



**НОРМИРОВАННАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ —
НОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УПАКОВОК ШАРОВ**

А. Ф. Ревуженко, А. П. Бобряков, В. П. Косых

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, v-kosykh@yandex.ru,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

Относительная плотность нормируется по отношению к теоретически максимальной плотности упаковки шаров, равной 0.7405. Приведены экспериментальные данные по изменению относительной плотности стеклянных калиброванных шаров в процессе циклических сдвигов.

Пористость, упаковка шаров, плотность упаковки, простой сдвиг, дилатансия

NORMALIZED DENSITY RATIO — A NEW CHARACTERISTIC OF SPHERE PACKINGS

A. F. Revuzhenko, A. P. Bobryakov, and V. P. Kosykh

*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, v-kosykh@yandex.ru,, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

The density ratio is normalized with respect to the theoretical maximum density ratio of a sphere packing, which is 0.7405. The experimental data show that the density ratio of a packing of sized glass balls changes during cyclical shearing.

Porosity, sphere packing, packing density, simple shear, dilatancy

Исследование различных упаковок шаров — одна из фундаментальных задач механики и теоретической математики. Достаточно сказать, что задача о наиболее плотной регулярной упаковке одинаковых шаров была сформулирована Кеплером в 1611 г. [1]. Ее решение получено в 1831 г. Гауссом, который показал, что среди регулярных самой плотной является упаковка с координационным числом 12. Относительная плотность такой упаковки равна

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.7405. \quad (1)$$

Полное решение задачи найдено только в наше время в 1998 г. [2]. Было показано, что плотность по Гауссу максимальна для любых упаковок одинаковых шаров. Весьма актуальны различные обобщения данной задачи: исследование упаковок неодинаковых шаров, цилиндров и других частиц, поиск оптимального грансостава, позволяющего получить возможно более плотные упаковки и т. д. [3–5]. В последние десятилетия задача синтеза и исследования упаковок приобрела новое звучание в связи с развитием метода дискретных элементов — метода, который используется для решения широкого круга задач горного дела [6, 7]. В рамках этого метода горная порода и сыпучие среды рассматриваются как некоторые упаковки отдельных твердых частиц. Между частицами задаются определенные потенциалы взаимодействия. Таким образом задачи деформирования и разрушения сводятся к задачам исследования эволюции

различных упаковок под действием приложенных сил. Возможности аналитических методов здесь весьма ограничены. В связи с этим на первое место выходят методы численного и физического моделирования. Данная работа выполнена в рамках второго направления.

Определение нормированной относительной плотности. Реальные упаковки имеют практически бесконечное число степеней свободы, поэтому их основные характеристики носят интегральный характер: это среднее координационное число, пористость Π , относительная плотность, или коэффициент заполнения пространства φ

$$\Pi = \frac{V_{\text{п}}}{V}, \quad \varphi = \frac{V_{\text{т}}}{V} = 1 - \Pi, \quad (2)$$

где V — общий объем; $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{т}}$ — объемы пор и твердых частиц; $e = V_{\text{п}}/V_{\text{т}}$ — коэффициент пористости

Известно, что во многих областях исследований большое значение имеют определенные размерные величины, которые могут играть роль естественного масштаба для некоторого класса явлений. Величины (2) — безразмерные. На первый взгляд кажется, что естественного масштаба для них нет. Однако если на формулу Гаусса (1) посмотреть с этой точки зрения, то возникает чрезвычайно простая идея — принять в качестве масштаба плотности теоретически максимальную плотность упаковок одинаковых шаров.

Положим

$$\varphi_{\text{н}} = \varphi_{\text{норм}} = \frac{\varphi}{\varphi_{\text{max}}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \varphi \quad (100\%). \quad (3)$$

Величину (3) назовем нормированной относительной плотностью упаковки, или короче — нормированной плотностью.

Во многих отношениях эта характеристика удобнее, чем относительная плотность φ . Во-первых, для упаковок одинаковых шаров всегда $\varphi_{\text{н}} \leq 1$ (или 100%). По этой величине сразу видно насколько далеко мы находимся от идеала $\varphi_{\text{н}} = 1$. Кроме того, по изменению величины $\varphi_{\text{н}}$ можно судить об эффективности тех или иных процедур по уплотнению упаковок. Можно ожидать, что по мере приближения $\varphi_{\text{н}}$ к 1 затраты на уплотнение упаковки, например, на 1% ($\Delta\varphi_{\text{н}} = 1\%$) будут расти по кривой близкой к гиперболе.

