

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
2. Мержанов А. Г., Столин А. М. Гидродинамические аналоги явлений воспламенения и потухания.— ПМТФ, 1974, № 1.
3. Семенов Н. Н. Тепловая теория горения и взрывов.— «Усп. физ. наук», 1940, т. 23, вып. 3.

УДК 532.592

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Б. Н. Гончаренко, А. Л. Уринцев

(Ростов-на-Дону)

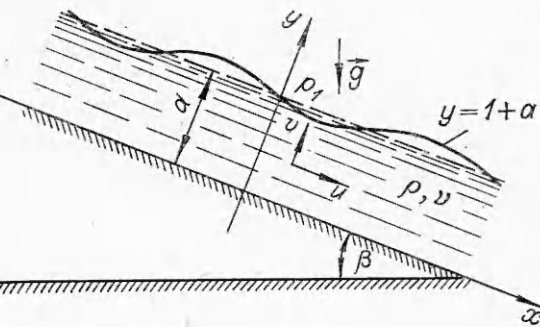
В линейной постановке на основе уравнений Навье — Стокса изучается устойчивость слоя вязкой жидкости, стекающей по твердой поверхности под действием силы тяжести, а также влияние на границы устойчивости поверхностного натяжения и угла наклона твердой стенки. Рассчитаны кривые нейтральной устойчивости относительно двух типов возмущений — поверхностных волн и волн сдвига.

1. Постановка задачи. Начало подробному изучению волнового течения слоя вязкой жидкости по наклонной плоскости было положено работами П. Л. Капицы и С. П. Капицы [1, 2]. В работах [3–6] вопрос об устойчивости стекания пленки со свободной поверхностью сводится к задаче на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда, что позволяет рассчитать границы устойчивости на плоскости параметров. Одна из границ, соответствующая возмущениям типа поверхностных волн, найдена в [3–5] аналитически для малых αRe . Существование второй границы, соответствующей возмущениям типа волн сдвига, впервые отмечается в [3], расчет этой нейтральной кривой проведен в работе [6] с использованием асимптотики больших αRe .

Исследованию нелинейной задачи посвящены работы [7–10], последняя из которых содержит обширный список литературы по вопросам нелинейной устойчивости падающей пленки.

Рассмотрим слой вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по плоской поверхности, наклоненной к горизонту под углом $0 < \beta \leq 90^\circ$ (фиг. 1). Предположим, что на свободной границе действует поверхностное натяжение с коэффициентом σ .

Примем за единицы длины, времени и массы соответственно величины d , $d^2\nu^{-1}$ и ρd^3 , где d — средняя толщина слоя; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность, и введем



Фиг. 1

безразмерные параметры $Re = 0,5 \sin \beta g d^3 \nu^{-2}$ — число Рейнольдса; $W = \sigma d \rho^{-1} \nu^{-2}$ — число Вебера. Будем искать решения уравнений гидродинамики, имеющие по x заданный период $2\pi/\alpha$, в безразмерном виде. Течение жидкости вызвано влиянием силы тяжести. Средний по периоду продольный градиент давления, который, как это видно из уравнений движения, не зависит от y , считаем равным нулю:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0.$$

На свободной поверхности $y = 1 + a(x, t)$ выполняются динамические и кинематические условия [11]: $P_{nn} + P_1 = Wa(1+a^2)^{-3/2}$; $P_{nt} = 0$; $a_t + ua_x = v$, где t — время; $a(x, t)$ —

Возмущение свободной границы; P_{nm} , $P_{n\tau}$ — нормальное и касательное напряжения; $p_1 = \text{const}$ — атмосферное давление; u и v — компоненты скорости, исчезающие на твердой стенке. В этих условиях существует стационарное плоскопараллельное течение

$$(1.1) \quad u_0 = \text{Re} U(y); \quad v_0 = 0; \quad p_0 = p_1 + \text{Re} U' \text{ctg } \beta (U = 2y - y^2)$$

с невозмущенной свободной границей $a = 0$.

Линеаризуя уравнения движения в форме Громека — Ламба в окрестности течения (1.1) и разыскивая решения, пропорциональные $\exp i\alpha(x - \text{Re}ct)$, приходим к задаче на собственные значения относительно параметра c :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u' - \alpha^2 v - \omega; \quad v' = -u; \quad u(0) = v(0) = 0; \quad v(1) = \text{Re}(1 - c)a; \\ \omega' = i\alpha \text{Re}(cu - U'v) - i\alpha h; \quad h' = \text{Re} U' u - \alpha^2 \text{Re} cv + (i\alpha - \text{Re} U)\omega; \\ h + (2i\alpha - \text{Re})u - (2\text{Re} \text{ctg } \beta + \alpha^2 W)a = 0; \quad \omega + 2\alpha^2 v + 2\text{Re}a = 0, \quad (y = 1). \end{aligned}$$

Здесь u , $i\alpha v$, ω , h , a — соответственно амплитуды возмущения продольной и поперечной скорости, вихря, полного давления и свободной границы.

