теореме, следует координировать с точностью вычисления значений α, а именно, если длина l_k прообраза множества значений $\beta^{(k)}$ на множестве значений исходного числа α меньше некоторой заданной подходящей величины ϵ, то следует заменить $\beta^{(k)}$ на независимое значение α. Одним значением α можно пользоваться, пока

$$l_k = \prod_{i=1}^{k} \bar{p}_i \geq \epsilon, \qquad \bar{p}_i = \begin{cases} p^{(i)}, & \text{если} \quad \beta^{(i)} \in (0, p^{(i)}), \\ 1 - p^{(i)}, & \text{если} \quad \beta^{(i)} \in (p^{(i)}, 1). \end{cases} \tag{14}$$

При использовании для вычисления α метода вычетов [3] с числом двоичных разрядов, равным m, обычно рекомендуется значение $\epsilon = 2^{-m/2}$ [5].

Кроме уменьшения трудоемкости вычислений (которое может быть незначительным), уменьшение количества используемых значений α снижает конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [6]. Статистическое соответствие оценок с использованием теоремы и без нее может служить дополнительным критерием удовлетворительности используемого генератора псевдослучайных чисел.

3. Алгоритмы моделирования пуассоновского точечного процесса

Применим описанную выше методику для моделирования пуассоновского точечного процесса. Рассмотрим два алгоритма, которые состоят в использовании формулы (8):

1. **Алгоритм 1**: α_k моделируются на каждом шаге с помощью генератора псевдослучайных чисел;
2. **Алгоритм 2**: α_k моделируются согласно предложенной модификации (13), использующей формулу (12) из теоремы, а также условие (14).

Далее рассмотрим СДУ (1) только с пуассоновской составляющей, решением которого является пуассоновский точечный процесс.

Численный метод, использующий моделирование пуассоновского точечного процесса с помощью формулы (8), имеет первый порядок слабой сходимости. Обозначим $\hat{X}_t$ процесс, полученный по значениям X_k, и введем обозначения для функционалов от решения:

$$f(h) := f(\hat{X}_t), \quad J(h) := \mathrm{E}f(h), \quad J := \mathrm{E}f(X_t).$$

Для оценки некоторого функционала от решения системы (1) моделируется N траекторий процесса, и величина $J(h)$ оценивается средним арифметическим полученных выборочных значений $f(h)$:

$$J_N(h) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(h), \quad \mathrm{E}J_N(h) = J(h).$$

Погрешность оценки $J_N(h)$ определяется величиной

$$|\mathrm{E}(J - J_N(h))| \le |J - J(h)| + \mathrm{E}|J(h) - J_N(h)| \le C_1 h + \frac{\sqrt{\mathrm{D}f(h)}}{\sqrt{N}}, \tag{15}$$

где D — дисперсия.

При уравнивании численной и статистической погрешностей получаем соотношение между шагом h и объемом выборки N:

$$N = O(h^{-2}).$$

При сравнительных расчетах, чтобы численная погрешность была меньше статистической, будем рассматривать

$$N \le h^{-2}.$$

В следующем пункте проведена проверка статистической адекватности предложенного метода с помощью решения тестовых задач.

4. Вычислительные эксперименты (генератор Rand128)

Методика, применяемая в алгоритме 2, теоретически обоснована для случайных чисел. Для псевдослучайных чисел, которые получаются с помощью конкретного генератора и используются при вычислениях, требуется проверка.

Так как в дальнейшем предполагается использовать предложенный алгоритм 2 для данных большого объема (длинный временной интервал, большой объем выборки) в параллельной реализации на суперкомпьютере, то целесообразно делать проверку алгоритма для случайных чисел, полученных с помощью "многоразрядного" генератора псевдослучайных чисел. Поэтому для моделирования равномерно распределенных случайных величин в интервале $(0, 1)$ использовался генератор псевдослучайных чисел Rand128 [7] (с модулем 2^{128} и множителем 5^{100109}). Расчеты проводились на PC с процессором Intel Core i5 3330 (3.00 ГГц).

Генератор Rand128 является мультипликативным с числом двоичных разрядов $m = 128$, поэтому для проверки применяемой методики можно использовать одно псевдослучайное число, пока выполнено условие (14), где $\epsilon = 2^{-64}$.