Изменение упаковок шаров при простом сдвиге. Указанные характеристики упаковок носят статический характер в том смысле, что они описывают некоторое фиксированное (“статическое”) состояние упаковки. Для решения задач геомеханики подобных параметров недостаточно. Здесь нужны “динамические” параметры, которые позволили бы описывать эволюцию упаковок при различных путях ее нагружения. Если учесть, что для получения только одного исчерпывающего “статического” результата потребовалось 400 лет, то ожидать в обозримом будущем появления “динамических” исчерпывающих результатов не приходится. С другой стороны, численным и экспериментальным моделированием можно получать сколько угодно частных результатов. Ничто не мешает затем обобщать их, привлекая либо методы континуальной механики, либо другие методы, например, теорию силовых цепочек, перколяции и др. [8–11]. Окончательные результаты будут носить приближенный, феноменологический характер, но для решения прикладных задач геомеханики этого вполне достаточно.

Для построения континуальных уравнений и выбора оптимальных моделей метода дискретных элементов наибольший интерес представляют экспериментальные данные об эволюции упаковок в некоторых простейших ситуациях деформирования. Ограничимся простым сдвигом упаковок шаров с использованием прибора однородного сдвига [12]. Рассмотрим изменение нормированной относительной плотности — кривые дилатансии. Все опыты проводились со стеклянными калиброванными шариками диаметром (1 ± 0.1) мм и плотностью 2.72 г/см^3 .

Исходная упаковка формировалась путем засыпки материала через воронку диаметром 16 мм. Воронка опускалась на дно камеры и, сканируя по площади дна, постепенно поднималась вверх. Размеры исходного образца $26 \times 26 \times 10.7$ см, начальная нормированная плотность $\varphi_n = 72.7\%$. Нагружение осуществлялось достаточно медленно (0.57 град/с) циклами из положения камеры A $\alpha = -2.3^\circ$ до положения B $\alpha = 0^\circ$ и затем до положения C $\alpha = +2.3^\circ$, после чего в обратном порядке через положение B' в положение A' . Далее перо самописца перебрасывалось в точку начала следующего цикла (точка A на диаграмме) и проводился второй цикл деформирования, потом третий и т. д. Типичный характер дилатансионных кривых представлен на рис. 1. Буквами показаны последовательные положения камеры сдвига в течение одного цикла деформирования и соответствующие им значения высоты образца. Цикл завершается в точке A' и далее происходит переброска пера самописца в точку A — начало следующего цикла

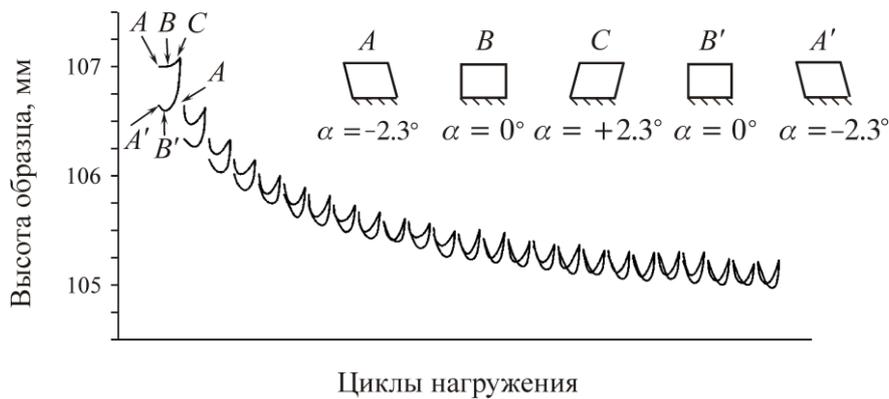


Рис. 1. Изменение высоты образца стеклянных шариков в течение первых 25 циклов сдвига

Вначале от цикла к циклу упаковка необратимо уплотняется, через 75 циклов переходит в практически стационарное обратимое состояние. При этом наибольшая ее плотность достигается в середине цикла при $\alpha = 0^\circ$. При увеличении сдвига от $\alpha = 0^\circ$ к $\alpha = \pm 2.3^\circ$ упаковка разрыхляется: $\varphi_n = 78\%$ при $\alpha = 0^\circ$ и $\varphi_n = 77.3\%$ при $\alpha = \pm 2.3^\circ$.

В экспериментах невозможно исключить влияние силы тяжести на все результаты. Сила тяжести приводит к неоднородности деформирования образца: нижние слои испытывают большую пригрузку, чем верхние. Этот факт должен учитываться при построении континуальных моделей. Неоднородность деформирования можно уменьшить, создавая на свободной поверхности пригрузку, которая не меняет характер дилатансионных кривых. Через 26 циклов после наложения пригрузки 2 кг упаковка переходит в стационарное и более плотное состояние $\varphi_n = 79.5\%$ (рис. 2).

