

$E_c$  не превышает 1,2%, т. е. составляет малую величину, меньшую погрешности совместных измерений усилий и деформаций.

Сопоставление  $E_p$  сплава ВТ1-1 для образцов, изготовленных из прутков разных диаметров, указывает на различие в модулях, достигающее 19,4% по отношению к наибольшему значению. Ради устранения этого образцы на растяжение и сжатие делали из одного прутка.

Проведенный анализ работ, в которых получены значительные расхождения значений  $E_p$  и  $E_c$  для одного и того же материала в одном и том же направлении, показывает, что они ошибочны. Корректно проведенные опыты дали практически одинаковые модули. Из последнего можно заключить, что основная гипотеза разномодульной теории упругости [1] не имеет опытного подтверждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. Д. Разномодульная теория упругости. М., 1982.
2. Калинка Ю. А., Боровинова С. М. Исследование физико-механических свойств хаотически наполненных стеклополиамидов. — Механика полимеров, 1971, № 3.
3. Регель В. Р., Бережкова Г. В. Влияние вида напряженного состояния на параметры кривых течения некоторых пластмасс. — В кн.: Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Дубов Г. А., Регель В. Р. Фотоэлектрооптический динамометр. — ЖТФ, 1955, т. 25, вып. 14.
5. Регель В. Р., Дубов Г. А. Регистрирующий прибор для записи кривых сжатия, растяжения и релаксации. Приборы и стенды. М., 1956.
6. Земляков И. П. О различии модулей упругости полиамидов при различных видах деформации. — Механика полимеров, 1965, № 4.
7. Жуков А. М. Упругие и прочностные свойства ЭДТ-10 и фторопласта-4. — В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1983, вып. 23.
8. Деревянко Н. И. Свойства армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе. — Механика полимеров, 1968, № 6.
9. Жуков А. М. Упругие, прочностные и деформационные свойства некоторых полимеров. — Механика композит. материалов, 1984, № 1.
10. Жигунова Н. А., Жуков А. М. и др. Исследование механических свойств высоконаполненного композитного материала на основе фурфуролацетонного связующего. — Механика композит. материалов, 1983, № 4.

Поступила 19/VI 1984 г.

УДК 539.3

### ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. А. Золочевский

(Харьков)

Механические характеристики различных сплавов, полимеров и композитов отличаются анизотропией и зависимостью от вида напряженного состояния. Эти особенности проявляются при мгновенном нагружении и с течением времени.

Построению определяющих уравнений ползучести анизотропных сред, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, посвящены работы [1, 2]. Вопросы упругого деформирования разномодульных анизотропных материалов рассмотрены в [3, 4].

Предложенный и обоснованный в [5] подход к описанию ползучести разносопротивляющихся материалов в данной работе распространяется на упругость анизотропных разномодульных сред.

#### 1. Для упругого потенциала

$$W = \sigma_e^2/2$$

эквивалентное напряжение  $\sigma_e$  ( $\sigma_e \geq 0$ ) принимается на основе линейного  $\sigma = b_{ij}\sigma_{ij}$  и квадратичного  $\sigma_e^2 = a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$  совместных инвариантов тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и тензоров упругой анизотропии  $b_{ij}$ ,  $a_{ijkl}$ , т. е. в виде  $\sigma_e = \sigma + \sigma_0$ . Тогда компоненты тензоров деформаций  $\varepsilon_{ij} = \partial W / \partial \sigma_{ij}$  и

напряжений оказываются связанными между собой в анизотропных разномодульных средах квазилинейными зависимостями

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \sigma_e(a_{ijkl}\sigma_{kl}/\sigma_0 + b_{ij}).$$

Из симметрии тензоров  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  следует симметрия  $a_{ijkl}$ ,  $b_{ij}$ , т. е.