При моделировании пуассоновского точечного процесса алгоритмом 2 рассматривалось четыре варианта прекращения моделирования по одному случайному числу:

1) с помощью одного α моделируются 10 равномерно распределенных случайных величин в интервале $(0, 1)$ $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \dots, 10$, согласно (13), (12),
2) с помощью одного α моделируются 100 равномерно распределенных случайных величин в интервале $(0, 1)$ $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \dots, 100$, согласно (13), (12),
3) с помощью одного α, согласно (13), (12) и (14), моделируется последовательность $\{\alpha_i\}$, при $\epsilon = 2^{-30}$.
4) с помощью одного α, согласно (13), (12) и условию (14), моделируется последовательность $\{\alpha_i\}$ при $\epsilon = 2^{-64}$.

В алгоритме 2 для проверки неравенства (8) для каждой траектории в каждом узле временной сетки моделируются случайные величины β и η, согласно формулам (12). Если в формуле (13) вероятность "успеха" постоянна:

$$p^{(i)} = p = \text{const},$$

то равномерные случайные числа (12) имеют коэффициент корреляции

$$\rho_u = \frac{E((\alpha - E\alpha)(\beta - E\beta))}{\sqrt{E(\alpha - E\alpha)^2}\sqrt{E(\beta - E\beta)^2}} = 1 - 2p + 2p^2, \tag{16}$$

а соответствующие бернуллиевские случайные величины независимы и

$$\rho_b = 0, \quad E\eta = p, \quad D\eta = E(\eta - m)^2 = p. \tag{17}$$

Используем пример (16)–(17) для вычислительного эксперимента, чтобы показать, что при моделировании пуассоновского точечного процесса алгоритмом 2 при постоянной вероятности "успеха" p в формуле (13), получаются последовательность равномерных случайных величин $\{\alpha_i\}$ с коэффициентом корреляции (16) и соответствующая ей последовательность бернуллиевских случайных величин $\{\eta_i\}$ с нулевым коэффициентом корреляции (17).

Тест 1. Рассмотрим задачу (1) с параметрами:

$$\mu = 0, \quad \sigma = 0, \quad v = \theta, \quad \Theta = \{1\}, \quad X_0 = 0, \quad \lambda(t) \equiv \lambda = 10, \quad t \in [0, 1],$$

решением которой является простейший пуассоновский процесс $X(t)$ **с постоянной интенсивностью** λ, $EX(t) = DX(t) = \lambda(t) \equiv 10$.

Моделирование проводилось алгоритмом 2 на временном интервале $[0,1]$ с шагом $h = 0.001$ и числом траекторий: $N_{\text{tr}} = 10^3$, $N_{\text{tr}} = 10^4$, $N_{\text{tr}} = 10^5$. Для заданных параметров получаем:

$$p = 0.01, \quad \rho_u = 0.9802.$$

Оценки коэффициентов корреляции для разного объема выборки для четырех вариантов алгоритма 2 приведены в таблице 1 (для равномерной последовательности) и в табл. 2 (для бернуллиевской последовательности). В этих таблицах, а также в таблицах для последующих тестов, использованы обозначения:

- $\tilde{\rho}_i$ — оценка коэффициента корреляции для i-го варианта, $i = 1, 2, 3, 4$;
- $\tilde{m}$ — оценка математического ожидания;
- $\tilde{d}$ — оценка дисперсии;
- δ — абсолютная погрешность оценки математического ожидания;
- N_α — число вызовов генератора псевдослучайных чисел для проверки неравенства (8);
- N_S — число вызовов генератора псевдослучайных чисел, не связанных с проверкой неравенства (8);
- $t_{\text{сч}}$ — время счета в секундах.

