

5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
 6. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971.

Поступила 17/IV 1985 г.

УДК 532.032

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ ВИХРЕВОЙ ДОРОЖКИ

А. С. Савин

(Люберцы)

Пусть имеем две параллельные цепочки точечных вихрей, расположенные так, что под каждым вихрем одного ряда находится вихрь другого. Интенсивность вихрей рядов Γ и $-\Gamma$, расстояния l между вихрями в каждом ряду одинаковы. Известно, что такая конфигурация (симметричная вихревая дорожка) неустойчива относительно малых смещений вихрей [1]. В настоящей работе изучается движение симметричной вихревой дорожки, вызванное возмущением, при котором каждая нечеткая вихревая пара (два ближайших вихря интенсивностей разного знака) сужается или расширяется на одну и ту же величину и одновременно смещается вдоль или против направления движения дорожки также на одну и ту же величину, причем сужение или расширение вихревых пар не нарушает симметрии вихрей относительно оси, проходящей через середины невозмущенных вихревых пар. В силу симметрии начальной конфигурации и пространственной периодичности возмущений из исходной выделяется две другие симметричные вихревые дорожки, одна из которых образована возмущенными в начальный момент вихревыми парами, другая — невозмущенными. Все дальнейшее движение будет определяться характером взаимодействия этих дорожек.

Рассмотрим одну из таких дорожек. Расстояние между вихрями в цепочках равно $2l$, расстояние между цепочками $2h$. Систему координат выберем как показано на рис. 1. Комплексный потенциал такой дорожки [1]

$$\omega(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln \sin \frac{\pi(z - z_0)}{2l} - \ln \sin \frac{\pi(z - \xi_0)}{2l} \right],$$

$$z = x + iy, \quad z_0 = ih, \quad \xi_0 = -ih.$$

Комплексная скорость в точке z

$$v_x - iv_y = d\omega/dz,$$

откуда находим

$$(1) \quad v_x(x, y) = \frac{\Gamma}{4l} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(y+h)}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(y+h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(y-h)}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(y-h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l}} \right];$$

$$(2) \quad v_y(x, y) = \frac{\Gamma}{4l} \sin \frac{\pi x}{l} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(y-h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l}} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(y+h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l}} \right].$$

В общем случае дорожки будут расположены, как показано на рис. 2 (поскольку конфигурация симметрична относительно оси x , представлены только вихри, лежащие в верхней полуплоскости). Как следует из (1),

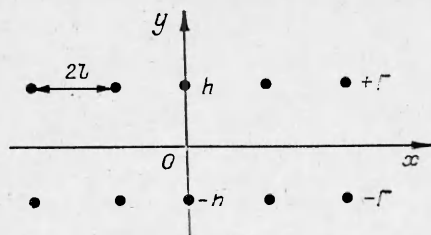


Рис. 1

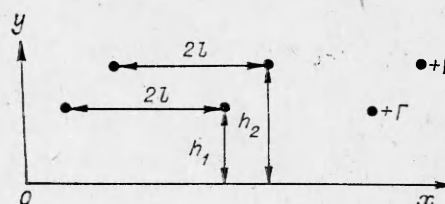


Рис. 2

(2), одна дорожка, предоставленная сама себе, будет без изменения формы двигаться вдоль оси x со скоростью [1]

$$(3) \quad V = v_x(0, h) = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{l}.$$

Обозначим скорость, создаваемую i -й дорожкой ($i = 1, 2$) в точке (x, y) , через $v(x, y; i)$. Тогда

$$(4) \quad \dot{x}_1 = V(h_1) + v_x(x_1, h_1; 2);$$

$$(5) \quad \dot{x}_2 = V(h_2) + v_x(x_2, h_2; 1);$$

$$(6) \quad \dot{h}_1 = v_y(x_1, h_1; 2);$$

$$(7) \quad \dot{h}_2 = v_y(x_2, h_2; 1).$$

Точка над буквой означает дифференцирование соответствующей величины по времени. С учетом (2) из (6), (7) следует интеграл движения

$$(8) \quad h_1 + h_2 = A = \text{const.}$$

Полагая $H = x_2 - x_1$, $\delta = h_1 - A/2$ и вычитая (4) из (5), с учетом (1)–(3), (6), (8) получим

$$(9) \quad \dot{H} - \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{sh} \frac{2\pi\delta}{l} \left[\frac{1}{a - \operatorname{ch} \frac{2\pi\delta}{l}} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\delta}{l} - \operatorname{csc} \frac{\pi H}{l}} \right];$$

$$(10) \quad \dot{\delta} = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{sin} \frac{\pi H}{l} \left[\frac{1}{a - \operatorname{cos} \frac{\pi H}{l}} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\delta}{l} - \operatorname{cos} \frac{\pi H}{l}} \right], \quad a = \operatorname{ch} \frac{\pi A}{l}.$$