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}.$$

Поэтому в определяющих уравнениях (1.1) число независимых постоянных  $a_{ijkl}$  уменьшается до 21 и констант  $b_{ij}$  до шести. Вследствие инвариантности выражений для  $\sigma$  и  $\sigma_0$  зависимости (1.1) сохраняют свой вид при переходе к новой системе координат, при этом тензоры  $b_{ij}$ ,  $a_{ijkl}$  преобразуются по правилам, обычным для тензоров второго и четвертого рангов:

$$(1.2) \quad b'_{ij} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{mn}, \quad a'_{ijkl} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{pk}\alpha_{ql}a_{mnpq}.$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  — направляющие косинусы углов между основными осями  $x_i$  и новыми осями  $x_j$ .

Для классических анизотропных сред линейный инвариант  $\sigma = 0$  и уравнения (1.1) превращаются в известные соотношения  $\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl}$ .

Если ортотропная разномодульная среда рассматривается в системе координат с осями, совпадающими с главными направлениями анизотропии, то физические зависимости (1.1) можно записать в виде

$$(1.3) \quad \varepsilon_{11} = \sigma_e \left( \frac{a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22} + a_{1133}\sigma_{33}}{\sigma_0} + b_{11} \right),$$

$$\varepsilon_{12} = 2\sigma_e \frac{a_{1212}\sigma_{12}}{\sigma_0} \quad (1, 2, 3), \quad \sigma_0^2 = a_{1111}\sigma_{11}^2 + 2a_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2a_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} +$$

$$+ 2a_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + a_{2222}\sigma_{22}^2 + a_{3333}\sigma_{33}^2 + 4a_{1212}\sigma_{12}^2 + 4a_{1313}\sigma_{13}^2 + 4a_{2323}\sigma_{23}^2,$$

$$\sigma = b_{11}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22} + b_{33}\sigma_{33}.$$

Для изотропной разномодульной среды справедливы соотношения

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = B^*, \quad a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = A^*,$$

$$a_{1212} = a_{1313} = a_{2323}, \quad a_{1122} = a_{1133} = a_{2233} = C^*,$$

$$a_{1111} = 2a_{1212} + a_{1122},$$

позволяющие получить из (1.3) уравнения

$$\varepsilon_{ij} = \sigma_e \left[ \frac{(A^* - 2C^*)J_1\delta_{ij} + 2C^*\sigma_{ij}}{\sigma_0} + B^*\delta_{ij} \right],$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $J_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij}$ ;  $J_2 = (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - J_1^2)/2$ ;  $\sigma = B^*J_1$ ;  $\sigma_0^2 = A^*J_1^2 + 4C^*J_2$ . Итак, физические зависимости в этом случае записываются на основе первого  $J_1$  и второго  $J_2$  инвариантов тензора напряжений и трех параметров  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  материала.

Таким образом, предложенные определяющие уравнения (1.1) обладают достаточной общностью и включают в себя ряд соотношений для различных сред.

Проведем сравнение теоретических результатов, вытекающих из зависимостей (1.3), с некоторыми экспериментальными данными. Для этого рассмотрим стеклопластик СВМ 5:1 (ортотропный разномодульный материал), для которого найдены [6] экспериментально модули упругости в главных направлениях 1,2 анизотропии (кг/мм<sup>2</sup>):  $E_1^t = 5220$ ,  $E_2^t = 1990$ ,  $E_1^c = 5450$ ,  $E_2^c = 3250$ . Здесь индекс  $t$  соответствует растяжению,  $c$  — сжатию. Тогда в координатных осях, совпадающих с направлениями 1,2, можно определить постоянные по формулам

$$a_{1111} = [(E_1^t)^{-1/2} + (E_1^c)^{-1/2}]^2/4, \quad b_{11} = [(E_1^t)^{-1/2} - (E_1^c)^{-1/2}]/2 \quad (1,2),$$