Таблица 1. Оценки коэффициента корреляции для полученных равномерных случайных чисел (тест 1)

N_h	N_{tr}	ρ_u	$\tilde{\rho_1}$	$\tilde{\rho_2}$	$\tilde{\rho_3}$	$\tilde{\rho_4}$
10^3	10^3	0.9802	0.88278	0.97039	0.97785	0.97945
10^3	10^4		0.88228	0.97044	0.9778	0.9788
10^3	10^5		0.88226	0.97040	0.9777	0.9789

Таблица 2. Оценки коэффициента корреляции для полученных бернуллиевских случайных чисел (тест 1)

N_h	N_{tr}	ρ_b	$\tilde{\rho_1}$	$\tilde{\rho_2}$	$\tilde{\rho_3}$	$\tilde{\rho_4}$
10^3	10^3	0	0.00056	0.00030	-0.000589	0.000664
10^3	10^4		0.00017	$6 \cdot 10^{-7}$	-0.000475	- 0.000203
10^3	10^5		0.00005	0.00002	-0.00002	0.000153

Из таблицы 1 видно, что полученная последовательность равномерных случайных чисел в $(0,1)$ является зависимой. Чем больше длина моделируемой последовательности по одному случайному числу, тем ближе коэффициент корреляции к точному значению.

Из таблицы 2 видно, что полученная бернуллиевская последовательность является некоррелируемой.

Оценки вероятностных характеристик в момент времени $t = 1$, полученные алгоритмом 2 при моделирования бернуллиевских случайных величин и пуассоновского точечного процесса с постоянной интенсивностью (тест 1) приведены в табл. 3 и 4 соответственно.

В таблицах приводится величина доверительного интервала “одно σ”. Из таблиц видно, что полученные оценки совпадают в пределах статистической погрешности для всех 4-х вариантов алгоритма 2.

Таблица 3. Численные результаты для полученных бернуллиевских случайных чисел: оценки среднего и дисперсии, погрешность оценки среднего и доверительный интервал, число вызовов генератора Rand128 (тест 1)

Вариант	N_h	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α
1	10^3	10^3	0.009922	0.009024	0.000078 ± 0.000099	10^5
	10^3	10^4	0.010013	0.009913	0.000013 ± 0.000031	10^6
	10^3	10^5	0.009987	0.009888	0.000013 ± 0.000010	10^7
2	10^3	10^3	0.009851	0.009754	0.000151± 0.000099	10^4
	10^3	10^4	0.010012	0.009912	0.000012± 0.000031	10^5
	10^3	10^5	0.010003	0.009903	0.000003± 0.000010	10^6
3	10^3	10^3	0.009886	0.009788	0.000114± 0.000099	2475
	10^3	10^4	0.009975	0.009875	0.000025± 0.000031	24860
	10^3	10^5	0.010022	0.009922	0.000022± 0.000010	249596
4	10^3	10^3	0.010080	0.009976	0.000080± 0.000100	1217
	10^3	10^4	0.010047	0.009946	0.000047± 0.000032	12152
	10^3	10^5	0.010020	0.009920	0.000020± 0.000010	121235

Таблица 4. Вероятностные характеристики, полученные алгоритмом 2 при моделирования пуассоновского точечного процесса с постоянной интенсивностью (тест 1)

Вариант	N_h	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α
1	10^3	10^3	9.922	10.074	0.078± 0.1	10^5
	10^3	10^4	10.0133	9.854	0.013± 0.031	10^6
	10^3	10^5	9.98663	9.7802	0.013± 0.0099	10^7
2	10^3	10^3	9.851	9.735	0.149± 0.099	10^4
	10^3	10^4	10.012	9.960	0.012± 0.032	10^5
	10^3	10^5	10.003	9.894	0.0033± 0.0099	10^6
3	10^3	10^3	9.886	9.163	0.114± 0.096	2475
	10^3	10^4	9.975	9.856	0.025± 0.031	24860
	10^3	10^5	10.022	9.916	0.022± 0.010	249596
4	10^3	10^3	10.078	9.786	0.007± 0.019	1217
	10^3	10^4	10.047	10.044	0.047± 0.031	12152
	10^3	10^5	10.020	9.990	0.022± 0.010	121235

Приведенные оценки коэффициента корреляции (табл. 2), математического ожидания и дисперсии (табл. 3) подтверждают возможность применения предложенной методики для моделирования независимой бернуллиевской последовательности с помощью одного псевдослучайного числа, пока выполнено условие (14).

Из таблицы 4 видно, что полученные бернуллиевские последовательности позволяют моделировать пуассоновский поток, и результаты совпадают в пределах статистической погрешности для всех рассматриваемых четырех вариантов.

