

4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.
5. Nemat-Nasser S., Willis J.R. Singular perturbation solution of a class of singular integral equations // Quart. Appl. Math. — 1990. — V. 48, N 4. — P. 741—754.

г. Новосибирск

Поступила 14/XII 1993 г.

УДК 539.376

М.Н. Кирсанов, В.Д. Ключников

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ВЫПУЧИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для анализа выпучивания реологических систем в [1] предложен вариант псевдобифуркационного подхода, уточняющий в постановочной части раннюю версию [2]. Основой подхода явилось понятие особой (или псевдобифуркационной) точки процесса деформирования. При достижении этой точки система критическим образом реагирует на задание в качестве начальных данных для возмущенного движения приращений высших производных прогиба. Низшие производные и сам прогиб при этом неограниченно растут. Первая точка получившейся последовательности совпадает с критерием [3].

В настоящей работе критерий [1] используется для решения трехмерных задач. Основа решения — метод упругого эквивалента [2], суть которого состоит в разделении поставленной задачи на две. В первой вычисляется критическая нагрузка соответствующей упругой конструкции. Во второй задаче, которая связана только с определяющим соотношением, отыскивается некоторый модуль, выражающий приращение напряжений через приращение деформаций в момент достижения особой точки. Замена модуля Юнга в первой задаче на найденный (модуль упругого эквивалента) даст окончательное решение.

Для выявления особых точек составляется система уравнений, которую будем называть определяющей. При непосредственном нахождении особых точек (что возможно в простейших случаях) такая система составляется для приращений прогиба и его производных, для чего используется уравнение равновесия. В методе упругого эквивалента определяющая система связывает приращения деформации ползучести и ее производные по времени.

Нумерацию особых точек, в отличие от [1], будем вести с первого порядка. Таким образом, точка псевдобифуркации порядка N (в уточненной постановке) соответствует особой точке порядка $N + 1$.

1. Запишем соотношение теории деформаций [4]

$$(1.1) \quad \epsilon_{ij} = (\epsilon/S)S_{ij}.$$

Здесь ϵ_{ij} — деформация; S_{ij} — девиатор напряжений:

$$(1.2) \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3;$$

S и ϵ — интенсивности соответствующих величин

$$(1.3) \quad S^2 = S_{ij}S_{ij}, \quad \epsilon^2 = \epsilon_{ij}\epsilon_{ij}.$$

Определяющее соотношение выберем в степенной форме

$$(1.4) \quad \dot{p}p^\alpha = AS^n,$$

© М.Н. Кирсанов, В.Д. Ключников, 1994

где p — интенсивность деформации ползучести p_{ij} :

$$(1.5) \quad p_{ij} = \varepsilon_{ij} - S_{ij}/(2G);$$

$$(1.6) \quad p^2 = p_{ij}p_{ij}.$$

Свертка (1.5) с учетом (1.1) — (1.3), (1.6) дает $p = \varepsilon - S/(2G)$. С учетом этого равенства из (1.1) и (1.5) следует

$$(1.7) \quad p_{ij} = (p/S)S_{ij}.$$

Для вывода определяющей системы уравнений, задающей особые точки, потребуются некоторые тождества. Ограничимся рассмотрением основного процесса с постоянными девиаторами напряжений $S_{ij} = \text{const}$.

Первая группа тождеств относится к параметрам основного процесса. Докажем, что

$$(1.8) \quad p_{ij}^{(k)} = p_{ij}(p^{(k)}/p), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Индекс (k) указывает порядок производной по времени. Дифференцируя (1.7) k раз при $S_{ij}/S = \text{const}$, имеем

$$p_{ij}^{(k)} = (S_{ij}/S)p^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Заменив S_{ij}/S на p_{ij}/p по формуле (1.7), сразу же получим требуемое тождество (1.8).

