

УДК 536.201

О СТРУКТУРЕ ФРОНТА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТЬЮ

О. Ю. Динариев

Объединенный институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 123810 Москва

Рассмотрена одномерная задача о распространении фронта возмущений от точечного мгновенного источника для процессов переноса с пространственно-временной нелокальностью. Использован класс ядер нелокальности с особенностью вида t^{-1} при малых временах. Вычислена скорость распространения фронта v и найдено выражение для возмущений вблизи фронта в виде асимптотического ряда по степеням параметра $\tau = t - xv^{-1}$.

Процессы переноса (теплопроводность, диффузия, распространение поперечных мод в вязкой жидкости, фильтрация и др.) обычно описываются параболическими уравнениями типа уравнения теплопроводности. Одним из свойств данных уравнений является бесконечная скорость распространения сигнала. Однако это противоречит физическим принципам, так как скорость распространения любого сигнала по крайней мере не должна превышать скорости света в вакууме. Поэтому физически обоснованное описание процессов переноса требует модификации основных динамических уравнений.

Указанное обстоятельство давно обсуждается в литературе. В работе [1] предложено заменить параболическое уравнение гиперболическим с малым параметром при старшей производной по времени. Впоследствии было установлено, что метод [1] является частным случаем более общего подхода, учитывающего релаксационную связь потока переносимой величины с ее градиентом [2]. В [3] вопрос о предельной скорости сигнала исследовался для релаксационного ядра общего вида. Показано, что при распространении сигнала от точечного источника структура фронта возмущений определяется поведением релаксационного ядра при малых временах [4].

Однако известно, что модели с релаксацией (т. е. модели с временной нелокальностью) являются приближением более общих моделей, учитывающих не только временную, но и пространственную дисперсию. Материальные соотношения с пространственно-временной нелокальностью появляются при переходе к гидродинамическому описанию в кинетической теории, классической и квантовой статистической механике (см. [5]). В то же время задача о связи условия конечности скорости распространения сигнала со свойствами ядра более сложна в случае моделей с пространственно-временной нелокальностью. В настоящей работе эта задача решена для класса ядер с особенностью вида t^{-1} при малых временах. Для упрощения изложения рассмотрен одномерный случай.

Пусть динамика величины $u = u(t, x)$ описывается локальным уравнением сохранения с источниками

$$\partial_t u + \partial_x J = q(t, x), \quad (1)$$

где J — поток величины u ; $q = q(t, x)$ — поле источников. В разных задачах величина u может описывать температуру, концентрацию, поперечную компоненту скорости в вязкой жидкости, давление жидкости при фильтрации в пористой среде и т. д. При учете

пространственно-временной нелокальности динамическое уравнение (1) замыкается материальным соотношением

$$J = - \int K(t - t_1, x - x_1) \partial_x u(t_1, x_1) dt_1 dx_1. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) дает интегродифференциальное уравнение для $u = u(t, x)$

$$\partial_t u(t, x) - \int K(t - t_1, x - x_1) \partial_x^2 u(t_1, x_1) dt_1 dx_1 = q(t, x). \quad (3)$$

В случае медленных процессов с малым пространственным градиентом, т. е. в пределе малых частот и длинных волн соотношение (2) принимает вид

$$J = -\varkappa \partial_x u, \quad \varkappa = \int K(t, x) dt dx,$$

а динамическое уравнение (3) приводится к обычному уравнению теплопроводности

$$\partial_t u - \varkappa \partial_x^2 u = q(t, x).$$

Ядро $K(t, x)$ характеризует релаксационные свойства и пространственную дисперсию среды.

Функция $K(t, x)$ должна удовлетворять следующим условиям, вытекающим из физических и термодинамических соображений.

1. Поскольку свойства среды предполагаются инвариантными относительно пространственной инверсии $x \rightarrow -x$, выполняется соотношение

$$K(t, x) = K(t, -x). \quad (4)$$

2. Для фурье-образа ядра

$$K_F(\omega, k) = \int \exp(-i(\omega t + kx)) K(t, x) dt dx$$

должно выполняться условие диссипативности, или, в другой формулировке, условие совместности модели со вторым законом термодинамики [5]

$$\operatorname{Re} K_F(\omega, k) \geq 0. \quad (5)$$

3. Поскольку рассматривается класс моделей с конечной скоростью распространения сигнала, функция $K(t, x)$ должна обращаться в нуль вне конуса

$$C_V = \{(t, x) \mid V^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0\}, \quad (6)$$

где V — положительная константа с размерностью скорости. Известно [6], что условие принадлежности носителя функции $K(t, x)$ конусу (6) эквивалентно условию голоморфности фурье-образа $K_F(\omega, k)$ в комплексной трубе

$$T_V = \{(\omega, k) \mid V^{-2}(\operatorname{Im} \omega)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 > 0, \operatorname{Im} \omega < 0\}. \quad (7)$$

4. Примем, что неравенство (5) выполняется не только для действительных значений частоты ω и волнового числа k , но и в случае, когда частота ω принимает значения в нижней комплексной полуплоскости $\operatorname{Im} \omega < 0$.