Далее проведем сравнительный анализ алгоритма 1 и его модификации при моделировании пуассоновского точечного потока **переменной интенсивности**. В качестве примера рассмотрим задачу (1) с параметрами:

$$\mu = 0, \quad \sigma = 0, \quad v = \theta, \quad \lambda(t) = 2\varrho t, \quad t \in [0,1], \tag{18}$$

то есть уравнение (1) имеет вид

$$dX(t) = \int_\Theta \theta\nu\,(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0$$

и точное решение

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \int_\Theta \theta\nu\,(dt \times d\theta), \quad X(0) = X_0.$$

Согласно свойствам пуассоновской меры, получаем следующие уравнения на первый и второй моменты решения:

$$\mathrm{E}X(t) = \mathrm{E}X(0) + \int_0^t \int_\Theta \theta\pi(t,\theta)\,d\theta\,dt, \quad \mathrm{E}X(0) = \mathrm{E}X_0, \quad \mathrm{E}X^2(0) = \mathrm{E}X_0^2,$$

$$\mathrm{E}X^2(t) = \mathrm{E}X^2(0) + 2\mathrm{E}X(0)\int_0^t \int_\Theta \theta\pi(t,\theta)\,d\theta\,dt + \int_0^t \int_\Theta \theta^2\pi(t,\theta)\,d\theta\,dt + \left(\int_0^t \int_\Theta \theta\pi(t,\theta)\,d\theta\,dt\right)^2.$$

Согласно равенству (6), получаем:

$$\mathrm{E}X(t) = \mathrm{E}X(0) + \int_0^t \lambda(t) \int_\Theta \theta\psi(\theta|t)\,d\theta\,dt, \qquad \mathrm{E}X(0) = \mathrm{E}X_0, \qquad \mathrm{E}X^2(0) = \mathrm{E}X_0^2,$$

$$\mathrm{E}X^2(t) = \mathrm{E}X^2(0) + 2\mathrm{E}X(0)\int_0^t \lambda(t) \int_\Theta \theta\psi(\theta|t)\,d\theta\,dt + \int_0^t \lambda(t) \int_\Theta \theta^2\psi(\theta|t)\,d\theta\,dt + \left(\int_0^t \lambda(t) \int_\Theta \theta\psi(\theta|t)\,d\theta\,dt\right)^2.$$

Тест 2. Рассмотрим задачу (1), (18) и зададим

$$\Theta = \{1\}, \quad X_0 = 0,$$

то есть в качестве Θ рассмотрим одноточечное множество. В этом случае величина скачка всегда равна единице, и решением является неоднородный пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t)$ с математическим ожиданием и дисперсией

$$\mathrm{E}X(t) = DX(t) = \int_0^t \lambda(t)\,dt.$$

С учетом (18) получаем

$$\mathrm{E}X(t) = DX(t) = \varrho t^2, \qquad \mathrm{E}X(0) = DX(0) = 0.$$

Тест 3. Рассмотрим задачу (1), (18) и зададим

$$\Theta = R, \quad X_0 = 0, \quad \psi(\theta|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}},$$

то есть в качестве Θ рассмотрим всю вещественную ось, и величина скачка имеет стандартное нормальное распределение. В этом случае решением является неоднородный сложный пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t)$ и с учетом (18)

$$\mathrm{E}X(t) = 0, \quad \mathrm{E}X(0) = 0, \quad \mathrm{E}X^2(0) = 0, \qquad DX(t) = \mathrm{E}X^2(t) = \int_0^t \lambda(t)\,dt = \varrho\, t^2.$$

Полученные оценки вероятностных характеристик смоделированного пуассоновского точечного процесса в момент времени $t = 1$ приведены в табл. 5–9 (тест 2) и в табл. 10–14 (тест 3). Расчеты проводились с шагом $h = 0.001$ для разных интенсивностей ($\lambda(t) = t$, $\lambda(t) = 2t$, $\lambda(t) = 10t$) и разного числа траекторий ($N_{\mathrm{tr}} = 10^4$, $N_{\mathrm{tr}} = 10^5$). Из таблиц видно, что

- оценки, полученные обоими методами, попадают в доверительные интервалы,
- и предложенная модификация алгоритма 1 уменьшила время счета.