т. е.  $a_{1111} = 1,875 \cdot 10^{-4}$  мм<sup>2</sup>/кг,  $a_{2222} = 3,992 \cdot 10^{-4}$ ,  $b_{11} = 1,476 \cdot 10^{-4}$  (кг/мм<sup>2</sup>)<sup>-1/2</sup>,  $b_{22} = 2,438 \cdot 10^{-3}$ . В [6] также приведены экспериментально установленные модули упругости при растяжении и сжатии для плоских образцов, ориентированных под углом  $\pi/4$  к осям 1,2 (кг/мм<sup>2</sup>):  $E_{45}^r = 1510$ ,  $E_{45}^c = 1720$ . Принимая за базовые данные, кроме  $E_1^t$ ,  $E_2^t$ ,  $E_1^c$ ,  $E_2^c$ , также  $E_{45}^t$ , попробуем предсказать теоретически модуль упругости  $E_{45}^c$  и сравним его с экспериментальным значением. Действительно, для координатных осей, повернутых на  $\pi/4$  относительно направлений 1,2, запишем

$$\sqrt{a_{1111}} + b'_{11} = (E_{45}^t)^{-1/2}, \quad \sqrt{a_{1111}} - b'_{11} = (E_{45}^c)^{-1/2}.$$

Здесь штрихом помечены значения параметров в новой системе координат. Так как в соответствии с (1.2)  $b'_{11} = (b_{11} + b_{22})/2$ , то можно найти  $a'_{1111} = [(E_{45}^t)^{-1/2} - b'_{11}]^2$ , а затем  $E_{45}^c = (\sqrt{a'_{1111}} - b'_{11})^{-2}$ . Проводя указанные вычисления, получим теоретическое значение  $E_{45}^c = 1866$  кг/мм<sup>2</sup>. Совпадение с экспериментальным значением  $E_{45}^c = 1720$  кг/мм<sup>2</sup> в данном примере можно полагать удовлетворительным.

Выполненное сравнение теоретических и экспериментальных результатов нельзя считать достаточным для обоснования предложенных определяющих уравнений. Однако в силу отсутствия для разномодульных материалов экспериментальных данных при сложном напряженном состоянии [7] ограничимся проведенным сравнением, обосновывающим все же в какой-то степени непротиворечивость исходных теоретических предположений. Отметим, что ранее [5] при анализе ползучести анизотропных и изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, на основе подхода, аналогичного принятому в настоящей работе, получены теоретические результаты, удовлетворительно совпадающие с различными экспериментальными данными при двумерном напряженном состоянии. Это обстоятельство также придает уверенность в обоснованности использования полученных физических зависимостей (1.1), обладающих, кроме того, необходимой общностью и простотой.

2. Рассмотрим односвязное разномодульное анизотропное тело, на некоторой части поверхности которого заданы перемещения, а на остальной — поверхностные нагрузки, подвергнутое действию объемных сил. Известно [8, 9], что достаточным (но не необходимым) условием единственности решения краевой упругой задачи для этого тела является выполнение постулата Друккера в виде  $\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \geq 0$ . Так как невыполнение постулата иногда влечет неединственность решения [10], то выясним, какие ограничения накладываются этим условием на параметры в уравнениях (1.1).

Тогда получим

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\sigma_e (a_{ijkl}\sigma_{kl}/\sigma_0 + b_{ij}) + \sigma_e (a_{ijkl}\delta\sigma_{kl}\sigma_0 - a_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_0)/\sigma_0^2.$$

Далее образуем свертку

$$(2.1) \quad \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \delta\sigma_e (a_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij}/\sigma_0 + b_{ij}\delta\sigma_{ij}) + \sigma_e (a_{ijkl}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\sigma_0 - a_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_0)/\sigma_0^2.$$

Используя соотношения

$$\delta\sigma_e = \delta\sigma + \delta\sigma_0, \quad \delta\sigma = b_{ij}\delta\sigma_{ij}, \quad \sigma_0\delta\sigma_0 = a_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij},$$

перепишем равенство (2.1) в виде

$$(2.2) \quad \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = (\delta\sigma_e)^2 + \sigma_e [a_{ijkl}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl} - (\delta\sigma_0)^2]/\sigma_0.$$

Учитывая затем требование положительной определенности квадратичной формы  $\sigma_0^2 = a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ , имеем неравенство

$$a_{ijkl}S_{ij}S_{kl} > 0, \quad S_{ij} = \sigma_{ij}\sigma_0 - \delta\sigma_{ij}\sigma_0,$$

откуда следует условие

$$a_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} > (\delta \sigma_0)^2.$$