Одной из основных в предстоящем процессе вывода будет тензорная величина

$$(1.9) \quad K_{ijmn} = S_{ij}S_{mn}/S^2 = p_{ij}p_{mn}/p^2,$$

обладающая свойством

$$(1.10) \quad K_{ijkl}K_{klmn} = K_{ijmn}.$$

Вторая группа тождеств относится к параметрам возмущенного процесса. Пользуясь (1.6) и (1.8), можно доказать, что

$$(1.11) \quad \Delta p^{(k)} = \Delta p_{mn}^{(k)}p_{mn}/p \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Умножая (1.11) на S_{ij} , находим

$$(1.12) \quad S_{ij}\Delta p^{(k)} = (p_{ij}p_{mn}/p^2)S\Delta p_{mn}^{(k)} = K_{ijmn}S\Delta p_{mn}^{(k)}.$$

Из (1.7), (1.9) и (1.12) следует еще одно необходимое тождество

$$(1.13) \quad \Delta p^{(k)}p_{ij} = pK_{ijmn}\Delta p_{mn}^{(k)}.$$

Для выяснения закономерности образования системы уравнений и выделяемой матрицы упругого эквивалента оказывается достаточным нескольких уравнений. Ограничимся третьим порядком системы.

Дважды продифференцируем по времени равенство (1.7):

$$(1.14) \quad \dot{S}_{ij}p + S_{ij}\dot{p} = \dot{p}_{ij}S + p_{ij}\dot{S};$$

$$(1.15) \quad \ddot{S}_{ij}p + 2\dot{S}_{ij}\dot{p} + S_{ij}\ddot{p} = \ddot{p}_{ij}S + 2\dot{p}_{ij}\dot{S} + p_{ij}\ddot{S},$$

а также определяющее соотношение (1.4):

$$(1.16) \quad \ddot{p}p^\alpha + \alpha p^{\alpha-1}\dot{p}^2 = An\dot{S}S^{n-1};$$

$$(1.17) \quad \ddot{p}\dot{p}^\alpha + 3\alpha p^{\alpha-1}\dot{p}\ddot{p} + \alpha(\alpha-1)p^{\alpha-2}\dot{p}^3 = An(S^{n-1}\ddot{S} + (n-1)\dot{S}^2).$$

Линеаризируем (1.7), (1.14), (1.15) с учетом принятого ограничения $\dot{S}_{ij} = 0$:

$$(1.18) \quad p\Delta S_{ij} + S_{ij}\Delta p = p_{ij}\Delta S + S\Delta p_{ij};$$

$$(1.19) \quad p\Delta \dot{S}_{ij} + \dot{p}\Delta S_{ij} + S_{ij}\Delta \dot{p} = p_{ij}\Delta \dot{S} + \dot{p}_{ij}\Delta S + S\Delta \dot{p}_{ij};$$

$$(1.20) \quad p\Delta\dot{S}_{ij} + 2\dot{p}\Delta S_{ij} + S_{ij}\Delta\ddot{p} + \ddot{p}\Delta S_{ij} = p_{ij}\Delta\dot{S} + 2\dot{p}_{ij}\Delta\dot{S} + \ddot{p}_{ij}\Delta S + S\Delta\ddot{p}_{ij}.$$

Исключим из системы (1.18) — (1.20) приращения $\Delta S, \Delta\dot{S}, \Delta\ddot{S}$. Для этого линеаризируем (1.4), (1.16), (1.17):

$$(1.21) \quad \Delta S = S(p\Delta\dot{p} + \alpha\dot{p}\Delta p)/(n\dot{p}p);$$

$$(1.22) \quad \Delta\dot{S} = S(p^2\Delta\ddot{p} + 2\alpha p\dot{p}\Delta\dot{p} - \alpha\dot{p}^2\Delta p)/(n\dot{p}p^2);$$

$$(1.23) \quad \Delta\ddot{S} = S(p^3\Delta\ddot{\ddot{p}} + 3\alpha p^2\dot{p}\Delta\ddot{p} - 3\alpha p\dot{p}^2\Delta\dot{p} + \alpha(\alpha + 1)\dot{p}^3\Delta p)/(n\dot{p}p^3).$$

Основной проблемой метода упругого эквивалента является определение связи между приращениями напряжений и деформаций, отвечающей особой точке. Для удобства выкладок найдем сначала зависимость между приращениями напряжений и деформаций ползучести. Предположим, что справедлива связь

$$(1.24) \quad \Delta S_{ij}^{(k)} = (S/p)(aK_{ijmn} + b\delta_{im}\delta_{jn})\Delta p_{mn}^{(k)},$$

где a и b — искомые коэффициенты.