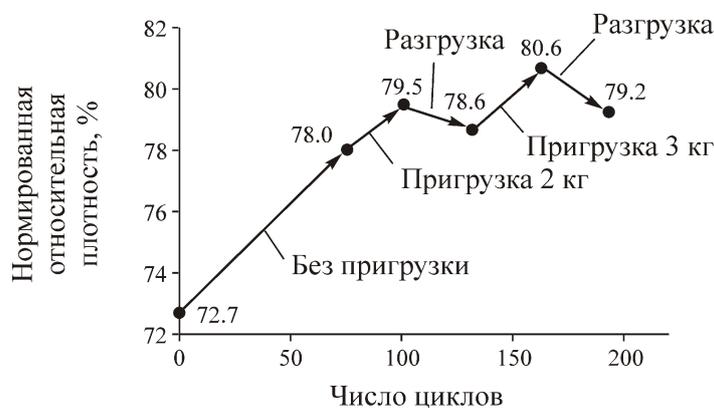


Рис. 2. Влияние пригрузки на изменение нормированной относительной плотности образца стеклянных шариков при циклических сдвигах

После снятия пригрузки упаковка разрыхляется, но в прежнее состояние все же не возвращается ($\varphi_n = 78.6\%$). Новая и большая пригрузка (3 кг) после 31 цикла уплотняет упаковку до $\varphi_n = 80.6\%$. После снятия пригрузки упаковка также разрыхляется, но с некоторым гистерезисом.

ВЫВОДЫ

Введенная в работе характеристика — нормированная относительная плотность является более удобной для работы, так как показывает насколько далеко достигнутая плотность находится от идеальной — максимальной плотности по Гауссу. Реальные стохастические упаковки, которые можно рекомендовать для использования в методе дискретных элементов, характеризуются нормированной плотностью в диапазоне 73–81 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Kepler I.** On the Six-Cornered Snowflakes, Moscow, Nauka, 1982. 192 pp. (in Russian) [**Кеплер И.** О шестиугольных снежинках. — М.: Наука, 1982. — 192 с.]
2. **Hale T. C.** An Overview of the Kepler Conjecture, 1998, arXiv:math/9811071v2.
3. **Hilbert D. and Cohn Vossen S.** Geometry and the Imagination, American Mathematical Society, 1952, 357 pp. [**Гильберт Д., Кон-Фоссен С.** Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981. — 344 с.]
4. **Dersevich G.** Mechanics of granular medium, Problems of Mechanics, Moscow, ИЛ, 1961, issue 3, pp. 91–152. (in Russian) [**Дересевич Г.** Механика зернистой среды // Проблемы механики. — М.: ИЛ, 1961. — Вып. 3. — С. 91–152.]
5. **Belov V. V., Obraztsov I. V., Ivanov V. K., and Konoplev E. N.** Computer-Aided Implementation of Engineering and Educational Problem Solution, Teaching Aid, Tver, Tver State Technical University, 2015, 108 pp. (in Russian) [**Белов В. В., Образцов И. В., Иванов В. К., Коноплев Е. Н.** Компьютерная реализация решения научно-технических и образовательных задач / Учеб. пособие. — Тверь: ТвГТУ, 2015. — 108 с.]
6. **He Y., Evans T. J., Yu A., and Yang R.** Discrete Modelling of Compaction of Non-spherical Particles, Powders and Grains, 8th International Conference on Micromechanics on Granular Media, 2017, vol. 140, 01005.
7. **Klishin S. V., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Numerical simulation of abutment pressure redistribution during face advance, AIP Conference Proceedings 1909, 020086 (2017).
8. **Allersma H. G.** Photo-elastic stress analysis and strains in simple shear, Deform. and Failure Granular Mater., Rotterdam, 1982, pp. 345–353.
9. **Drescher A. and de Josselin de Jong G.** Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1972, vol. 20, no. 5, pp. 337–351.
10. **Tarasevich Yu. Yu.** Percolation: Theory, Algorithms: Teaching Aid, Moscow, Editorial URSS, 2002, 112 pp. (in Russian) [**Тарасевич Ю. Ю.** Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Учеб. пособие. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 112 с.]
11. **Kocharyan G. G., Markov V. K., Ostapchuk A. A., and Pavlov D. V.** Mesomechanics of shear resistance in crack with filler, Physical Mesomechanics, 2013, vol. 16, no. 5, pp. 5–15. [**Кочарян Г. Г., Марков В. К., Остапчук А. А., Павлов Д. В.** Мезомеханика сопротивления сдвигу по трещине с наполнителем // Физическая мезомеханика. — 2013. — Т. 16. — № 5. — С. 5–15.]
12. **Bobryakov A. P., Revuzhenko A. F., Shemyakin E. I.** Uniform displacement of a granular material. Dilatancy, Journal of Mining Science, 1982, vol. 18, no. 5, pp. 373–379. [**Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Однородный сдвиг сыпучего материала. Дилатансия // ФТПРПИ. — 1982. — № 5 — С. 23–29.]