Используя это соотношение, а также  $(\delta \sigma_e)^2 \geq 0$ ,  $\sigma_0 > 0$  и естественное во всех физических уравнениях требование неотрицательности эквивалентного напряжения  $\sigma_e \geq 0$ , делаем из (2.2) вывод о справедливости  $\delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \geq 0$ . Отметим, что в многочисленных практических расчетах для разных материалов и различных случаев двумерного напряженного состояния неравенство  $\sigma_e = \sigma + \sigma_0 \geq 0$  всегда выполнялось. Поэтому, несмотря на то что это неравенство следует рассматривать как некоторое ограничение на параметры в предложенных зависимостях, можно считать, что постулат Друккера не накладывает жестких требований на использование данных определяющих уравнений.

3. Исследованию напряженно-деформированного состояния в конструкциях из анизотропных разномодульных материалов в литературе уделяется недостаточное внимание. Это связано как с некоторой сложностью используемых физических зависимостей, так и с недостаточной разработанностью численных методов решения возникающих нелинейных краевых задач.

Большое прикладное значение в настоящее время имеет теория оболочек из анизотропных разномодульных материалов, например стеклопластиков, углепластиков, металлопластиков. Однако пока решены [11, 12] лишь некоторые задачи для оболочек цилиндрической, конической и сферической форм. Не рассматривались оболочки более сложного очертания. Используемые методы решения к тому же, как правило, трудно распространить на оболочки другого типа.

Ниже излагаются с достаточной общностью постановка и методика решения краевых задач для тороидальных оболочек, выполненных из анизотропных разномодульных материалов.

Рассмотрим тороидальную оболочку в системе криволинейных ортогональных координат  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $z$ , совпадающих с направлениями главных кривизн. Здесь  $\alpha$  — угол между осью вращения и нормалью к образующей тора,  $\beta$  — окружная координата,  $z$  — нормальная координата, отсчитываемая в сторону внешней нормали к образующей оболочки. Нагружение предполагается осесимметричным. Материал тора считается ортотропным и разномодульным, главные направления анизотропии 1, 2, 3 полагаются совпадающими с направлениями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $z$ . Физическое состояние материала определяется значениями тензоров  $a_{ijkl}^*$ ,  $b_{ij}^*$ , входящих в закон (1.3).

Поскольку учет разномодульности материалов оболочки приводит к нелинейной задаче, постановку задачи необходимо выполнять, ориентируясь на используемую в дальнейшем схему ее линеаризации. В связи с этим вместо тора из конкретного материала с параметрами  $a_{ijkl}^*$ ,  $b_{ij}^*$  рассмотрим такие же тороидальные оболочки, но выполненные из материалов, характеризующихся тензорами  $a_{ijkl} = a_{ijkl}^*$ ,  $b_{ij} \in [0, b_{ij}^*]$ . Далее будем излагать постановку краевых задач применительно к классу оболочек из некоторых анизотропных материалов, имеющих одни и те же значения  $a_{ijkl}$  и различающихся тензором  $b_{ij}$ . Геометрические размеры и нагрузки для всех торов одни и те же. Введем параметр  $t$ , определяющий различное физическое состояние материалов рассматриваемых оболочек.

Статические уравнения запишем в виде

$$(3.1) \quad K \frac{dT_{11}}{d\alpha} + C (\dot{T}_{11} - \dot{T}_{22}) + K \dot{Q}_{11} + \dot{q}_1 = 0,$$

$$K \frac{dQ_{11}}{d\alpha} + C \dot{Q}_{11} - K \dot{T}_{11} - \frac{T_{22} \sin \alpha}{B} + \dot{q}_3 = 0,$$

$$K \frac{dM_{11}}{d\alpha} + C (\dot{M}_{11} - \dot{M}_{22}) - \dot{Q}_{11} = 0,$$

где  $K = 1/R$ ;  $B = d + R \sin \alpha$ ;  $C = \cos \alpha/B$ ;  $R$ ,  $d$  — размеры оболочки (фиг. 1);  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  — осевые усилия;  $M_{11}$  и  $M_{22}$  — изгибающие моменты;  $Q_{11}$  — перерезывающее усилие;  $q_1$  и  $q_3$  — поверхностные нагрузки в направлении  $\alpha$  и  $z$ ; точкой обозначено дифференцирование по параметру  $t$ .