Преобразуем правые части системы (1.18) — (1.20). С помощью тождеств (1.8) заменим \dot{p}_{ij} на $(\dot{p}/p)p_{ij}$ и \ddot{p}_{ij} на $(\ddot{p}/p)p_{ij}$. Затем исключим из системы выражения $p_{ij}\Delta S^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), для чего воспользуемся равенствами (1.21) — (1.23), преобразованными с учетом тождеств (1.13).

Приращения $\Delta S_{ij}^{(k)}$ в левой части системы (1.18) — (1.20) выразим через $\Delta p_{mn}^{(k)}$ с помощью (1.24). Используя тождества (1.12), после некоторых преобразований получим искомую систему:

$$(1.25) \quad \Delta p_{mn} [(\alpha/n - a - 1)K_{ijmn} + (1 - b)\delta_{im}\delta_{jn}] + (p/\dot{p})K_{ijmn}\Delta\dot{p}_{mn}/n = 0;$$

$$(1.26) \quad \Delta p_{mn}(\dot{p}/p)(aK_{ijmn} + b\delta_{im}\delta_{jn}) - \Delta\dot{p}_{mn} \{[(1 + 2\alpha)/n - 1 - a]K_{ijmn} + (1 - b)\delta_{im}\delta_{jn}\} - (p/\dot{p})K_{ijmn}\Delta\ddot{p}_{mn}/n = 0;$$

$$(1.27) \quad \Delta p_{mn}(\dot{p}/p)^2\alpha(aK_{ijmn} + b\delta_{im}\delta_{jn}) - 2\Delta\dot{p}_{mn}(\dot{p}/p)(aK_{ijmn} + b\delta_{im}\delta_{jn}) + \Delta\ddot{p}_{mn} \{[(3\alpha + 2)/n - 1 - a]K_{ijmn} + (1 - b)\delta_{im}\delta_{jn}\} + (p/\dot{p})K_{ijmn}\Delta\ddot{\ddot{p}}_{mn}/n = 0.$$

Если, поднимая порядок определяющего соотношения, вывести еще 2—3 уравнения системы, то можно обнаружить закономерность их построения. Выпишем, таким образом, N -е уравнение системы (1.25) — (1.27)

$$(aK_{ijmn} + b\delta_{im}\delta_{jn}) \sum_{k=0}^{N-2} C_k^{N-1} \psi_{N-2-k} \dot{p}^{N-1-k} \Delta p_{mn}^{(k)}/p - \Delta p_{mn}^{(N-1)} \{[(N - 1 + N\alpha)/n - 1 - a]K_{ijmn} + (1 - b)\delta_{im}\delta_{jn}\} - (p/\dot{p})K_{ijmn}\Delta p_{mn}^{(N)}/n = 0,$$

где функции ψ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) имеют вид

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = -\alpha/p, \psi_2 = \alpha(1 + 2\alpha)/p^2, \psi_3 = -\alpha(1 + 2\alpha)(2 + 3\alpha)/p^3, \dots, \psi_{N+1} = -\psi_N[(N + 1)\alpha + N]/p, N = 0, 1, 2, \dots$$

Система (1.25) — (1.27) определяет три особые точки. Особую точку N -го порядка будем находить из условия равенства нулю определителя системы N тензорных уравнений с неизвестными $\Delta p_{ij}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) и известными $\Delta p_{ij}^{(N)}$. Для этого будем использовать следующий способ выделения определителя. Полагая $\Delta p_{ij}^{(N)} = 0$, превратим определяющую систему в однородную. Последовательно исключим неизвестные $\Delta p_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N - 1$) и для Δp_{ij} получим уравнение

$$(1.28) \quad \Delta p_{ij} A_{ijmn} = 0.$$

Особые точки находятся из условия вырождения определяющей системы, что при независимости компонент Δp_{ij} эквивалентно $A_{ijmn} = 0$. Из этого

равенства определяются искомыми коэффициенты a и b упругого эквивалента в форме (1.25).