С целью упрощения будем использовать систему единиц измерения, для которой $V = 1$.

Рассмотрим класс ядер вида

$$K(t, x) = \theta(t - |x|) \exp(-at) [At^{-1} + \varphi(t, x)]. \quad (8)$$

Здесь θ — функция Хевисайда; $A > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные; $\varphi(t, x)$ — гладкая и ограниченная функция в конусе C_1 , четная по пространственной координате. Таким образом, рассматриваемый класс ядер выделяется особенностью вида t^{-1} при малых временах.

Фурье-образ ядра (8) можно представить в виде суммы

$$K_F(\omega, k) = \Phi_1(\omega, k) + \Phi_2(\omega, k),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega, k) &= A \int_{t \geq |x|} \exp(-i((\omega - i\alpha)t + kx)) t^{-1} dt dx = \\ &= 2Ak^{-1} \int_{t \geq 0} \exp(-i(\omega - i\alpha)t) t^{-1} \sin(kt) dt; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi_2(\omega, k) = \int_{t \geq |x|} \exp(-i((\omega - i\alpha)t + kx)) \varphi(t, x) dt dx. \quad (10)$$

Интеграл (9) вычисляется с использованием формулы 3.381.4 из [7] в явном виде

$$\int_{t \geq 0} t^{\nu-1} \exp(-\mu t) dt = \mu^{-\nu} \Gamma(\nu), \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0.$$

При этом в выражении (9) степенную особенность t^{-1} следует заменить на особенность $t^{\nu-1}$, а затем перейти к пределу $\nu \rightarrow 0$. В результате получим

$$\Phi_1(\omega, k) = A(ik)^{-1} \ln((\omega + k - i\alpha)/(\omega - k - i\alpha)). \quad (11)$$

Легко убедиться, что при $\operatorname{Im} k = 0$, $\operatorname{Im} \omega \leq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \Phi_1(\omega, k) > 0. \quad (12)$$

Вычислим асимптотику функций $\Phi_1(\omega, k)$, $\Phi_2(\omega, k)$ при $\operatorname{Im} \omega \rightarrow -\infty$ в комплексной трубе T_1 . Из (11) следует выражение

$$\Phi_1(\omega, k) = -2A(\operatorname{Im} \omega)^{-1} + O((\operatorname{Im} \omega)^{-2}). \quad (13)$$

Для функции $\Phi_{2F}(\omega, k)$ интегрированием по частям получим

$$\Phi_2(\omega, k) = \zeta_1(\omega, k) + \zeta_2(\omega, k) + \zeta_3(\omega, k), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_1(\omega, k) &= 2((i\omega + \alpha)^2 + k^2)^{-1} \varphi(0, 0), \\ \zeta_2(\omega, k) &= (i\omega + \alpha)^{-1} \int_0^{+\infty} ((i\omega + \alpha + ik)^{-1} \exp(-i(\omega - i\alpha + k)x) + \\ &\quad + (i\omega + \alpha - ik)^{-1} \exp(-i(\omega - i\alpha - k)x)) \frac{d}{dx} \varphi(x, x) dx, \\ \zeta_3(\omega, k) &= (i\omega + \alpha)^{-1} \int_{t \geq |x|} \exp(-i((\omega - i\alpha)t + kx)) \partial_t \varphi(t, x) dt dx. \end{aligned}$$

В выражении (14) слагаемое $\zeta_3(\omega, k)$ имеет функциональный вид исходной функции (10) и может быть представлено в виде, аналогичном (14). Слагаемое $\zeta_2(\omega, k)$ также допускает интегрирование по частям. Таким образом, основной вклад в (14) вносит слагаемое $\zeta_1(\omega, k)$, и справедлива оценка

$$\Phi_2(\omega, k) = O((\text{Im } \omega)^{-2}). \quad (15)$$

Из соотношений (12), (13), (15) следует, что условие 4 может удовлетворяться для достаточно широкого класса функций $\varphi(t, x)$, так как вклад этой функции в фурье-образ ядра при $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ имеет более высокий порядок малости.

