

О ФОРМАХ СВЯЗИ МЕЖДУ ДВУМЯ НЕСООСНЫМИ ТЕНЗОРАМИ ВТОРОГО РАНГА (СЛУЧАЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИЛИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ)

А. Ф. Никитенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Установлена связь между несоосными тензорами напряжений и скоростей деформации ползучести для случая плоской деформации или плоского напряженного состояния. В основу положена экспериментально обоснованная гипотеза существования поверхности ползучести, представляющей собой в пространстве напряжений совокупность путей нагружения, обеспечивающих в любой момент времени одинаковые значения интенсивности процесса ползучести по некоторой выбранной мере и ортогональность вектора скоростей деформации ползучести к этой поверхности. Полученная связь полностью соответствует имеющимся экспериментальным данным при сложном нагружении.

1. Технические теории ползучести базируются, как известно, на гипотезе подобия девиаторов напряжений и скоростей деформации ползучести или же самих деформаций ползучести [1]. В. С. Наместниковым выполнены исследования [2–6] по установлению соответствия этих теорий экспериментальным данным. Отмечается [2–5], что наблюдается систематическое отклонение опытных данных от пропорциональности соответствующих девиаторов. Мерой этого отклонения является фаза подобия (терминология В. В. Новожилова), которая представляет собой разность углов вида тензоров напряжений и скоростей деформации ползучести или же самих деформаций (напомним, что на девиаторной плоскости угол вида тензора напряжений определяет направление вектора интенсивности напряжений, а угол вида тензора скоростей деформации — направление вектора интенсивности скоростей деформаций ползучести).

Дальнейший анализ многочисленных экспериментальных данных с учетом справедливости гипотезы соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести или же самих деформаций ползучести приводит к следующим выводам [7–10].

1. Фаза подобия соответствующих девиаторов является нечетной функцией только угла вида напряженного состояния [10].

2. При стационарном напряженном состоянии и в случае простого нагружения вектор скорости деформаций ползучести (или же самих деформаций ползучести) не меняет своего направления в процессе деформирования с момента приложения нагрузки практически вплоть до разрушения образца. Этим самым утверждается, что фаза подобия девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (или же самих деформаций) остается фиксированной в процессе деформирования материала как при стационарном напряженном состоянии, так и при пропорциональном нагружении. Более того, именно при этих режимах нагружения фаза подобия девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести равна фазе подобия девиаторов напряжений и деформаций ползучести [7, 8].

3. При сложном нагружении фаза подобия девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести получает приращение, которое зависит от приращения угла вида

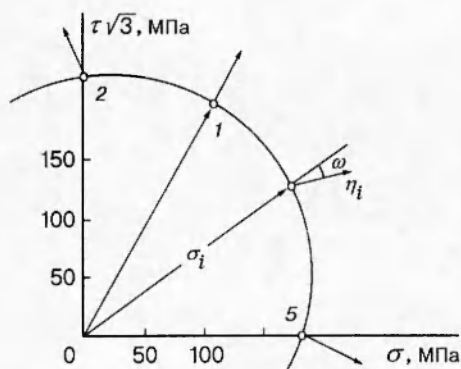


Рис. 1

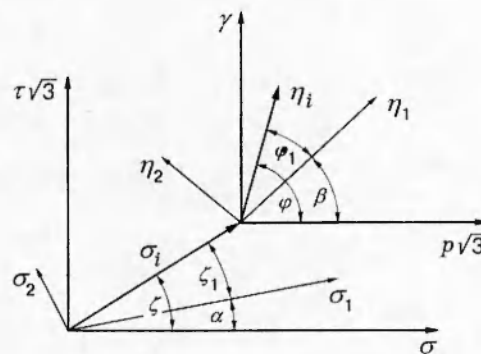


Рис. 2

напряженного состояния, знака этого приращения и с течением времени стремится к нулю [9].