Найдем особую точку первого порядка. Положим $\Delta \dot{p}_{mn} = 0$. Из уравнения (1.25) сразу же следует (1.28). Величины K_{ijmn} и $\delta_{im} \delta_{jn}$ не могут быть пропорциональны. Приравнявая нулю отдельно сомножители при них, получим $a_1 = \alpha/n - 1$, $b_1 = 1$.

Для определения особой точки второго порядка необходимо рассмотреть систему (1.25), (1.26) при $\Delta \dot{p}_{mn} = 0$. Приведем систему к виду (1.28), исключив $\Delta \dot{p}_{mn}$. Выразив из (1.26) $\Delta \dot{p}_{mn} K_{ijmn}$ и подставив в (1.25), имеем

$$\Delta p_{mn} \{K_{ijmn} [\alpha - z + 1 - b + z/(1 + 2\alpha - z)] + n \delta_{im} \delta_{jn} (1 - b)\} = 0,$$

где

$$(1.29) \quad z = (a + b)n.$$

Приравнявая нулю коэффициент при $\delta_{im} \delta_{jn}$, получим, $b = 1$. Отсюда коэффициент при K_{ijmn} примет вид $[z^2 - 3\alpha z + \alpha(1 + 2\alpha)]/(1 + 2\alpha - z)$. Числитель этого выражения совпадает с полиномом $B_2 [1]$, следовательно, для z имеем решение $z = \xi_2$. Таким образом, для особой точки второго порядка определим коэффициенты матрицы упругого эквивалента

$$a_2 = \xi_2/n - 1, \quad b_2 = 1.$$

Найдем особую точку третьего порядка. Положим в уравнении (1.27) $\Delta \dot{p}_{mn} = 0$ и исключим из (1.26), (1.27) $\Delta \dot{p}_{mn} K_{ijmn}$, $\Delta \dot{p}_{mn} K_{ijmn}$. Опуская несложные выкладки, имеем

$$\Delta p_{mn} \{K_{ijmn} [\alpha - z + n(1 - b) + z(4\alpha + 2 - z)/[2z + (1 + 2\alpha - z + n(1 - b))(2 + 3\alpha - z)]] + \delta_{im} \delta_{jn} n(1 - b)\} = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициент при $\delta_{im} \delta_{jn}$, получим $b_3 = 1$. Отсюда сомножитель при K_{ijmn} примет вид

$$[-z^3 + 6z^2 - \alpha(4 + 11\alpha)z + \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2)]/[2z + (1 + 2\alpha - z)(2 + 3\alpha - z)].$$

Числитель этого выражения является полиномом $B_3 [1]$ переменной z . Следовательно, для критической точки третьего порядка $z = \xi_3$. С учетом обозначения (1.29) находим $a_3 = \xi_3/n - 1$, $b_3 = 1$.

В общем случае очевидно, что для особой точки порядка N коэффициенты матрицы упругого эквивалента имеют вид

$$(1.30) \quad a_N = \xi_N/n - 1, \quad b_N = 1.$$

Величина ξ_N зависит от α и находится численно как корень полинома B_N . В частности, $\xi_1 = \alpha$, $\xi_2 = (3\alpha \pm (\alpha^2 - 4\alpha)^{1/2})/2$.