2. Результаты вычислений. Для расчета нейтральных кривых в широком диапазоне изменения параметров (фактические вычисления были проведены для $0 \leq \alpha \leq 24$, $0 < \text{Re} \leq 10^5$) удобно использовать метод дифференциальной прогонки, предложенный в [12].

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \omega \\ h \end{pmatrix}; \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ A_{21} = \begin{pmatrix} i\alpha \text{Re} c & -i\alpha \text{Re} U' \\ \text{Re} U' & -\alpha^2 \text{Re} c \end{pmatrix}; \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha \\ i\alpha - \text{Re} U & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и запишем систему (1.2) в виде

$$(2.1) \quad \mathbf{q}'_s = A_{s1} \mathbf{q}_1 + A_{s2} \mathbf{q}_2, \quad (s = 1, 2).$$

Полагая затем в (2.1) $\mathbf{q}_1 = G\mathbf{q}_2$ и учитывая условия прилипания, находим 2×2 -матрицу $G(y)$ как решение задачи Коши:

$$(2.2) \quad G' = A_{11}G + A_{12} - GA_{21}G - GA_{22}, \quad G(0) = 0.$$

Граничным условиям на свободной поверхности придадим матричную форму:

$$\begin{aligned} B_1 \mathbf{q}_1(1) + B_2 \mathbf{q}_2(1) + Na = 0; \\ B_1 = \begin{pmatrix} 2i\alpha - \text{Re} & 0 \\ 0 & -2\alpha^2 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} -2\text{Re} \text{ctg } \beta - \alpha^2 W \\ -2\text{Re} \\ \text{Re}(1 - c) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

откуда после подстановки $\mathbf{q}_1(1) = G(1)\mathbf{q}_2(1)$ получаем комплексное уравнение

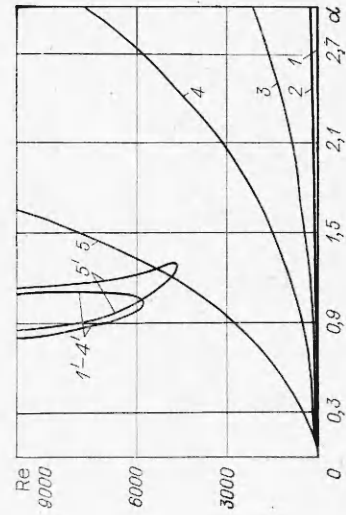
$$F \equiv \det \| M \| N \| = 0; \quad M = B_1 G(1) + B_2,$$

которое сводится к системе двух вещественных уравнений

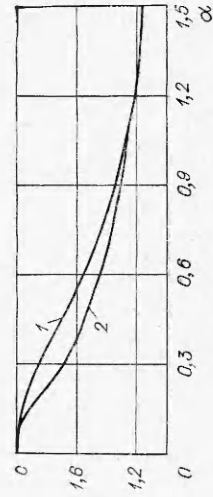
$$(2.3) \quad F_r(\alpha, \text{Re}, c, \beta, W) = 0; \quad F_i(\alpha, \text{Re}, c, \beta, W) = 0$$

относительно значений параметров на кривой нейтральной устойчивости (с вещественно). Решение системы (2.3) находилось методом Ньютона с аппроксимацией частных производных конечными разностями, численное интегрирование дифференциального уравнения (2.2) проводилось стандартным методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага. Для нахождения корней была использована процедура движения по параметру α или Re : при фиксированных β и W вычислялись неявные функции $c(\alpha)$, $\text{Re}(\alpha)$ или $c(\text{Re})$, $\alpha(\text{Re})$, начальные приближения для метода Ньютона предсказывались с помощью экстраполяции по Эйткену. Шаг по параметру выбирался автоматически в зависимости от количества итераций, необходимого для достижения заданной точности, что позволило сократить время вычислений.

