

УДК 622.83+539.4

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
СУСПЕНЗИЙ ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ТЕЧЕНИЙ ПУАЗЕЙЛЯ И КУЭТТА

В. А. Кузькин<sup>1,2</sup>, А. М. Кривцов<sup>1,2</sup>, А. М. Линьков<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,

E-mail: kuzkinva@gmail.com,

ул. Политехническая, 29, 195251, г. Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Политехнический университет Жешува,

ал. Повстанцев Варшавы, 12, 35-959, Жешув, Польша

<sup>3</sup>Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН),

Большой проспект В.О., 61, 199178, г. Санкт-Петербург, Россия

Представлены результаты моделирования эффективных реологических свойств смеси проппант – жидкость, используемой при гидроразрыве пласта. Результаты, полученные при моделировании течений типа Пуазейля и Куэтта, совпадают в пределах стандартного отклонения. Определены границы применимости модели ньютоновской жидкости при моделировании смеси проппант – жидкость, а также условия возникновения пробок при высокой концентрации проппанта.

*Гидроразрыв, проппант, суспензия, эффективные свойства, течения Пуазейля и Куэтта, метод динамики частиц*

Моделирование течения суспензий является важной инженерной задачей для нефтегазовой, химической, пищевой и других отраслей промышленности [1]. На практике суспензия часто моделируется однофазной жидкостью с вязкостью и плотностью, зависящими от концентрации твердых частиц. В частности, такой подход широко используется при моделировании гидроразрыва нефтяных и газовых пластов. Известно большое количество моделей, описывающих зависимость эффективной вязкости суспензии  $\mu_s$  от концентрации частиц  $c$ . Асимптотическое поведение вязкости при малых концентрациях обычно представлено формулой Эйнштейна [2]

$$\mu_s = \mu_s(0)(1 + Ac), \quad (1)$$

где  $A = 5/2$  в трехмерном случае и  $A = 2$  в двумерном случае [3]. В работе [4] показано, что формула (1) не удовлетворяет условиям Хашина – Штрикмана [5]: при сколь угодно малой концентрации она дает заниженное значение вязкости. В [4] получено корректное асимптотическое выражение для эффективной вязкости:

$$\mu_s = \mu_s(0)/(1 - Ac). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского агентства исследований (FP7-PEOPLE-2009-IAPP Marie Curie IAPP, проект HYDROFRAC, No. 251475).

Хотя уравнение (2) имеет более широкую область применимости, чем уравнение (1), его точность недостаточна при высоких концентрациях, когда гидродинамические взаимодействия между частицами становятся существенными. Для описания эффективной вязкости в широком диапазоне концентраций предложены более сложные эмпирические формулы Муни [6], Марона – Пирса [7] и Кригера – Доугерти [8]:

$$\mu_s^M = \mu_s(0) \exp \frac{Ac}{1 - c/c_*}, \quad (3)$$

$$\mu_s^{MP} = \frac{\mu_s(0)}{(1 - c/c_*)^2}, \quad (4)$$

$$\mu_s^{KD} = \frac{\mu_s(0)}{(1 - c/c_*)^{Ac_*}}. \quad (5)$$

Здесь  $c_*$  — критическая концентрация, используемая в качестве параметра;  $A$  — коэффициент Эйнштейна (см. формулу (1)). Отметим, что уравнения (3)–(5) дают качественно разную зависимость вязкости от концентрации твердых частиц. Выбор между ними не очевиден.

При высоких концентрациях частиц часто проявляются неньютоновские свойства суспензии (см., например, работу [1]). Наиболее важными неньютоновскими эффектами являются: нелинейная зависимость касательных напряжений от скорости сдвига и наличие предела текучести. Для учета данных явлений поведение суспензии часто описывается моделью Гершеля – Балкли [9]:

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n, \quad (6)$$

где  $\tau$ ,  $\dot{\gamma}$  — касательные напряжения и скорость сдвига соответственно;  $\tau_0$  — предел текучести, ниже которого течение отсутствует;  $K$  — коэффициент вязкости;  $n$  — показатель поведения смеси.

Формула Гершеля – Балкли в частном случае  $\tau_0 = 0$  переходит в степенную зависимость, которая при  $n=1$ ,  $K = \mu$  описывает поведение ньютоновской жидкости. Коэффициент вязкости, показатель поведения и предел текучести зависят от концентрации твердых частиц [1]. Для калибровки зависимостей можно использовать физические эксперименты и/или компьютерное моделирование.