Приведем теперь найденную связь (1.24) в упругом эквиваленте к более естественному виду

$$(1.31) \quad \Delta S_{ij}^{(k)} = 2G_{ijmn} \Delta \varepsilon_{mn}^{(k)}.$$

Для этого, используя равенство (1.5), записанное в приращениях, и подставляя найденные коэффициенты (1.30), выделим из (1.24) $\Delta \varepsilon_{mn}$:

$$(1.32) \quad \Delta S_{mn}^{(k)} \{ \delta_{im} \delta_{jn} + (S/p)(a_N K_{ijmn} + \delta_{im} \delta_{jn}) / (2G) \} = (S/p)(a_N K_{ijmn} + \delta_{im} \delta_{jn}) \Delta \varepsilon_{mn}^{(k)}.$$

Решая (1.32) относительно $\Delta S_{mn}^{(k)}$, получим связь (1.31) с матрицей:

$$(1.33) \quad G_{ijmn} = CK_{ijmn} + B \delta_{im} \delta_{jn} / 2;$$

$$(1.34) \quad C = \frac{GpS(\xi_N - n)}{\varepsilon(2Gpn + S\xi_N)}, \quad B = \frac{S}{\varepsilon}.$$

Матрица (1.33) с коэффициентами (1.34) определяет упругий эквивалент среды, соответствующий особой точке порядка N .

2. Проиллюстрируем применение теории особых точек для исследования явления выпучивания тонкостенных систем на примере цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Для этого матрицу упругого эквивалента (1.33), относящуюся к произвольному напряженному состоянию, преобразуем в форму для анализа плоского напряженного состояния, где индексы пробегает значения только 1 и 2:

$$(2.1) \quad \Delta\sigma_{ij} = E_{ijmn} \Delta\varepsilon_{mn}, \quad j, j, m, n = 1, 2.$$

При $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ уравнения (1.2) можно разрешить относительно напряжений:

$$(2.2) \quad \sigma_{ij} = S_{ij} + S_{kk} \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Несложные выкладки [2] с использованием (2.2) и условия несжимаемости $\Delta\varepsilon_{kk} = 0$ ($k = 1, 2, 3$) позволяют выразить матрицу E_{ijmn} через коэффициенты B и C матрицы G_{ijmn} :

$$(2.3) \quad E_{ijmn} = 2C\sigma_{ij}\sigma_{mn}/S^2 + B(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{ij}\delta_{mn}), \quad i, j, m, n = 1, 2.$$

Заметим, что интенсивность девиатора напряжений S , входящая в (2.3), вычисляется по прежней формуле (1.3), в которой суммирование производится по всем компонентам тензора ($i, j = 1, 2, 3$).

Рассмотрим явление выпучивания при осевом сжатии шарнирно опертой цилиндрической оболочки длиной l , толщиной h и радиусом R . Предположим, что между напряжениями и деформациями имеется связь в форме (2.1) с матрицей констант (2.3). Величины B и C для простоты можно временно считать постоянными, так что внешне связь (2.1) будет напоминать закон Гука анизотропного тела (фактически же анизотропии такого типа в реальной упругости не существует). Найдем критическую нагрузку по Эйлеру. Запишем уравнения совместности деформаций и равновесия в приращениях [2]:

$$(2.4) \quad \Delta\varepsilon_{1,22} + \Delta\varepsilon_{2,11} - 2\Delta\gamma_{,12} + W_{,11}/R = 0, \quad \Delta M_{ij,ij} + N_{ij}W_{,ij} - \Delta N_{22}/R = 0.$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ — деформации срединной поверхности; W — прогиб оболочки (для докритического состояния оболочки, в котором прогиб равен нулю, значок Δ можно опустить); запятой обозначена производная по координате; x_1, x_2 — продольная и окружная координаты. Приращения моментов и усилий выражаются через приращения напряжений по формулам

$$(2.5) \quad \Delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{ij} z dz, \quad \Delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{ij} dz.$$