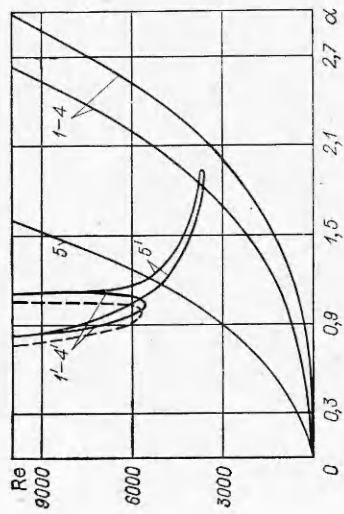
Расчет проводился для значений числа Вебера, приведенных в таблице (физические постоянные взяты при $t = 20^\circ\text{C}$ из [13]), при средней толщине слоя $d = 10^{-3}$ м. На фиг. 2, 3 иллюстрируется влияние поверхностного натяжения на границы устойчивости. Здесь представлено два вида нейтральных кривых: нижние (1, 2 и т. д.) соответствуют возмущениям типа поверхностных волн, верхние (1', 2' и т. д.) — возмущениям типа волн сдвига. Кривые 1 и 1', 2 и 2' и т. д. рассчитаны при фиксированном угле наклона (фиг. 2 — $\beta = 1^\circ$; фиг. 3 — $\beta = 90^\circ$) для чисел Вебера, взятых соответственно из строк № 1—5 таблицы. Для сравнения на фиг. 2 штрихами нанесена нейтраль-



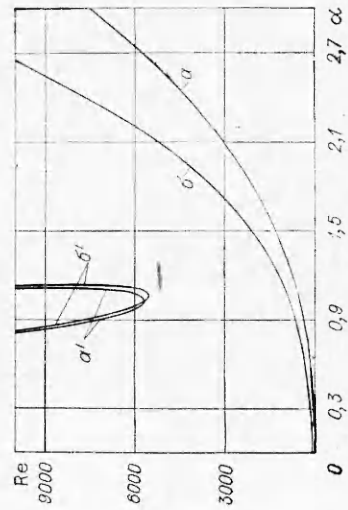
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 2



Фиг. 4

№ п/п	Жидкость	$\sigma \cdot 10^3, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\nu \cdot 10^5, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$W = \frac{\sigma d}{\rho \nu^2}$
1	—	0	Произвольная	Произвольная	0
2	Глицерин	59,4	1 259	117 500	0,0342
3	Этиловый спирт	22,8	790	220	5 962
4	Вода	72,75	1 000	102	72 750
5	Ртуть	460	13 550	11,4	261 · 10 ⁴

ная кривая, полученная в [6] асимптотическим методом в приближении $\alpha \text{Re} \gg 1$ ($W = 0$, $\beta = 1^\circ$). В соответствии с работой [3] расчет подтвердил, что для случая вертикальной стенки ($\beta = 90^\circ$) и $W = 0$ ось $\text{Re} = 0$ является кривой нейтральной устойчивости относительно поверхностных волн (см. фиг. 3, кривая 1). На фиг. 4 изображены нейтральные кривые двух типов при $W = 72750$ (вода). Границы устойчивости a и a' построены для угла наклона $\beta = 90^\circ$; δ и δ' — для $\beta = 1^\circ$. В соответствии с асимптотикой малых α , полученной в работах [3–5], нейтральные кривые для поверхностных волн выходят из точки $\alpha = 0$, $\text{Re} = 1,25 \text{ctg } \beta$ и, как показал расчет, уходят в бесконечность с ростом α тем круче, чем больше W (или меньше угол β). Увеличение поверхностного натяжения (уменьшение угла наклона) оказывает на нейтральные кривые второго типа, имеющие вид «языка», противоположное действие: кривые опускаются вниз, что позволяет говорить об эффекте дестабилизации. При малых W дестабилизирующее действие слабое, с ростом W оно усиливается. Когда число Рейнольдса становится большим (порядка 10^5), кривые второго семейства, построенные для различных значений β и W , практически совпадают. Важно отметить, что при достаточно большом W (достаточно малом β) нейтральные кривые двух типов пересекаются (см. фиг. 2, 3), образуя интервал волновых чисел, в котором роль наиболее опасных возмущений переходит к волнам сдвига.

Зависимость фазовой скорости поверхностных волн от волнового числа представлена графически на фиг. 5 (в качестве единицы выбрана максимальная скорость параллельного течения). Кривые 1, 2 ($\beta = 45^\circ$) соответствуют $W = 0$; $2,35 \cdot 10^6$. Скорость распространения коротковолновых возмущений, как показывают вычисления, мало отличается от единицы — значения скорости основного потока на свободной поверхности (например, на кривой 1 при $\alpha = 23,5$; $c = 1,0007$). Аналогичный результат в другой задаче со свободной границей получен в [14].