Таблица 5. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора Rand128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	$\tilde m$	$\tilde d$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.5050	0.5057	0.0050± 0.0071	10^7	1.67
1	10^4	0.9924	0.9805	0.0076±0.0099	10^7	1.67
5	10^4	4.9980	4.9475	0.0020±0.0222	10^7	1.67
5	10^5	5.0241	4.9725	0.0241±0.0070	10^8	16.67

Таблица 6. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора Rand128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	$\tilde m$	$\tilde d$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.5076	0.5101	0.0076±0.0071	10^6	0.62
1	10^4	1.0073	1.0239	0.0073±0.0101	10^6	0.62
5	10^4	4.9891	5.1211	0.0109±0.0226	10^6	0.62
5	10^5	5.0045	4.9548	0.0045±0.0070	10^7	6.23

Таблица 7. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант2) с использованием генератора Rand128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	$\tilde m$	$\tilde d$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.4944	0.51037	0.0056±0.0071	10^5	0.50
1	10^4	0.9827	1.0064	0.0173±0.0100	10^5	0.53
5	10^4	5.013	4.9842	0.0130±0.0223	10^5	0.51
5	10^5	5.0062	4.9780	0.0062±0.0071	10^6	5.14

Таблица 8. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 3, $\epsilon < 2^{-30}$) с использованием генератора Rand128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	$\tilde m$	$\tilde d$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.4977	0.50959	0.0053±0.0071	1702	0.53
1	10^4	1.0096	1.00671	0.0096±0.0100	3362	0.53
5	10^4	4.9761	4.9091	0.0239±0.0222	13152	0.53
5	10^5	5.0110	4.9704	0.0110±0.0071	132282	5.34

Таблица 9. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 4, $\epsilon < 2^{-64}$) с использованием генератора Rand128 (тест 2)

ϱ	N_{tr}	$\tilde m$	$\tilde d$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.5187	0.5231	0.0187±0.0072	974	0.53
1	10^4	0.9991	0.9915	0.0009±0.0099	1727	0.53
5	10^4	5.0050	4.9601	0.0050±0.0222	6980	0.55
5	10^5	5.0004	4.9799	0.0004±0.0071	69756	5.34

Таблица 10. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора Rand128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	0.0117	0.4979	0.0117±0.0070	10^7	1.67	9924
1	10^4	0.0163	1.0439	0.0163±0.0102	10^7	1.69	19894
5	10^4	−0.0308	5.0110	0.0308±0.0223	10^7	1.69	100424
5	10^5	−0.0085	5.0342	0.0085±0.0071	10^8	16.92	1005718

Таблица 11. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора Rand128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr})}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	0.0038	0.5356	0.0038±0.0073	10^6	0.61	10198
1	10^4	−0.0090	1.0408	0.0090±0.0102	10^6	0.63	20170
5	10^4	−0.0412	5.0340	0.0412±0.0224	10^6	0.63	100454
5	10^5	−0.0028	4.9663	0.0028±0.0070	10^7	6.34	999350

Таблица 12. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора Rand128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	0.0092	0.5113	0.0092±0.0072	10^5	0.50	9984
1	10^4	0.0061	0.9977	0.0061±0.0100	10^5	0.50	19982
5	10^4	0.0147	4.8989	0.0147±0.0221	10^5	0.51	99692
5	10^5	0.0004	4.9999	0.0004±0.0070	10^6	5.21	998886

Таблица 13. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 3, $\epsilon < 2^{-30}$) с использованием генератора Rand128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	−0.0027	0.5109	0.0027±0.0071	1718	0.53	10062
1	10^4	0.0010	0.9780	0.0010±0.0099	3341	0.54	20018
5	10^4	0.0032	5.0659	0.0032±0.0225	13137	0.55	99468
5	10^5	0.0074	4.9998	0.0074±0.0070	131992	5.50	999380

Таблица 14. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 4, $\epsilon < 2^{-64}$) с использованием генератора Rand128 (тест 3)

ϱ	N_{tr}	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\mathrm{tr}}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	0.0096	0.5257	0.0096±0.0073	953	0.53	10018
1	10^4	0.0071	1.0021	0.0071±0.0100	1750	0.54	19928
5	10^4	0.0084	4.9749	0.0084±0.0223	6974	0.55	99240
5	10^5	−0.0018	4.9349	0.0018±0.0070	69871	5.54	1002102

Таблица 15. Число и время вызовов генератора псевдослучайных чисел Rand128 и Rand

M	t_{Rand128}	t_{Rand}
10^5	0.01	0.00
10^6	0.11	0.04
10^7	1.19	0.41
10^8	11.9	3.97

В таблице 15 приведено M — число вызовов генератора псевдослучайных чисел и затраченное время (в секундах) на их вызов генератором Rand128.