Будем использовать геометрические соотношения

$$(2.6) \quad \Delta\varepsilon_{11} = \Delta\varepsilon_1 + zW_{,11}, \quad \Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_2 + zW_{,22}, \quad \Delta\varepsilon_{12} = \Delta\gamma + zW_{,12}$$

и функцию напряжений

$$(2.7) \quad \Delta N_{11} = F_{,22}, \quad \Delta N_{22} = F_{,11}, \quad \Delta N_{12} = -F_{,12}.$$

Для цилиндрической оболочки, сжатой вдоль образующей напряжениями σ_{11} , имеем $\sigma_{22} = 0, S = \sqrt{2/3}\sigma_{11}$. Из соотношения (2.1) с матрицей упругого эквивалента (2.3) в данном случае следует

$$(2.8) \quad \Delta\sigma_{11} = (3C + 2B)\Delta\varepsilon_{11} + B\Delta\varepsilon_{22}, \quad \Delta\sigma_{22} = B(\Delta\varepsilon_{11} + 2\Delta\varepsilon_{22}), \quad \Delta\sigma_{12} = B\Delta\varepsilon_{12}.$$

Перепишем систему (2.4), выразив приращения всех входящих туда величин через две функции: F и W . Преобразуем первое уравнение системы. Проинтегрируем (2.8) по толщине с учетом гипотезы плоских сечений (2.6). Интегралы от напряжений заменим на усилия по формулам (2.5) и разрешим полученную систему относительно приращений деформаций срединной поверхности:

$$(2.9) \quad \Delta \varepsilon_1 = \frac{2\Delta N_{11} - \Delta N_{22}}{3h(2C + B)}, \Delta \varepsilon_2 = \frac{(3C + 2B)\Delta N_{22} - B\Delta N_{11}}{3Bh(2C + B)}, \Delta \gamma = \frac{\Delta N_{12}}{Bh}.$$

Подставим выражения (2.9) в первое уравнение (2.4). Учитывая замену (2.7), имеем

$$(2.10) \quad (3C + 2B)F_{,1111} + 4(3C + B)F_{,1122} + 2BF_{,2222} + 3B(2C + B)W_{,11}h/R = 0.$$

Преобразуем второе уравнение системы (2.4). Приращения моментов вычислим, используя (2.6) и (2.8):

$$\Delta M_{11} = J((3C + 2B)W_{,11} + BW_{,22}), \Delta M_{22} = JB(W_{,11} + 2W_{,22}), \\ \Delta M_{12} = JBW_{,12}.$$

Здесь

$$J = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = h^3/12.$$

С учетом того, что в основном состоянии погонное усилие осевого сжатия $N_{11} = \sigma_{11}h$, имеем дифференциальное уравнение в частных производных для прогиба:

$$(2.11) \quad h^2[(3C + 2B)W_{,1111} + 4BW_{,1122} + 2BW_{,2222}]/12 + \sigma_{11}W_{,11} - F_{,11}/(Rh) = 0.$$

Критическую нагрузку осесимметричного выпучивания легко определить из системы (2.10), (2.11), если положить переменные W и F , не зависящими от окружной координаты x_2 , а прогиб выбрать в виде $W = U \sin \mu x_1$ ($\mu = m_1\pi/l$, m_1 — число полуволн по образующей). Опуская несложные в этом случае выкладки, включая минимизацию критической нагрузки по μ , находим

$$(2.12) \quad \sigma_{11} = (h/R)\sqrt{B(2C + B)} = \sigma^*.$$

Из сопоставления (2.8) и аналогичных соотношений для упругого несжимаемого материала получим, что в упругости $C = 0$, $B = 2E/3$. При этом из (2.12) следует известное выражение для критического напряжения упругой оболочки $\sigma_0 = 2hE/(3R)$.