В опытах с водой и этиловым спиртом [2], в частности, измерялось критическое число Рейнольдса, ниже которого волновой режим при стекании жидкой пленки не развивался. Измерения дали для воды ($W = 7400$) $\alpha = 0,092$, $\text{Re} = 8,06$; для спирта ($W = 1145$) $\alpha = 0,143$, $\text{Re} = 5,02$. Критические числа Рейнольдса, рассчитанные на ЭВМ БЭСМ-4 и М-222, при волновых числах, взятых из данных опыта, оказались равными: 6,35 для воды и 3,97 для спирта, что несколько ниже экспериментальных критических значений.

Поступила 31 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 3—28.
- Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1949, т. 19, с. 105—120.
- Gih C. S. Stability of liquid flow down an inclined plane.—«Phys. Fluids», 1963, v. 6, 321—334. (Рус. пер. «Механика», 1963, № 5 (81), с. 77—100).
- Brooke V. Wave formation in laminar flow down on inclined plane.—«Z. Fluid Mech.», 1957, v. 2, p. 554—575.
- Иванов Ю. П. Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 280—281.
- Lin S. P. & instability of a liquid film flowing down an inclined plane.—«Phys. Fluids», 1967, v. 10, № 2, p. 308—313.
- Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости.— ПМТФ, 1962, № 4, с. 60—67.
- Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонких жидких пленок под действием силы тяжести.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 1, с. 43—51.
- Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкой пленки жидкости.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1968, № 2, с. 20—25.

10. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.—«Научные труды Ин-та механики МГУ», 1973, вып. 25.
11. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Изд-во АН СССР, 1952.
12. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость течения в кольцевом канале.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 4, с. 102—108.
13. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Физматгиз, 1963.
14. Гончаренко Б. Н., А. Л. Уринцев. Об устойчивости движения жидкости, вызванного термокапиллярными силами.— ПМТФ, 1971, № 6, с. 94—98.

УДК 532.546

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Изучается растекание бугра грунтовых вод в области между двумя параллельными каналами с разными уровнями воды (H_1 при $x=0$ и H_2 при $x=L$) при поливе с учетом испарения. Испарение учитывается в зависимости от глубины грунтовых вод $h(x, t)$: его интенсивность предполагается равной нулю при $h < h_0$, где h_0 — критический уровень грунтовых вод, а при $h > h_0$ — изменяющейся по линейному закону или постоянной. Интенсивность полива предполагается постоянной. Эта задача решена с использованием тепловых потенциалов двойного слоя и сводится к решению нелинейного интегрального уравнения.

1. Интенсивность испарения $\kappa(x, t)$, таким образом, есть нелинейная функция глубины грунтовых вод $h(x, t)$

$$(1.1) \quad \kappa(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } h < h_0 \\ -bh(x, t) + dH & \text{при } h > h_0. \end{cases}$$

В формуле (1.1) либо $b > 0$, $d = b$, $H = h_0$ (случай линейной зависимости испарения от глубины грунтовых вод), либо $b = 0$, $dH = -\varepsilon < 0$ (случай постоянного испарения). Таким образом, через ε обозначена интенсивность испарения в случае, если оно постоянно.

Для простоты будем предполагать, что начальный бугор грунтовых вод $h(x, 0) = \varphi(x)$ пересекается с плоскостью $h(x, t) = h_0$ не больше, чем в одной точке $x = x_0$. Будем также считать для определенности, что выполнены неравенства $H_1 \leq h_0 \leq H_2$; $\varphi(0) \leq \varphi(x_0) \leq \varphi(L)$.

Тогда задача сводится к решению следующих задач для функций $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$:

$$(1.2) \quad \frac{\partial h_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \alpha, \quad h_1(0, t) = H_1, \quad \left(a^2 = \frac{kH_*}{\sigma} \right),$$

$$h_1[\chi(t), t] = h_0 \quad (0 < x < \chi(t)),$$

$$h_1(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 < x < x_0),$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \alpha - bh_2 + dH, \quad h_2[\chi(t), t] = h_0,$$

$$h_2(L, t) = H_2 \quad (\chi(t) < x < L),$$

$$h_2(x, 0) = \varphi(x) \quad (x_0 < x < L).$$

В формуле (1.2) k — коэффициент фильтрации; σ — недостаток насыщения или водоотдача; H_* — некоторый средний уровень грунтовых вод; H_1 и H_2 — уровни воды в каналах; L — расстояние между ними; α — интенсивность полива. В (1.2) и (1.3) $x = \chi(t)$ — уравнение перемещающейся со временем границы, неизвестной заранее, на которой уровень грунтовых вод равен критическому $h[\chi(t), t] = h_0$ и выполняется усло-