В тесте 3 моделируется сложный неоднородный пуассоновский процесс со скачками, имеющими стандартное нормальное распределение, моделирование которых требует дополнительные вызовы генератора. Поэтому в табл. 10–14 также приведено N_S — число этих дополнительных вызовов генератора.

Нетрудно оценить, что для пуассоновского процесса интенсивности $\lambda(t)$ на интервале $[0, T]$ требуется гауссовских случайных величин $N_S \approx \lambda \cdot T \cdot N_{\mathrm{tr}}$, где $\lambda(t) \leq \lambda$. В нашем случае $\lambda(t) = 2\varrho t$, $T = 1$. Поэтому $N_S \approx 10^5$ (для $N_{\mathrm{tr}}10^4$) и $N_S \approx 10^6$ (для $N_{\mathrm{tr}} = 10^5$) и, как видно из табл. 15, время вызова генератора Rand128 незначительно по сравнению со временем счета.

Моделирование пар независимых стандартных нормальных случайных величин ζ_1, ζ_2 осуществлялось по формулам [3]:

$$\zeta_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos 2\pi\alpha_2, \quad \zeta_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin 2\pi\alpha_2,$$

где α_1, α_2 — независимые равномерные случайные числа в $(0, 1)$.

Из сравнения времени вызова генератора Rand128 (табл. 15) и времени счета алгоритмом 1 теста 2 (табл. 5) и теста 3 (табл. 10) видно, что в обоих тестах вызов генератора для проверки неравенства (8) составляет $\sim 70\%$ от общего времени счета задачи. Таким образом:

- использование алгоритма 2 в рассматриваемых тестовых примерах целесообразно и позволило уменьшить время счета приблизительно в три раза (что согласуется с формулой (10)).

Сравнение 4-х вариантов алгоритма 2 позволяет сделать вывод, что

- для уменьшения трудоемкости вычислений и времени счета достаточно использовать построение десяти случайных чисел по одному псевдослучайному числу, так как дальнейшее увеличение последовательности не приводит к их заметному уменьшению.

В табл. 15 также приведено время, затрачиваемое на M вызовов “классического” генератора псевдослучайных чисел Rand с модулем 2^{40} и множителем 5^{17} [9] (использовалась программа из книги [10]). Если не требуется проведения параллельных вычислений и при расчетах требуется обращений к генератору 10^9 и меньше, то можно использовать генератор Rand, который прошел всестороннее многолетнее тестирование [9]. Из таблицы видно, что генератор Rand работает в три раза быстрее, чем Rand128. В следующем пункте будет рассмотрено применение генератора Rand для рассматриваемой задачи.

5. Вычислительные эксперименты (генератор Rand)

Генератор Rand является мультипликативным с числом двоичных разрядов $m = 40$, значит, для проверки применяемой методики можно использовать одно псевдослучайное число, пока выполнено условие (14), где $\epsilon = 2^{-20}$. Поэтому при расчетах алгоритмом 2 рассматривались только вариант 1 и вариант 2. Во всех тестовых примерах также вычислялось математическое ожидание и дисперсия моделируемого точечного пуассоновского процесса в момент времени $t = 1$.

Результаты статистического моделирования с использованием генератора Rand для теста 2 приведены в табл. 16–18. Эти таблицы аналогичны табл. 5–7 с использованием генератора Rand128. Результаты статистического моделирования с использованием генератора Rand для теста 3 приведены в табл. 19–21. Эти таблицы аналогичны табл. 10–12 с использованием генератора Rand128. Как видно из таблиц:

- все полученные оценки лежат в доверительном интервале,
- применение алгоритма 2 позволило уменьшить время счета,
- применение алгоритма 2 целесообразно применять при использовании и генератора Rand128, и генератора Rand.