Натурные эксперименты имеют ряд ограничений. В большинстве случаев определение эффективных реологических свойств суспензии проводится на ротационных вискозиметрах [1]. Предполагается, что между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями вискозиметра реализуется течение Куэтта. В таком случае угловая скорость определяет скорость сдвига, а момент, прикладываемый к одному из цилиндров, пропорционален величине касательных напряжений. При известных угловой скорости и моменте вычисляется зависимость касательных напряжений от скорости сдвига. Однако, строго говоря, течение смеси между цилиндрами эквивалентно течению Куэтта эффективной однофазной жидкости только в пределе, когда отношение диаметра частицы к ширине канала стремится к нулю. В реальных экспериментах это отношение конечно и, следовательно, может влиять на определяемые реологические свойства. В частности, в работе [1] отношение находилось в интервале от 0.05 до 0.1. В таком случае возникает вопрос: применимы ли реологические свойства, получаемые в экспериментах с ротационными вискозиметрами, основанными на течении Куэтта, для описания других видов течения, в частности течения Пуазейля в узком канале.

Трудности, описанные выше, достаточно общие. Они возникают в различных инженерных приложениях, связанных с течением суспензий. В настоящей работе основное внимание уделяется проблеме гидроразрыва [10, 11], хотя используемый подход может найти применение для ши-

рокого круга задач. На конечной стадии гидроразрыва частицы, называемые проппантом, добавляются в жидкость, закачиваемую в трещину, для предотвращения ее закрытия после сброса давления. Поэтому адекватное описание течения суспензии важно для успешного проведения гидроразрыва. Очевидно, течение смеси проппант – жидкость в трещине гидроразрыва соответствует течению Пуазейля, в то время как экспериментальные методики, используемые для определения реологических свойств смеси, соответствуют течению Куэтта. Важно выяснить, в какой мере свойства, установленные в экспериментах с использованием реометров, соответствуют эффективным свойствам смеси при течении в узкой трещине гидроразрыва.

В данной работе для моделирования поведения суспензии применяется метод динамики частиц (МДЧ) [12, 13]. Среди различных численных методов, таких как стоковская динамика [14], динамика диссипативных частиц [15], метод гидродинамики сглаженных частиц [16], метод решеточных уравнений Больцмана [17] и т. д., метод динамики частиц является наиболее простым и содержит минимальное число параметров. В [18, 19] показано, что этот метод может быть использован для моделирования суспензий. В частности, установлено, что эффективные вязкости суспензии, полученные двумя различными численными методами (динамики частиц и гидродинамики сглаженных частиц), при моделировании течения Пуазейля в узком канале совпадают в пределах стандартного отклонения.

Возможности метода динамики частиц используются для ответа на два поставленных вопроса: каковы реологические свойства суспензии в широком диапазоне концентраций и соответствуют ли эффективные реологические свойства суспензии, определяемые с использованием течения Куэтта, реологическим свойствам суспензии при течении Пуазейля, возникающем в узких трещинах, создаваемых при гидроразрыве. Ответы на эти вопросы получены с помощью компьютерного моделирования данных видов течения.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматривается течение суспензии (ньютоновской жидкости, содержащей проппант) в канале постоянной ширины. Канал моделируется квадратной расчетной областью с периодическими граничными условиями [12] в направлении течения и жесткими стенками в ортогональном направлении.

В рамках метода динамики частиц [12, 13] суспензия представляется совокупностью взаимодействующих частиц двух типов, соответствующих жидкости и проппанту. Уравнения движения частиц решаются численно с использованием симплектического метода “leap-frog” [20]. Все взаимодействия в системе описываются сплайновым потенциалом [21]. Сила, действующая между частицами  $i$  и  $j$ , вычисляется по формулам:

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{fk(r_{ij})}{a} \left( \left( \frac{a}{r_{ij}} \right)^8 - \left( \frac{a}{r_{ij}} \right)^{14} \right) \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \quad (7)$$

$$k(r) = \begin{cases} 1, & r < b, \\ \left( 1 - \left( \frac{r^2 - b^2}{a_{cut}^2 - b^2} \right)^2 \right)^2, & b \leq r \leq a_{cut}, \\ 0, & r > a_{cut} \end{cases}$$

где  $a_{cut}$  — радиус обрезания;  $a$  — равновесное расстояние между частицами;  $f$  — параметр взаимодействия;  $b = (13/7)^{1/6} a$ . Частица проппанта представляется двумя круговыми слоями жестко соединенных частиц меньшего размера [18, 19]. Расстояние между соседними частицами равно  $a$ . Данные частицы используются для описания взаимодействий проппант – жидкость и проппант – проппант. В последнем случае сила (7) обрезается при  $r = a$  и, следовательно, взаимодействия частиц проппанта только отталкивающие. Уравнения движения частицы проппанта  $i$  имеют вид

$$m_p \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{\substack{k \in \Lambda_i, \\ j \notin \Lambda_i}} \mathbf{F}_{kj} + m_p \mathbf{g}, \quad \Theta_p \ddot{\varphi}_i = \sum_{\substack{k \in \Lambda_i, \\ j \notin \Lambda_i}} ((\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{kj}) \cdot \mathbf{n}, \quad (8)$$

где  $m_p$ ,  $\Theta_p$ ,  $\varphi_i$  — масса, момент инерции и угол поворота частицы проппанта;  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к плоскости, в которой проводится моделирование;  $\Lambda_i$  — множество индексов частиц, представляющих частицу проппанта  $i$ ;  $\mathbf{g}$  — массовая сила (равная нулю в случае течения Куэтта).