Кинематические зависимости имеют вид

$$(3.2) \quad \dot{\varepsilon}_{11} = \dot{e}_1 + z\dot{\kappa}_1(1,2);$$

$$(3.3) \quad \dot{e}_1 = K\dot{u}/d\alpha + K\dot{v}, \quad \dot{e}_2 = C\dot{u} + \dot{v} \sin \alpha/B,$$

$$\dot{\kappa}_1 = Kd\dot{\theta}/d\alpha, \quad \dot{\kappa}_2 = C\dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = -K\dot{v}/d\alpha + K\dot{u},$$

где  $e_1$ ,  $e_2$  и  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  — деформации и изменения кривизн срединной поверхности;  $u$  и  $v$  — перемещения в направлении  $\alpha$  и  $z$ ;  $\theta$  — угол поворота нормали к меридиану.

Получим физические уравнения для рассматриваемого класса тороидальных оболочек на основе зависимостей (1.3), записанных для двумерного напряженного состояния. В этой связи конкретизируем параметр  $t$ , считая, что в (1.3) компоненты  $a_{ijhl}$  не зависят от  $t$ , а для компонент  $b_{ij}$  справедливы равенства

$$b_{11} = t \operatorname{sign}(b_{11}^*), \quad b_{22} = t |b_{22}^*/b_{11}^*| \operatorname{sign}(b_{22}^*).$$

Таким образом, аргумент  $t$  определяется выражением  $t = |b_{11}|$ . Затем, продифференцировав уравнения (1.3) по  $t$ , имеем

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon}_{11} = \Delta_{11}\dot{\sigma}_{11} + \Delta_{12}\dot{\sigma}_{22} + \Delta_1(1,2),$$

$$\text{где} \quad \Delta_{11} = (1 + \chi) a_{1111} + 2b_{11}(a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22})/\sigma_0 - \\ - \sigma(a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22})^2/\sigma_0^3 + b_{11}^2,$$

$$\Delta_{12} = (1 + \chi) a_{1122} + b_{22}(a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22})/\sigma_0 + b_{11}(a_{1122}\sigma_{11} + \\ + a_{2222}\sigma_{22})/\sigma_0 - \sigma(a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22})(a_{1122}\sigma_{11} + a_{2222}\sigma_{22})/\sigma_0^2 + b_{11}b_{22},$$

$$\Delta_1 = (a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22})(b_{11}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22})/\sigma_0 + \\ + 2b_{11}\dot{b}_{11}\sigma_{11} + b_{11}\dot{b}_{22}\sigma_{22} + b_{22}\dot{b}_{11}\sigma_{22} + \dot{b}_{11}\sigma_0(1,2), \\ \chi = \sigma/\sigma_0, \quad \dot{b}_{11} = \operatorname{sign}(b_{11}^*), \quad \dot{b}_{22} = |b_{22}^*/b_{11}^*| \operatorname{sign}(b_{22}^*).$$

Из (3.4) следуют зависимости

$$(3.5) \quad \dot{\sigma}_{11} = E_{11}(\dot{\varepsilon}_{11} - \Delta_1) + E_{12}(\dot{\varepsilon}_{22} - \Delta_2) \quad (1,2),$$

где

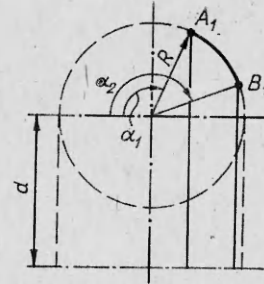
$$E_{11} = \Delta_{22}/\Delta, \quad E_{12} = -\Delta_{12}/\Delta \quad (1,2), \quad \Delta = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2.$$

Далее, переходя к интегральным характеристикам по толщине  $h$  оболочки

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_{11} dz, \quad M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_{11} z dz \quad (1,2),$$