Таблица 16. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора Rand (тест 2)

ϱ	$N_{\rm tr}$	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\rm tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.5069	0.5156	0.0069±0.0072	10^7	0.89
1	10^4	1.0086	1.0163	0.0086±0.0101	10^7	0.91
5	10^4	5.0264	4.9537	0.0264±0.0222	10^7	0.90
5	10^5	5.0104	4.9504	0.0104±0.0070	10^8	8.99

Таблица 17. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 1) с использованием генератора Rand (тест 2)

ϱ	$N_{\rm tr}$	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\rm tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.4962	0.4984	0.0038±0.0071	10^6	0.53
1	10^4	0.9794	0.9802	0.0206±0.0099	10^6	0.53
5	10^4	4.9716	4.8984	0.0284±0.0070	10^6	0.53
5	10^5	4.9984	4.9738	0.0016±0.0222	10^7	5.36

Таблица 18. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора Rand (тест 2)

ϱ	$N_{\rm tr}$	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\rm tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$
0.5	10^4	0.4855	0.4788	0.0145±0.0069	10^5	0.50
1	10^4	0.9893	0.9738	0.0107±0.0099	10^5	0.50
5	10^4	4.9998	4.9212	0.0002±0.0070	10^5	0.50
5	10^5	5.0060	4.9542	0.0060±0.0222	10^6	4.95

Таблица 19. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора Rand (тест 3)

ϱ	$N_{\rm tr}$	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\rm tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	−0.0015	0.4784	0.0015±0.0069	10^7	0.92	10114
1	10^4	−0.0059	0.9967	0.0059±0.0100	10^7	0.91	20280
5	10^4	−0.0288	5.0650	0.0029±0.0225	10^7	0.90	99984
5	10^5	−0.0019	4.9958	0.0019±0.0070	10^8	9.17	1001586

Таблица 20. Численные результаты, полученные алгоритмом 1 с использованием генератора Rand (тест 3)

ϱ	$N_{\rm tr}$	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\rm tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	0.0023	0.4923	0.0023±0.0070	10^6	0.56	9690
1	10^4	0.0051	0.9889	0.0051±0.0099	10^6	0.54	19856
5	10^4	−0.0046	4.9753	0.0045±0.0225	10^6	0.54	99376
5	10^5	−0.0121	5.0069	0.0121±0.0070	10^7	5.51	999268

Таблица 21. Численные результаты, полученные алгоритмом 2 (вариант 2) с использованием генератора Rand (тест 3)

ϱ	$N_{\rm tr}$	$\tilde{m}$	$\tilde{d}$	$\delta \pm \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N_{\rm tr}}}$	N_α	$t_{\text{сч}}$	N_S
0.5	10^4	−0.0110	0.4866	0.0110±0.0070	10^5	0.50	9724
1	10^4	−0.0110	0.9959	0.0110±0.0100	10^5	0.52	19938
5	10^4	−0.0441	5.0548	0.0441±0.0070	10^5	0.50	99704
5	10^5	−0.0071	5.0290	0.0071±0.0225	10^6	5.11	1000590

Еще раз отметим, что для моделирования пуассоновского точечного процесса в тесте 3 часть S формулы (9) содержит вычислительные затраты, связанные с вызовом генератора псевдослучайных чисел для моделирования гауссовских случайных величин. В рассматриваемом примере число вызовов генератора $N_S \approx 10^5$ (для $N_{\rm tr} = 10^4$) и $N_p \approx 10^6$ (для $N_{\rm tr} = 10^5$). Как видно из таблицы 15, время вызова генераторов Rand незначительно по сравнению со временем счета.

Для моделирования пуассоновского точечного процесса алгоритмами 1 и 2 используются “длинные” серии независимых выборочных значений бернуллиевских случайных величин $\{\eta^{(i)}\}$. Только в алгоритме 1 для моделирования каждой бернуллиевской случайной величины требуется вызов генератора, а в алгоритме 2 — возможно многократное использование одного и того же псевдослучайного числа.

Расчеты показали, что

- при моделировании пуассоновского точечного процесса, более экономичным является многократное использование одного и того же псевдослучайного числа генератора Rand128, чем однократное использование псевдослучайного числа, полученного с помощью генератора Rand.

6. Заключение

В данной работе предложена модификация приближенного алгоритма моделирования пуассоновского точечного процесса на основе свойства ординарности и экономичного способа моделирования случайных величин.