Для уравнения (3) рассмотрим задачу о распространении возмущений от точечного мгновенного источника $q(t, x) = a\delta(t)\delta(x)$ (a — произвольное число). Переходя к фурье-образам в уравнении (3), получим

$$\Psi(\omega, k)u_F(\omega, k) = a, \quad \Psi(\omega, k) = i\omega + k^2 K_F(\omega, k). \quad (16)$$

Уравнение (16) позволяет найти решение для величины u в квадратурах:

$$u(t, x) = a(2\pi)^{-2} \int \exp(i\omega t) d\omega \int \frac{\exp(ikx)}{\Psi(\omega, k)} dk.$$

Здесь интегрирование по k осуществляется вдоль действительной оси, интегрирование по ω — вдоль прямой $\text{Im } \omega = -\varepsilon$ (ε — малое положительное число). Согласно условию 4 подынтегральное выражение везде регулярно, при больших абсолютных величинах k и ω интеграл вычисляется в смысле главного значения.

В соответствии с условием 3 функция $\Psi(\omega, k)$ голоморфна в трубе T_1 (см. (7)). Формула (16) позволяет вычислить функцию $u_F(\omega, k)$ при комплексных значениях k и ω . Скорость распространения возмущений определяется как такое максимальное значение $v \geq 1$, при котором функция $u_F(\omega, k)$ голоморфна в трубе T_V . При этом условии функция $u(t, x)$ автоматически обращается в нуль вне конуса C_V [6].

Из равенства (4) следует соотношение $\Psi(\omega, k) = \Psi(\omega, -k)$. Для решения поставленной задачи достаточно исследовать корни $k = k(\omega)$ уравнения

$$\Psi(\omega, k) = 0 \quad (17)$$

относительно волнового числа с дополнительным условием $\text{Im } k > 0$. Отметим, что решения с $\text{Im } k = 0$ в силу условия 4 отсутствуют.

Приведем численный алгоритм определения корней уравнения (17) при фиксированном значении ω ($\text{Im } \omega < 0$). Функция $\Psi(\omega, k)$ является голоморфной по параметру k в полосе $|\text{Im } k| < |\text{Im } \omega|$. Поэтому уравнение (17), вообще говоря, может иметь дискретный набор решений $k_n = k_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$

Заметим, что интегрированием функции (10) по частям ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(\omega, k) &= 2 \int_{0 \leq x \leq t} \exp(-i(\omega - i\alpha)t) \varphi(t, x) \cos(kx) dt dx = \\ &= \frac{2}{k^2} \varphi(0, 0) + \frac{2}{k^2} \int_{0 \leq t} \exp(-i(\omega - i\alpha)t) \frac{d}{dt} \varphi(t, t) \cos(kt) dt - \\ &\quad - \frac{2}{k} \int_{0 \leq x \leq t} \exp(-i(\omega - i\alpha)t) \partial_x \varphi(t, x) \sin(kx) dt dx. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое имеет ту же функциональную структуру, что и функция $\Phi_2(\omega, k)$, поэтому его так же можно преобразовать интегрированием по частям. В итоге при $|k| \rightarrow +\infty$

имеем асимптотику $|\Phi_2(\omega, k)| = O(|k|^{-2})$. Отсюда с учетом формулы (11) находим, что при $|k| \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотика

$$|\Psi(\omega, k)| = \pi A|k| + O(1).$$

Следовательно, уравнение (17) может иметь решения $k_n = k_n(\omega)$ только в ограниченной области комплексной плоскости.

Далее, расположение корней уравнения (17) в комплексной плоскости уточним расчетом интегралов по контуру

$$K_C = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial_k \Psi(\omega, k)}{\Psi(\omega, k)} dk,$$

где K_C — число корней уравнения (17) с учетом их кратности в области, лежащей внутри контура C .

Алгоритм расчета значений $k_n = k_n(\omega)$ с заданной точностью может быть завершён итерационной процедурой Ньютона.