получим с учетом (3.2) физические уравнения в виде

$$(3.6) \quad T_{11} = B_{11}\dot{e}_1 + B_{12}\dot{e}_2 + A_{11}\dot{\kappa}_1 + A_{12}\dot{\kappa}_2 + T_1^p, \\ M_{11} = A_{11}\dot{e}_1 + A_{12}\dot{e}_2 + D_{11}\dot{\kappa}_1 + D_{12}\dot{\kappa}_2 + M_1^p \quad (1,2).$$



Ф и г. 1

Здесь

$$(B_{ij}, A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2),$$

$$(T_1^p, M_1^p) = - \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) K_1 dz,$$

$$K_1 = E_{11} \Delta_1 + E_{12} \Delta_2 \quad (1, 2).$$

Итак, основные зависимости для тороидальных оболочек представлены соотношениями (3.1), (3.3), (3.6). Введя в рассмотрение вектор  $\dot{y} = (T_{11}, \dot{Q}_{11}, \dot{M}_{11}, \dot{u}, \dot{v}, \dot{\theta})$ , их можно свести к разрешающей системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(3.7) \quad K dy_i/d\alpha = f_i + F_i + b_i \quad (i = \overline{1, 6}),$$

где  $f_1 = C(T_2^e - \dot{y}_1) - K\dot{y}_2$ ,  $f_2 = -C\dot{y}_2 + K\dot{y}_1 + \sin \alpha T_2^e/B$ ,

$$f_3 = C(M_2^e - \dot{y}_3) + \dot{y}_2, \quad f_4 = e_1^e - K\dot{y}_5, \quad f_5 = K\dot{y}_4 - \dot{y}_6,$$

$$f_6 = \kappa_1^e, \quad F_1 = CT_2^*, \quad F_2 = T_2^* \sin \alpha/B, \quad F_3 = CM_2^*,$$

$$F_4 = e_1^*, \quad F_5 = 0, \quad F_6 = \kappa_1^*, \quad b_1 = -\dot{q}_1,$$

$$b_2 = -\dot{q}_3, \quad b_j = 0 \quad (j = \overline{3, 6}), \quad \kappa_2 = C\dot{y}_6,$$

$$e_2 = C\dot{y}_4 + \dot{y}_5 \sin \alpha/B, \quad \kappa_1^e = [(\dot{y}_3 - A_{12}e_2 - D_{12}\kappa_2) B_{11} -$$

$$- (\dot{y}_1 - B_{12}e_2 - A_{12}\kappa_2) A_{11}] / \Delta^*,$$

$$e_1^e = (\dot{y}_1 - B_{12}e_2 - A_{11}\kappa_1^e - A_{12}\kappa_2) / B_{11},$$

$$\kappa_1^* = (T_1^p A_{11} - M_1^p B_{11}) / \Delta^*, \quad T_2^* = B_{12}e_1^* + A_{12}\kappa_1^* + T_2^p,$$

$$M_2^* = A_{12}e_1^* + D_{12}\kappa_1^* + M_2^p, \quad e_1^* = -(A_{11}\kappa_1^* + T_1^p) / B_{11},$$

$$\Delta^* = D_{11}B_{11} - A_{11}^2, \quad T_2^e = B_{22}e_2 + B_{12}e_1^e + A_{22}\kappa_2 + A_{12}\kappa_1^e, \quad M_2^e =$$

$$= A_{22}e_2 + A_{12}e_1^e + D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1^e.$$

Добавим к зависимостям (3.7) однородные краевые условия при  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ :

$$(3.8) \quad y_k(\alpha_1)\gamma_k + y_{k+3}(\alpha_1)(1 - \gamma_k) = 0 \quad (k = \overline{1, 3}),$$

$$y_k(\alpha_2)\gamma_{k+3} + y_{k+3}(\alpha_2)(1 - \gamma_{k+3}) = 0 \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Массив  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ), состоящий из нулей и единиц, определяет тип граничных условий.