Для анализа неосесимметричного выпучивания прогиб W и функцию напряжений F представим в виде $W = U \sin \mu x_1 \cdot \sin \eta x_2$, $F = \Phi \sin \mu x_1 \times \sin \eta x_2$ ($\eta = m_2/R$, m_2 — число волн в окружном направлении). При этом система (2.10), (2.11) примет вид

$$(2.13) \quad (\kappa + 12C\eta^2)\Phi - 3B(2C + B)hU/R = 0, \Phi/(Rh) + (h^2\kappa/12 - \sigma_{11})U = 0,$$

где

$$(2.14) \quad \kappa = \mu^2(3C + 2B) + 2\eta^2B(2 + \eta^2/\mu^2).$$

Приравняв определитель однородной системы (2.13) нулю, имеем

$$(h^2\kappa/12 - \sigma_{11})(\kappa + 12C\eta^2) + 3B(2C + B)/R^2 = 0.$$

Выразим отсюда напряжение

$$(2.15) \quad \sigma_{11} = \frac{3B(2C + B)}{R^2(\kappa + 12C\eta^2)} + \frac{h^2}{12} \kappa.$$

Найдем минимум σ_{11} по μ из условия

$$(2.16) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mu} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \mu} = 0.$$

Здесь возможны два случая. Пусть равен нулю первый сомножитель $\partial \sigma_{11} / \partial \kappa$. Дифференцируя (2.15), получим, что минимум σ_{11} достигается при $\kappa = 6\sigma^* / h^2 - 12C\eta^2$:

$$(2.17) \quad \sigma_{11} = \sigma^* - Ch^2\eta^2.$$

Рассмотрим другое решение, вытекающее из (2.16): $\partial \kappa / \partial \mu = 0$. Дифференцируя (2.14), получим, что экстремум приходится на значение $\mu^2 = \eta^2 \sqrt{2B} / (3C + 2B)$ или $\kappa = 2\eta^2 (\sqrt{2B(3C + 2B)} + 2B) = 2\eta^2 Z$ и соответствует величине

$$\sigma_{11} = \frac{3B(B + 2C)}{2R^2(Z + 6C)\eta^2} + \frac{1}{6} h^2 \eta^2 Z, \text{ где } Z = \sqrt{2B(3C + 2B)} + 2B.$$

Минимизируя это выражение по переменной η , найдем, что при $\eta^2 = 3 / (Rh) \sqrt{B(B + 2C) / [Z(Z + 6C)]}$ напряжение σ_{11} минимально:

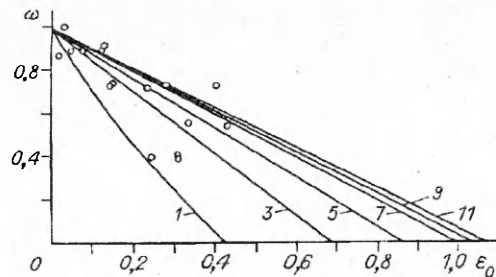
$$(2.18) \quad \sigma_{11} = \sigma^* \sqrt{Z / (Z + 6C)}.$$

Если $C < 0$, то нагрузка, полученная для неосесимметричного выпучивания (2.17) или (2.18), больше, чем для осесимметричного $\sigma_{11} = \sigma^*$. Это означает, что неосесимметричный случай не реализуется при $C < 0$.

При $C > 0$ необходимо рассматривать решения (2.17) и (2.18), выбирая из них меньшее по нагрузке. Качественное различие между этими решениями состоит в предсказываемой форме выпучивания. Так как с увеличением η σ_{11} по (2.17) при $C > 0$ возрастает, то, очевидно, необходимо взять наименьшее значение $\eta = 1/R$, что соответствует одной волне или боковому выпучиванию оболочки как стержня. Очевидно, при достаточно большом отношении h/R (в пределах, допускаемых технической теорией оболочек) решение (2.17) будет меньше, чем (2.18). Это и следовало ожидать: толстостенные длинные оболочки могут выпучиваться боковым образом как стержни, а на тонкостенных образуются вмятины. Однако практические расчеты показывают, что, как правило, реализуется решение (2.18).