Искомое значение скорости v определяется функциями $k_n = k_n(\omega)$ с помощью соотношения

$$v^{-1} = \inf_{\omega, n} (H_n(\omega)), \quad H_n(\omega) = \text{Im } k_n(\omega) / (-\text{Im } \omega). \quad (18)$$

Отметим, что по определению нижняя грань (18) не может достигаться на границе области голоморфности. Она также не может достигаться во внутренней точке этой области. Действительно, если в некоторой точке ω_0 достигается нижняя грань $v^{-1} = H_n(\omega_0)$, то гармоническая функция двух действительных переменных ($\omega_1 = \text{Re } \omega$, $\omega_2 = \text{Im } \omega$)

$$h(\omega_1, \omega_2) = \text{Im } k_n(\omega_1 + i\omega_2) + v^{-1}\omega_2 \quad (19)$$

достигает минимума, равного нулю, в точке $\omega_1 = \text{Re } \omega_0$, $\omega_2 = \text{Im } \omega_0$. Последнее в соответствии со свойствами гармонических функций возможно, только когда функция (19) тождественно равна нулю. Отсюда следует линейная зависимость решения от частоты $k_n(\omega) = -v^{-1}\omega + \beta$, что противоречит уравнению (17) при $\omega \rightarrow 0$.

Итак, нижняя грань (18) может достигаться только при $|\omega| \rightarrow +\infty$. Обозначая $z = -k/\omega$ и переходя к пределу $|\omega| \rightarrow +\infty$ в уравнении (17) с учетом (11) и (14), в главном приближении получим уравнение

$$1 + Az \ln((1-z)/(1+z)) = 0. \quad (20)$$

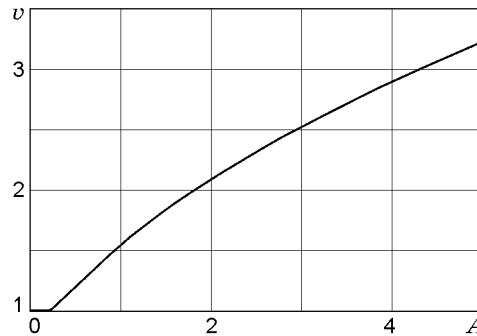
Уравнение (20) имеет единственное положительное решение $z_0 = z_0(A) < 1$, которое определяет искомое значение скорости распространения возмущений $v = z_0^{-1}$. На рисунке представлена зависимость скорости v от параметра A для малых значений A . Для больших значений A имеется приближенная зависимость $v \approx (2A)^{1/2}$.

Итак, единственное решение $k_1 = k_1(\omega)$ уравнения (19) удовлетворяет условию $\text{Im } k_1 > 0$. При этом функция $k_1 = k_1(\omega)$ допускает асимптотическое разложение в ряд

$$k_1(\omega) = -\omega \sum_{n=0}^{+\infty} z_n (i\omega)^{-n}. \quad (21)$$

Члены ряда (21) вычисляются рекуррентным образом при подстановке (21) в уравнение (17) с использованием выражений (11), (14):

$$z_0 = v^{-1}, \quad z_1 = 2z_0^3(\alpha A - \varphi(0, 0))(1 - z_0^2 + 2Az_0^2)^{-1}, \quad \dots$$



Из выражений (11), (14) при $\omega \rightarrow +\infty$ ($\text{Im } \omega = 0$) следует асимптотика

$$\text{Re } K_F(\omega, k) = 2\omega^{-2}(A\alpha - \varphi(0, 0)) + O(\omega^{-3}).$$

Поэтому в соответствии с соотношением (5) должно выполняться неравенство $A\alpha - \varphi(0, 0) \geq 0$. Отсюда следует неравенство $z_1 \geq 0$.

Представим решение уравнения (16) в виде

$$u_F(\omega, k) = a(J_1(\omega, k) + J_2(\omega, k)),$$

$$J_1(\omega, k) = \Delta(\omega)2k_1(\omega)(k^2 - k_1(\omega)^2)^{-1}, \quad J_2(\omega, k) = 1/\Psi(\omega, k) - J_1(\omega, k),$$

где $\Delta(\omega)^{-1} = (\partial\Psi/\partial k)|_{k=k_1(\omega)}$.