Сформулированная нелинейная краевая задача (3.7), (3.8) должна рассматриваться совместно с задачей Коши для дифференциальных уравнений (3.5) и зависимостей

$$(3.9) \quad dy_i/dt = y_i \quad (i = \overline{1, 6}).$$

Аргумент  $t$  при этом изменяется от нуля до значения  $t_* = |b_{11}^*|$ . Начальные условия для (3.5), (3.9) определяются решением линейной краевой задачи для тора из анизотропного неравномодульного материала, которая записывается на основе (3.7), (3.8), если вместо скоростей рассматривать сами величины, считать  $T_1^p = T_2^p = M_1^p = M_2^p = 0$  и присвоить коэффициентам  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  их классические значения [13]. Решая эту краевую задачу численно устойчивым методом дискретной ортогонализации Годунова, находим компоненты  $y_j$  ( $j = \overline{1, 6}$ ) и напряжения для  $t = 0$ . Да-

лее выполняем интегрирование начальной задачи для (3.5), (3.9) методом Кутты — Мерсона, т. е. если систему уравнений (3.5), (3.9) записать в виде

$$dR_k/dt = \Phi_k(R_j, t), \quad \mathbf{R} = \{\sigma_{11}(\alpha, z), \sigma_{22}(\alpha, z), y_1(\alpha), y_2(\alpha), \dots, y_6(\alpha)\},$$

то искомые функции в каждой точке оболочки для последующего момента  $t + \Delta t$  вычисляются по формулам

$$R_k(t + \Delta t) = R_k(t) + (r_1^k + 4r_4^k + r_5^k)/2 + o(\Delta t)^5,$$

где

$$r_1^k = \Phi_k[t, R_j(t)] \Delta t/3,$$

$$r_2^k = \Phi_k[t + \Delta t/3, R_j(t) + r_1^j] \Delta t/3,$$

$$r_3^k = \Phi_k[t + \Delta t/3, R_j(t) + (r_1^j + r_2^j)/2] \Delta t/3,$$

$$r_4^k = \Phi_k[t + \Delta t/2, R_j(t) + 3(r_1^j + 3r_3^j)/8] \Delta t/3,$$

$$r_5^k = \Phi_k[t + \Delta t, R_j(t) + 3(r_1^j - 3r_3^j + 4r_4^j)] \Delta t/3.$$

При этом для подсчета правых частей требуется пятикратное решение краевых задач (3.7), (3.8), проводимое методом дискретной ортогонализации Годунова. Такая комбинация двух указанных численных методов применяется во всем интервале интегрирования по аргументу  $t$  и составляет основу предлагаемого подхода к расчету оболочек из разномодульных материалов.

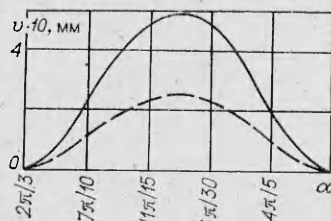
Начальный шаг  $\Delta t$  задается, а в дальнейшем его величина выбирается автоматически из условия неперевышения накапливающейся в расчете погрешности

$$\varepsilon = \max_k (r_1^k - 9r_3^k/2 + 4r_4^k - r_5^k/2)$$

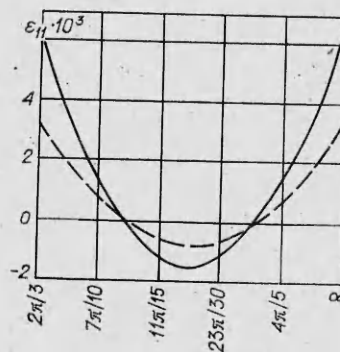
некоторого заданного значения  $\delta$ . При этом используется следующий критерий изменения шага: если  $\varepsilon > \delta$ , то шаг  $\Delta t$  уменьшается в 2 раза и вычисления повторяются; если  $\varepsilon < \delta/32$ , то шаг удваивается и вычисления продолжаются.

Интегралы по толщине тора определяются по формуле Симпсона. Численное решение заканчивается после выхода на значение  $t_*$ . Соответствующие этому значению напряжения и компоненты  $y_k$  являются найденными решениями, так как они отыскиваются для тороидальной оболочки с параметрами  $a_{ij}^*$ ,  $b_{ij}^*$ .