Именно только за счет приращения фазы подобия соответствующих девиаторов объясняли до сих пор экспериментально наблюдаемый в условиях сложного нагружения «заброс» вектора скоростей деформаций ползучести в сторону поворота вектора напряжений [9, 11]. Это утверждение не всегда является достоверным. Действительно, в экспериментах при растяжении — сжатии с одновременным кручением образцов при сложном нагружении главные оси тензора напряжений меняют свою ориентацию. Меняют, естественно, свою ориентацию и главные оси тензора скоростей деформаций ползучести. Понятно, что в случае рассматриваемого сложного нагружения происходит не только приращение фазы подобия соответствующих девиаторов, но и нарушение соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести.

Для обоснования последнего утверждения достаточно проанализировать экспериментальные данные [11], полученные на образцах, нагружаемых растягивающей нагрузкой с одновременным приложением крутящего момента (материал — Ст.45, температура испытания 400 °С). Первый цикл нагружения соответствовал некоторой комбинации напряжений растяжения и сдвига (точка 1 на рис. 1).* Второй цикл нагружения, которое осуществлялось ступенчато, отвечал либо растяжению (точка 5 на рис. 1), при котором одновременно с осевой деформацией в материале образца накапливалась еще и деформация сдвига, либо чистому кручению (точка 2 на рис. 1), при котором в материале образца одновременно с деформацией сдвига накапливалась еще и осевая деформация. В экспериментах [12] на технической чистой меди при температуре 150 °С первый цикл нагружения соответствовал растяжению (кручению) образца, второй — кручению (растяжению). Из анализа кривых ползучести следует, «...что после замены растяжения кручением убывает деформация удлинения, а после замены кручения растяжением убывает деформация сдвига. То же самое наблюдалось ранее на стали ЭИ-257... Обнаруженные в экспериментах факты не согласуются ни с одной из существующих теорий ползучести» [12]. Этого и следовало ожидать, так как описанные выше экспериментальные факты свидетельствуют не только о нарушении подобия соответствующих девиаторов, но и о нарушении соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести сразу же после начала сложного нагружения.

*Рис. 1 — фрагмент рис. 2 из [11].

При наложении плоскости $\sqrt{3}p - \gamma$, на которой представляется вся экспериментальная информация о ползучести образцов [9, 11], на плоскость $\sigma - \sqrt{3}\tau$, на которой представляется информация об истории пути нагружения этих образцов, становится очевидным, что происходит «заброс» вектора скоростей деформаций ползучести в сторону поворота вектора напряжений [9, 11]. Геометрическая интерпретация напряженно-деформированного состояния в произвольной точке пути сложного нагружения иллюстрируется на рис. 2 с общепринятыми, как и на рис. 1, обозначениями: σ, τ — нормальное и касательное напряжения в поперечном сечении образца, σ_i — интенсивность напряжений, σ_1, σ_2 — главные компоненты тензора напряжений, p, γ — осевая и сдвиговая деформации ползучести, η_i — интенсивность скоростей деформаций ползучести, η_1, η_2 — главные компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, остальные обозначения очевидны. Величина упомянутого выше «заброса», как следует из рис. 2, оценивается разностью углов $\zeta = \zeta_1 + \alpha$ и $\varphi = \varphi_1 + \beta$, т. е. $\omega = \zeta - \varphi = (\zeta_1 - \varphi_1) + (\alpha - \beta)$.

Очевидно, что ω представляет сумму отклонения от пропорциональности соответствующих девиаторов, мерой которого является $\omega_1 = \zeta_1 - \varphi_1$, и отклонения от соосности тензоров напряжений и скоростей деформации ползучести, мерой которого служит $\omega_2 = \alpha - \beta$. Понятно, что ω при $\omega_2 = 0$ является мерой отклонения только от пропорциональности соответствующих девиаторов, а при $\omega_1 = 0$ — мерой отклонения только от соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести. По аналогии с общим случаем ω можно назвать фазой подобия девиаторов применительно к рассматриваемому плоскому напряженному состоянию.

2. Установим связь между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести, которая полностью отвечает описанным выше опытным данным. Исходить будем из экспериментально обоснованной гипотезы существования поверхности ползучести [7, 9], которая представляет собой в пространстве напряжений совокупность путей нагружения, обеспечивающих в любой момент времени при любом пути нагружения эквивалентные значения интенсивности процесса ползучести по выбранной мере (в дальнейшем в качестве такой меры используется величина диссипируемой энергии) и ортогональность вектора скорости деформаций ползучести к этой поверхности в соответствующей точке нагружения. Уравнение этой поверхности в общем случае можно записать в виде $\sigma_3 = \text{const}$.