На тестовых примерах проведена численная проверка алгоритма 2. Проведенные расчеты подтверждают статистическую адекватность предложенного метода. Многократное использование одного и того же псевдослучайного числа при моделировании пуассоновского точечного процесса показало, что результаты совпадают в пределах статистической погрешности.

Предложенная модификация алгоритма 1 позволяет существенно уменьшить время счета в задачах, когда затрачиваемое время моделирования псевдослучайных чисел при использовании проверки условия (8) сравнимо с общим временем счета. Сравнение 4-х вариантов модифицированного алгоритма на таких задачах позволяет сделать вывод, что для уменьшения трудоемкости вычислений достаточно использовать построение десяти случайных чисел по одному псевдослучайному числу.

Сравнение проведенных расчетов с применением генератора Rand128 и генератора Rand показало, что при моделировании пуассоновского точечного процесса, более экономичным является многократное использование одного и того же псевдослучайного числа генератора Rand128, чем однократное использование псевдослучайного числа, полученного с помощью генератора Rand.

Построенный алгоритм 2 может быть применен как при решении задач анализа, синтеза, фильтрации, так и при решении задачи прогнозирования [8] для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа.

Литература

1. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Using maximum cross section method for filtering jump-diffusion random processes // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Vol. 35, № 2. — P. 55–67.
2. **Параев Ю.И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Сов. радио, 1976.
3. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Академия, 2006.
4. **Михайлов Г.А.** К вопросу о построении экономичных алгоритмов моделирования случайных величин // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1134–1136. Перевод: Mikhailov G.A. Construction of economic algorithms for simulating random variables // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1966. — Vol. 6, № 6. — P. 269–273.
5. **Аверина Т.А.** Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат физики. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23. Перевод: Averina T.A. New Algorithms for Statistical Modeling of Inhomogeneous Poisson Ensembles // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, № 1. — P. 12–18.
6. **Соболь И.М.** Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973.
7. **Mikhailov G.A., Marchenko M.A.** Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2002. — Vol. 17, № 1. — P. 113–124.
8. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 1–13. Перевод: Averina T.A., Rybakov K.A. Solving approximatety of a prediction problem for stochastic jump-diffusion systems // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P. 1–10.
9. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976.
10. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.

Поступила в редакцию 27 июля 2020 г.
После исправления 20 января 2021 г.
Принята к печати 5 октября 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Using maximum cross section method for filtering jump-diffusion random processes // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2020. — Vol. 35, № 2. — P. 55–67.
2. **Paraev Yu.I.** Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku processov upravleniya i fil'tracii. — M.: Sov. radio, 1976.

3. **Mikhailov G.A., Voitishek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — M.: Akademiya, 2006.

4. **Mikhailov G.A.** K voprosu o postroenii ekonomichnyh algoritmov modelirovaniya sluchainyh velichin // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1966. — T. 6, № 6. — S. 1134–1136. Perevod: Mikhailov G.A. Construction of economic algorithms for simulating random variables // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1966. — Vol. 6, № 6. — P. 269–273.

5. **Averina T.A.** Novye algoritmy statisticheskogo modelirovaniya neodnorodnyh puassonovskih ansamblei // Zhurn. vychisl. matem. i mat fiziki. — 2010. — T. 50, № 1. — S. 16–23. Perevod: Averina T.A. New Algorithms for Statstical Modeling of Inhomogeneous Poisson Ensembles // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 5, № 1. — P. 12–18.

6. **Sobol' I.M.** Chislennye metody Monte-Karlo. — M.: Nauka, 1973.

7. **Mikhailov G.A., Marchenko M.A.** Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2002. — Vol. 17, № 1. — P. 113–124.

8. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Priblizhennoe reshenie zadachi prognozirovaniya dlya stohasticheskih sistem diffuzionno-skachkoobraznogo tipa // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2017. — T. 20, № 1. — S. 1–13. Perevod: Averina T.A., Rybakov K.A. Solving approximatety of a prediction problem for stochastic jump-diffusion systems // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P. 1–10.

9. **Ermakov S.M., Mikhailov G.A.** Kurs statisticheskogo modelirovaniya. — M.: Nauka, 1976.

10. **Prigarin S.M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchainyh processov i polei. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2005.