В качестве примера рассмотрим тороидальный сегмент (см. фиг. 1) с размерами  $h = 10$  мм,  $R = 232$  мм,  $d = 400$  мм,  $\alpha_1 = 2\pi/3$ ,  $\alpha_2 = 5\pi/6$ . Оболочка находится под действием равномерного внутреннего давления  $q_3 = 0,4$  кг/мм<sup>2</sup>. Оба края тора, соответствующие на фиг. 1 точкам  $A_1$ ,  $B_1$ , жестко заземлены. Материал оболочки — стеклопластик с модулями упругости (кг/мм<sup>2</sup>)  $E_1^t = 6000$ ,  $E_1^c = 2000$ ,  $E_2^t = 3000$ ,  $E_2^c = 1500$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_1^t = 0,25$ , соответствующими параметрам  $a_{1111} =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$= 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2/\text{кг}, a_{2222} = 4,86 \cdot 10^{-4}, a_{1122} = 9,76 \cdot 10^{-6}, b_{11} = -4,73 \cdot 10^{-3} (\text{кг}/\text{мм}^2)^{-1/2}, b_{22} = -3,78 \cdot 10^{-3}.$$

На фиг. 2 показано распределение нормального перемещения по образующей тора. Фиг. 3 иллюстрирует изменение деформации  $\varepsilon_{11}$  по внутренней поверхности тороидального сегмента. Указанные зависимости изображены сплошными линиями, штриховыми — аналогичные результаты для тора из анизотропного неразноמודульного материала с константами  $E_1^t = E_1^c = 6000$ ,  $E_2^t = E_2^c = 3000$ ,  $\nu_1^t = 0,25$ . Заметно существенное влияние разноמודульности на результаты.

В расчетах оболочки принималось 55 точек по образующей (из них одиннадцать точек ортогонализации) и семь точек по толщине. Интегрирование по параметру  $t$  проводилось с точностью, позволившей сохранить верными четыре значащих цифры для напряжений. Указанные данные устанавливались в ходе численных экспериментов.

Время решения рассмотренного примера по описанному выше алгоритму на ЭВМ БЭСМ-6 составило 5 мин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соснин О. В. О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1970, № 5.
2. Никитенко А. Ф., Цвелодуб И. Ю. О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979, вып. 43.
3. Амбарцумян С. А. Основные уравнения и соотношения разноמודульной теории упругости анизотропного тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
4. Ломакин Е. В. Соотношение теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которого зависят от вида напряженного состояния.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3.
5. Золочевский А. А. Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов.— ПМТФ, 1982, № 4.
6. Саркисян Н. Е. Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВАН.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 3.
7. Амбарцумян С. А. Разноמודульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
8. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
9. Цвелодуб И. Ю. К разноמודульной теории упругости изотропных материалов.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1977, вып. 32.
10. Цвелодуб И. Ю. О построении определяющих уравнений установившейся ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3.
11. Исабекиян Н. Г. Две задачи осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из ортотропного разноמודульного материала.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т. 26, № 6.
12. Азарова Г. Н. Расчет оболочек из разноמודульного материала методом переменных параметров упругости.— В кн.: Тр. XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Ереванский ун-т, 1980, т. 1.
13. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций/А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченко, А. Н. Фролов. М.: Машиностроение, 1975.

Поступила 12/IV 1984 г.

УДК 539.375

#### МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКИХ СРЕД

О. В. КОВАЛЕНКО, В. К. СИРОТКИН

(Москва)

Поведение материалов под действием различных нагрузок существенно зависит от характера пластического течения, который определяется внутренней структурой материала, наличием в нем различных дефектов, неоднородностей и т. п. Например, механизм пластического течения металлов связан в основном с движением дислокаций [1, 2]. Разрушение хрупких сред определяется наличием в них микротрещин, приводящих к концентрации напряжений в вершине трещины, где образуется пластическая зона [3]. Поэтому в хрупких средах пластическое течение оказывается микроскопически неоднородным, что существенно отличает их от пластических сред. На необходимость учитывать наличие внутренних неоднородностей при описании деформаций и разрушения хрупких сред указано в [4]. В данной работе предполагается, что носителями таких неоднородностей в хрупких средах являются микротрещины.