3. Рассмотрим эксперимент [5] на выпучивание оболочек из сплава Д16Т при температуре 250 °С под действием осевых сжимающих нагрузок (данные оболочек № 18—32). Параметры α и n в [5] не приведены. Пользуясь представленными там кривыми ползучести, с помощью методики [4] определим реологические константы α и n в соотношении (1.4). Перестраивая эти кривые в логарифмических координатах и учитывая неизбежные погрешности, получим области, в которых находятся искомые параметры: $0,6 < \alpha < 0,8$; $3,5 < n < 4,2$. Возьмем $\alpha = 0,75$, $n = 4$.

Теоретические и экспериментальные результаты сопоставим в осях ω и ε_0 , где $\omega = \sigma_{11} / \sigma_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon p_{11} / \sigma_0$. В терми-



нах ε_0 и ω перепишем (1.34) с учетом (1.30):

$$(3.1) \quad C = \frac{E\varepsilon_0\omega a_N}{3(\varepsilon_0 + \omega)(\varepsilon_0 + (a_N + 1)\omega)}, \quad B = \frac{2E\omega}{3(\varepsilon_0 + \omega)}.$$

Корни нескольких первых полиномов $B_{n,1}$, от которых зависят особые точки, имеют следующие значения [1]:

$$(3.2) \quad \xi_1 = 0,75, \xi_3 = 1,865, \xi_5 = 2,998, \xi_7 = 4,140, \xi_9 = 5,286, \xi_{11} = 6,436.$$

У четных полиномов корней нет [1]. При выбранных реологических константах с учетом (3.2) вычислим значения коэффициентов a_N (1.30), соответствующих первым особым точкам: $a_1 = -0,813$, $a_3 = -0,534$, $a_5 = -0,251$, $a_7 = 0,035$, $a_9 = 0,322$, $a_{11} = 0,609$.

Форма выпучивания оболочки зависит от знака C . Из (3.1) легко видеть, что в данном случае для особых точек порядков 1, 3, 5 имеем $C < 0$, и, следовательно, реализуется осесимметричная форма выпучивания с критической нагрузкой (2.12). Подставив (3.1) в (2.12), находим

$$\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0\omega(a_N + 2) + (\omega^2 - 1)(a_N + 1) = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$(3.3) \quad \varepsilon_0 = (\pm \sqrt{4(a_N + 1) + \omega^2 a_N^2} - \omega(a_N + 2))/2.$$

Для того чтобы эйлеровой нагрузке $\omega = 1$ отвечало мгновенное выпучивание ($\varepsilon_0 = 0$), из двух решений необходимо брать физически оправданное решение со знаком плюс. Кривые 1, 3, 5 (см. рисунок) построены для особых точек соответствующих порядков по решению (3.3).

Особые точки ξ_7 , ξ_9 и ξ_{11} отвечают неосесимметричному выпучиванию. Из формул (2.17), (2.18), которые справедливы для критических параметров напряженно-деформированного состояния, как выясняется из расчетов, формула (2.18) дает меньшее напряжение при той же деформации ползучести. Кривые для особых точек ξ_7 , ξ_9 и ξ_{11} построены на основе численного решения уравнения, следующего из (2.18), куда подставлены выражения B и C (3.1). Координаты экспериментальных точек рассчитывали, исходя из эйлеровой нагрузки, полученной в опыте ($\sigma_0 = 98$ МПа). Таким образом приближенно учитывались начальные несовершенства оболочки.

Заметно характерное сгущение кривых, соответствующих особым точкам высоких порядков. Хотя верхней границы особых точек не существует, следует отметить, что сгущение критических кривых приходится на экспериментальные данные (или близко к ним, несмотря на их значительный разброс).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирсанов М.Н., Ключников В.Д. Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. — 1993. — № 3.
2. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
3. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. — 1957. — Т. 21, № 3.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.
5. Кузнецов А.П., Юнгерман Н.М. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек в условиях ползучести // ПМТФ. — 1965. — № 4.

г. Воронеж,
г. Москва

Поступила 12/X 1993 г.