В рассматриваемом случае на плоскости $\sigma - \sqrt{3}\tau$ σ_3 — замкнутая выпуклая кривая [9]. Уравнение этой кривой получим, исходя из сформулированного выше определения поверхности ползучести. Очевидно, что требование эквивалентности интенсивности процесса ползучести при любом пути нагружения сводится к гладкости кривой диссипируемая работа — время:

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} d\sigma + \frac{d\gamma}{dt} d(\sqrt{3}\tau) = 0. \quad (2.1)$$

Так как путь нагружения принадлежит σ_3 , то равенство (2.1) одновременно является и условием ортогональности вектора скорости деформации ползучести к σ_3 .

Из рис. 2 следует $\sigma = \sigma_i \cos \zeta$, $\sqrt{3}\tau = \sigma_i \sin \zeta$, $\text{tg } \zeta = \sqrt{3}\tau/\sigma$. С учетом этого из (2.1) получим

$$\sigma_i \exp \left(- \int_{\zeta^0}^{\zeta} \text{tg } \omega d\zeta \right) = \sigma_i^0, \quad \omega = \zeta - \varphi, \quad (2.2)$$

где σ_i^0, ζ^0 соответствуют началу пути нагружения. Таким образом,

$$\sigma_3 = \sigma_i \exp \left(- \int_{\zeta^0}^{\zeta} \operatorname{tg} \omega d\zeta \right). \quad (2.3)$$

Очевидно, что если в любой момент времени t имеем $\omega = 0$, то контур эквивалентных напряженных состояний (2.2) представляет собой классическую окружность Мизеса, т. е. $\sigma_i = \sigma_i^0, \sigma_3 = \sigma_i$. Учитывая, что

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = \lambda \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \lambda \frac{\partial \sigma_3}{\partial (\sqrt{3}\tau)},$$

после стандартных операций с использованием (2.3) запишем

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = W \left[\frac{\sigma}{\sigma_i^2} + \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega \right], \quad \frac{d\gamma}{dt} = W \left[\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2} - \frac{\sigma}{\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega \right] \quad (2.4)$$

(W — диссипируемая в процессе ползучести энергия).

Соотношения (2.4) являются окончательными. Остановимся на анализе вытекающих из них результатов.

А. В случае стационарного напряженного состояния или же простого нагружения фаза подобия девиаторов, как отмечалось выше, остается фиксированной. Пусть $\sigma = 0, \tau \neq 0$. Из (2.4) следует

$$\frac{d\gamma}{dt} = W \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2}, \quad \frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = W \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega, \quad (2.5)$$

т. е. при чистом кручении наблюдается небольшая осевая ползучесть, что неоднократно фиксировалось в экспериментах [13], в том числе и в экспериментах автора на титановом сплаве Ti-6Al-4V в условиях комнатной температуры. Упомянутая осевая ползучесть отсутствует при $\omega = 0$.

Б. Рассмотрим случай сложного нагружения. Пусть на первой ступени нагружения $\sigma \neq 0, \tau = 0$ при $t \leq t_1$. Очевидно, что при одноосном растяжении — сжатии $\omega = 0$, и из (2.4) вытекает

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = W \frac{\sigma}{\sigma_i^2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

На второй ступени нагружения $\sigma = 0, \tau \neq 0$ при $t > t_1$. При сложном нагружении, как отмечалось выше, фаза подобия девиаторов получает приращение, стремящееся со временем к нулю. Таким образом, на второй ступени нагружения $\omega \neq 0$. Более того, из экспериментов [11] следует, что $\omega < 0$. Из (2.4) имеем

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = W \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega, \quad \frac{d\gamma}{dt} = W \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2}. \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) вытекает, что после замены растяжения кручением убывает осевая деформация ползучести. Именно этот результат обнаружен в экспериментах [12].