Обозначив $Y = \operatorname{cos} \frac{\pi H}{l}$, $X = \operatorname{ch} \frac{2\pi\delta}{l}$ и разделив (9) на (10), имеем

$$(11) \quad \frac{dY}{dX} = \left(\frac{Y - a}{X - a} \right)^2.$$

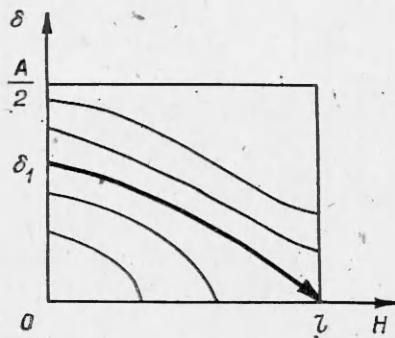
Откуда находим еще один интеграл движения

$$(12) \quad \frac{1}{\operatorname{cos} \frac{\pi H}{l} - a} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\delta}{l} - a} = C.$$

Точка плоскости (H, δ) , изображающая состояние рассматриваемой системы, движется по соответствующей фазовой траектории, определяемой (12). Легко видеть, что эти фазовые траектории симметричны относительно оси H и любой прямой $H = nl$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Поскольку $-A/2 < \delta < A/2$, для построения фазового портрета достаточно изучить поведение фазовых траекторий в области $P = \{0 < H < l, 0 < \delta < A/2\}$. Разделив (10) на (9), получим

$$(13) \quad \frac{d\delta}{dH} = - \frac{\operatorname{sin} \frac{\pi H}{l} \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi\delta}{l} - a \right)^2}{2 \operatorname{sh} \frac{2\pi\delta}{l} \left(\operatorname{cos} \frac{\pi H}{l} - a \right)}.$$

Из (13) видно, что всюду в области P $d\delta/dH < 0$. Отсюда следует, что для фазовой траектории, проходящей через точку $(0, \delta)$, априори существует две возможности: либо она пересекает ось H на отрезке $(0, l)$ и вследствие симметрии относительно осей H, δ замкнута, либо она на этом отрезке не пересекает ось H и вследствие симметрии относительно прямых $H = nl$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) не пересекает ось H нигде, т. е. не замкнута. Поскольку в области P нет особых точек (13), фазовые траектории в этой области не пересекаются [2]. Поэтому фазовая траектория, проходящая через особую точку $(l, 0)$, разделяет P на две области, одна из которых заполнена замкнутыми фазовыми траекториями, другая — незамкнутыми.



Р и с. 3

Такая фазовая траектория называется сепаратрисой [2]. Из (12) находим точку δ_1 , в которой сепаратриса пересекает ось δ :

$$\delta_1 = \frac{l}{2\pi} \operatorname{arsh} \frac{3a+1}{a+3}.$$

Нетрудно показать, что $0 < \delta_1 < A/2$. Общий вид фазового портрета при $0 < H < l$, $0 < \delta < A/2$ приведен на рис. 3. Жирной линией выделена сепаратриса.

Если точка, изображающая состояние рассматриваемой системы, движется по замкнутой фазовой траектории, то величины H , δ меняются во времени периодически [2]. В этом случае вихревые пары в дорожке объединяются в связанные системы: задняя пара сужается и ускоряется, передняя расширяется и замедляется до тех пор, пока задняя пара не пройдет через переднюю, после этого пара, оказавшаяся спереди, начинает расширяться и замедляться, а пара, находящаяся сзади, — сужаться и ускоряться, затем описанный процесс повторяется и т. д. Характер движения, соответствующего незамкнутой фазовой траектории, иной: передняя пара расширяется и замедляется, задняя сужается и ускоряется, и, пройдя через переднюю, задняя пара вступает в такое же взаимодействие со следующей парой и т. д.

Таким образом, можно сказать, что симметричная вихревая дорожка, являясь неустойчивой, при определенных возмущениях может переходить к различным типам упорядоченных движений. Так, в первом случае вся вихревая дорожка разбивается на ячейки, состоящие из двух связанных вихревых пар, во втором — одна дорожка движется внутри другой.