Исследуем структуру фронта возмущений в фиксированной точке $x > 0$, т. е. зависимость решения от параметра $\tau = t - xv^{-1}$ при малых значениях этого параметра. Функция $J_2(\omega, k)$ голоморфна в комплексной трубе T_1 , поэтому ее фурье-образ обращается в нуль вне конуса C_1 . Это означает, что при достаточно малых значениях τ справедлива формула

$$u(t, x) = \frac{a}{(2\pi)^2} \int \exp(i(\omega t + kx))J_1(\omega, k) d\omega dk.$$

В данной формуле интеграл по k вычисляется по теореме о вычетах. В результате имеем

$$u(t, x) = \frac{ai}{2\pi} \int \exp(i(\omega t + k_1(\omega)x))\Delta(\omega) d\omega. \quad (22)$$

Используя (21), для подынтегрального выражения (22) можно получить разложение в асимптотический ряд

$$\exp(i(\omega t + k_1(\omega)x))\Delta(\omega) = -i \exp(i\omega\tau) \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(x)(i\omega)^{-n}, \quad (23)$$

$$X_0(x) = Az_0(1 - z_0^2) \exp(-z_1x)(1 - z_0^2 + 2Az_0^2)^{-1}, \dots$$

Для расчета асимптотики функции (22) при малых значениях τ на основе асимптотического ряда (23) воспользуемся методом, предложенным в работе [4]. Зафиксируем целое положительное число N и зададим произвольную последовательность попарно неравных положительных чисел y_j , $j = 0, \dots, N + 1$. Определим вспомогательную функцию

$$F_1(\omega, x) = b_{-1} + \sum_{j=0}^{N+1} b_j(i\omega + y_j)^{-1},$$

где коэффициенты b_j находятся из системы линейных уравнений

$$b_{-1} = X_0(x), \quad \sum_{j=0}^{N+1} b_j y_j^k = (-1)^k X_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N. \quad (24)$$

Система (24) всегда имеет единственное решение. Определим функции

$$\begin{aligned} F_2(\omega, x) &= \exp(ik_1(\omega)x)\Delta(\omega) + i \exp(-i\omega xv^{-1})F_1(\omega, x), \\ u_1(t, x) &= \frac{a}{2\pi} \int \exp(i\omega\tau)F_1(\omega, x) d\omega, \\ u_2(t, x) &= u(t, x) - u_1(t, x) = \frac{ai}{2\pi} \int \exp(i\omega t)F_2(\omega, x) d\omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку в силу определений $F_2(\omega) = O(\omega^{-(N+2)})$, функция $u_2(t, x)$ по крайней мере N -дифференцируема по времени и обращается в нуль при $\tau < 0$. Таким образом, $u_2(t, x) = o(\tau^N)$. По теореме о вычетах интеграл (25) вычисляется в явном виде

$$u_1(t, x) = a \left(b_{-1} \delta(\tau) + \theta(\tau) \sum_{j=0}^N b_j \exp(-y_j \tau) \right).$$

С учетом полученных выше результатов окончательная формула, описывающая поведение функции $u(t, x)$ вблизи фронта, имеет вид

$$u(t, x) = a \left(X_0 \delta(\tau) + \theta(\tau) \sum_{j=0}^N X_{j+1} \frac{\tau^j}{j!} + o(\tau^N) \right). \quad (26)$$

Формула (26) в совокупности с расчетом скорости распространения фронта v является основным результатом настоящей работы. Она позволяет связать структуру фронта возмущений для процессов переноса с пространственно-временной нелокальностью и определить характеристики ядра $K(t, x)$, которые трудно наблюдать в других процессах. Таким образом, экспериментальное определение v и структуры фронта можно использовать для уточнения аналитической структуры ядра в целом.

Формула (26) получена для точечного мгновенного источника. Для случая точечного источника с интенсивностью, зависящей от времени, выражение для возмущений вблизи фронта можно вывести сверткой выражения (26) с функцией источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cataneo M. C.** Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantane // *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris.* 1958. V. 247, N 4. P. 431–433.
2. **Gurtin M. E., Pipkin A. C.** A general theory of heat conduction with finite wave speeds // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1968. V. 31, N 2. P. 113–126.
3. **Динариев О. Ю.** О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 301, № 5. С. 1095–1097.
4. **Динариев О. Ю.** О структуре фронта возмущений для процессов переноса с релаксацией // *Прикл. математика и механика.* 1991. Т. 55, № 6. С. 949–955.
5. **Динариев О. Ю.** Основные положения феноменологического подхода в нелокальной гидродинамике // *Прикл. математика и механика.* 1999. Т. 63, № 4. С. 591–602.

6. **Владимиров В. С., Сергеев А. Г.** Комплексный анализ в трубе будущего. М.: ВИНТИ, 1985. С. 196–266. (Итоги науки и техники. Сер. Современные пробл. математики. Фундам. направления; Т. 8).
7. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

*Поступила в редакцию 28/IX 2000 г.,
в окончательном варианте — 31/V 2001 г.*