Пусть теперь на первой ступени нагружения $\sigma = 0, \tau \neq 0$, тогда из (2.4) получим соотношения (2.5). Согласно экспериментам [11-13], положим на первой ступени нагружения $\omega = 0$. Тогда

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt} = W \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2}. \quad (2.8)$$

На второй ступени нагружения при $\sigma \neq 0$, $\tau = 0$ фаза подобия девиаторов получает приращение, т. е. $\omega \neq 0$ и, как следует из [11], $\omega > 0$. Из (2.4) имеем

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = W \frac{\sigma}{\sigma_i^2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -W \frac{\sigma}{\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) вытекает, что после замены кручения растяжением убывает сдвиговая деформация ползучести, что полностью согласуется с экспериментальными результатами [12].

В. Рассмотрим пример, соответствующий экспериментальным данным [11]. Пусть на первой ступени нагружения $\sigma \neq 0$, $\tau \neq 0$ и $\omega = 0$ (точка 1 на рис. 1). Тогда

$$\frac{d(\sqrt{3}p)}{dt} = W \frac{\sigma}{\sigma_i^2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = W \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_i^2}.$$

Если на второй ступени сложного нагружения $\sigma = 0$, $\tau \neq 0$ (точка 2 на рис. 1) или же $\sigma \neq 0$, $\tau = 0$ (точка 5 на рис. 1), то из (2.4) сразу следуют соотношения (2.7) или (2.9), которые полностью согласуются с экспериментальными результатами [11], представленными на рис. 1. Это следует из анализа направления вектора скорости деформаций ползучести в точках нагружения 2 и 5.

3. Случай плоской деформации рассматривается аналогичным образом. После стандартных операций с учетом (2.2) получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= W \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{4\sigma_i^2} + \frac{i_{xy}}{2\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega \right], & \dot{p}_y &= -W \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{4\sigma_i^2} + \frac{i_{xy}}{2\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega \right], \\ \dot{p}_{xy} &= W \left[\frac{i_{xy}}{\sigma_i^2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_i^2} \operatorname{tg} \omega \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

(точка — дифференцирование по времени, остальные обозначения общепринятые, причем выражения для W , σ_i , ω соответствуют случаю плоской деформации). Соотношения (3.1) совпадают с аналогичными, полученными из других соображений в [14], что свидетельствует о достоверности изложенного в данной работе подхода для установления функциональной связи между двумя несоосными тензорами второго ранга.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Наместников В. С.** О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 4. С. 141–146.
3. **Наместников В. С.** О ползучести при переменных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 10. С. 83–85.
4. **Наместников В. С.** Об одной гипотезе в теории трехосной ползучести // Изв. СО АН СССР. 1960. № 2. С. 3–14.
5. **Наместников В. С.** О гипотезе пропорциональности девиаторов в условиях ползучести при переменных нагрузках и неизменных главных осях // ПМТФ. 1960. № 3. С. 212–214.
6. **Наместников В. С., Работнов Ю. Н.** О наследственных теориях ползучести // ПМТФ. 1961. № 4. С. 148–150.
7. **Никитенко А. Ф.** Экспериментальная проверка гипотезы существования термосиловой поверхности процесса ползучести // Пробл. прочности. 1978. № 9. С. 12–15.

8. **Никитенко А. Ф.** Об экспериментальном обосновании гипотезы существования термосиловой поверхности ползучести в условиях простого нагружения // Пробл. прочности. 1981. № 12. С. 38–41.
9. **Никитенко А. Ф.** Экспериментальное обоснование гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения. Сообщение 1 // Пробл. прочности. 1984. № 8. С. 3–8.
10. **Никитенко А. Ф.** Экспериментальное обоснование гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения. Сообщение 2 // Там же. С. 8–10.
11. **Соснин О. В.** К вопросу о существовании потенциала ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 85–89.
12. **Наместников В. С.** Ползучесть технически чистой меди при сложном напряженном состоянии // ПМТФ. 1965. № 3. С. 127–130.
13. **Трунин И. И.** Оценка сопротивления длительному разрушению и некоторые особенности деформирования при сложном напряженном состоянии // ПМТФ. 1963. № 1. С. 110–114.
14. **Черных К. Ф.** О формах связи между симметричными тензорами в механике сплошных сред // Инж. журн. МТТ. 1967. № 3. С. 42–51.

Поступила в редакцию 9/VII 1996 г.