Установим теперь связь между начальным возмущением и характером последующего движения рассматриваемой системы. Сепаратриса проходит через точку $(l, 0)$, исходя из этого и (12), запишем ее уравнение

$$(14) \quad \frac{1}{\cos \frac{\pi H}{l} - a} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi \delta}{l} - a} = C_1, \quad C_1 = 2/(a^2 - 1).$$

Всякая фазовая траектория, лежащая ниже сепаратрисы, соответствует периодическому движению, лежащая выше, — непериодическому (см. рис. 3). Нетрудно показать, что при $C < C_1$ дорожка разобьется на ячейки из связанных вихревых пар, при $C > C_1$ возникает движение одной дорожки внутри другой. Здесь C — константа, фигурирующая в (12) и зависящая от начальных условий.

Пусть в начальный момент нечетные вихревые пары сдвинулись относительно четных вдоль оси x на величину ξ и одновременно каждый вихрь в нечетных парах сместился вдоль оси y на величину ε (вихри различных интенсивностей смещаются вдоль оси y в противоположных направлениях, таким образом, симметричность их расположения относительно оси x сохраняется). Из (8), (12) находим

$$(15) \quad C = \frac{1}{a - \operatorname{ch} \frac{\pi \varepsilon}{l}} - \frac{1}{\cos \frac{\pi \xi}{l} + a}, \quad A = 2h - \varepsilon.$$

Положительные значения ε соответствуют сужению возмущенных пар, отрицательные — расширению. Теперь, чтобы ответить на вопрос, какое движение будет иметь место после действия описанного возмущения, достаточно сравнить величины (14) и (15).

Пусть, например, в начальный момент вихри нечетных пар смещаются только вдоль оси x . Легко показать, что в этом случае $C < C_1$ при лю-

бом значения ξ . Если возмущение таково, что вихри нечетных пар смещаются только вдоль оси y , то $C > C_1$ независимо от ε , т. е. чисто продольные возмущения ведут к образованию ячеек в дорожке, а чисто поперечные — к разделению исходной дорожки на две.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочкин Н. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. — М. — Л.: ГОНТИ, 1938.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.

Поступила 6/III 1985 г.

УДК 532.593

ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. А. Золотарев, Л. И. Золотарева

(Ростов-на-Дону)

В работе развивается методика решения неустановившихся задач со смешанными граничными условиями для слоя тяжелой жидкости. В отличие от известных аналитико-численных подходов [1, 2] предлагаемый дает возможность, основываясь на методе факторизации, выполнить аналитическое исследование процессов возбуждения и установления волн.

В качестве иллюстрации рассмотрена задача о генерировании возмущений системой внешних давлений, приложенных к верхней границе слоя жидкости, частично покрытой упругой пластиной. Моделируется неустановившийся процесс взаимодействия волн, возбуждаемых барическими образованиями, с ограниченным ледовым полем.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$(1) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t = -\rho_*^{-1} \nabla p_*, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad -H \leq z \leq 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

$$(2) \quad z = 0, \quad p_* = q + \rho_* g \zeta + \begin{cases} \Pi \zeta, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega, \end{cases} \quad w = \partial \zeta / \partial t;$$

$$(3) \quad R = M_n = M_\tau = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad \mathbf{x} = \{x, y\};$$

$$\Pi = d_0 \nabla^4 + \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad q = \begin{cases} q(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in D, \quad t > 0, \\ 0, & \mathbf{x} \notin D, \end{cases}$$

$$z = -H, \quad w = 0;$$

$$(4) \quad t = 0, \quad \left\{ \mathbf{v}, q, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} = 0.$$

Здесь $\{x, y, z\}$ — декартова прямоугольная система координат с началом на невозмущенной свободной поверхности жидкости; ось z направлена вертикально вверх; t — время; p_* — динамическая составляющая полного давления p в жидкости; $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости; ρ_* , H — плотность и толщина слоя жидкости; ζ — возвышение свободной поверхности, совпадающее в области Ω , занятой пластиной, с вертикальным ее смещением; R , M_n , M_τ — перерезывающая сила, изгибающий и крутящий моменты на торце пластины $\partial \Omega$; d_0 , ρ_0 , h — жесткость, плотность и толщина пластины; $q(\mathbf{x}, t)$ — внешнее возмущающее давление, заданное в области $D = D_1 \cup D_2$, действующее на свободную поверхность жидкости в области D_1 и пластину в D_2 ; g — ускорение силы тяжести.

Введем безразмерные переменные, отмеченные индексом 1:

$$(5) \quad \begin{aligned} \{x, z, \zeta\} &= H \{x_1, z_1, \zeta_1\}, \quad \mathbf{v} = c \mathbf{v}_1, \\ c &= \sqrt{gh}, \quad t = Hc^{-1} t_1, \quad \{p, q\} = \rho c^2 \{p_1, q_1\}, \\ d_0 &= \rho g H^4 d_1, \quad \rho_0 = Hh^{-1} \rho_* \rho_1. \end{aligned}$$