Начальное расположение частиц проппанта и жидкости задается следующим образом. Частицы жидкости формируют идеальную квадратную решетку с шагом  $a_0$ . После начала расчета частицы быстро перемешиваются. Частицы проппанта либо располагаются случайно (при объемной концентрации, меньшей 0.4), либо формируют квадратную решетку (при большей концентрации). Объемная концентрация проппанта  $c$  при этом определяется формулой

$$c = \frac{\pi R^2 N_p}{L^2},$$

где  $L$  — размер расчетной области;  $N_p$  — полное число частиц проппанта;  $R$  — радиус частицы проппанта.

Твердые стенки моделируются путем задания движения двух слоев частиц с каждой стороны. Данные частицы неподвижны в случае течения Пуазейля и движутся с постоянной скоростью в случае течения Куэтта. Тепло, выделяемое за счет сдвигового течения, удаляется из системы при помощи термостата Берендсена [22]. Термостат располагается в тонкой полоске жидкости шириной  $5a$  вблизи левой границы расчетной области.

Важным параметром модели является число частиц. Точность расчетов можно повысить, увеличивая число частиц жидкости и уменьшая их размер по отношению к размеру частиц проппанта. Очевидно, что для адекватного описания течения между частицами проппанта размер частиц жидкости следует уменьшать при увеличении концентрации. В расчетах для концентрации, превышающей 0.3, размер частиц жидкости принимался в 1.5 раза меньше, чем для концентрации, меньшей 0.3. При этом параметры системы масштабируются таким образом, чтобы размер системы, плотность жидкости, число Рейнольдса и скорость звука  $v_s = \sqrt{6fa/m}$  не зависели от числа частиц [18, 19].

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СУСПЕНЗИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Течение создается движением стенок с постоянной скоростью  $v$  в противоположных направлениях. Начальные скорости частиц жидкости и проппанта соответствует линейному профилю скорости однофазной жидкости. Частицы жидкости имеют дополнительные случайные

скорости. В ходе моделирования вычисляется сила  $F_{wall}$ , действующая на стенку в направлении течения. Среднее касательное напряжение на стенке  $\tau$  и скорость сдвига определяются соотношениями:

$$\tau(c, v) = \frac{F_{wall}(c, v)}{L}, \quad \dot{\gamma} = \frac{2v}{L}. \quad (9)$$

Относительная эффективная вязкость суспензии находится по формуле

$$\frac{\mu(c, v)}{\mu(0, v)} = \frac{F_{wall}(c, v)}{F_{wall}(0, v)}. \quad (10)$$

При вычислении эффективного показателя поведения для каждой концентрации проводятся два расчета с различными скоростями стенки  $v_1$  и  $v_2$ . Тогда подстановка выражений для касательных напряжений и скорости сдвига (9) в формулу (6) при  $\tau_0 = 0$  дает эффективный показатель поведения  $n$ :

$$n(c) = \frac{\ln(F_{wall}(c, v_1) / F_{wall}(c, v_2))}{\ln(v_1 / v_2)}. \quad (11)$$

Таким образом, формулы (10), (11) служат для определения эффективной вязкости и эффективного показателя поведения при течении Куэтта. Отметим, что вывод данных формул основан на предположении, что в расчетной области реализуется однородное сдвиговое течение. Такое предположение общепринято при интерпретации результатов экспериментов [1], основанных на течении Куэтта. Далее будет показано, что оно выполняется только при  $c < 0.5$ .

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СУСПЕНЗИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

При моделировании течения Пуазейля движение суспензии задается действием постоянной массовой силы, имеющей направление потока. В работах [18, 19] показано, что такое течение эквивалентно течению под действием постоянного градиента давления. Начальные скорости частиц жидкости и проппанта соответствуют течению Пуазейля однофазной ньютоновской жидкости. Частицам жидкости дополнительно сообщаются случайные начальные скорости. Наличие частиц проппанта увеличивает эффективную вязкость суспензии, что приводит к изменению начального параболического профиля скорости в процессе достижения стационарного режима. В ходе моделирования вычисляется скорость центра масс всех частиц в расчетной области  $v_{av}$ . В стационарном режиме  $v_{av}$  совпадает со средним значением скорости в поперечном сечении. Эффективная вязкость и эффективная плотность суспензии определяются соотношениями [18, 19]:

$$\mu_s = \frac{\rho_s g L^2}{12 v_{av}}, \quad \rho_s = \frac{m N_f + m_p N_p}{L^2}, \quad (12)$$

где  $g$  — массовая сила;  $m$ ,  $N_f$  — масса и полное число частиц жидкости;  $m_p$ ,  $N_p$  — масса и полное число частиц проппанта. Первая из формул (12) следует из решения задачи о течении Пуазейля ньютоновской жидкости под действием постоянной массовой силы  $g$ . При компьютерном моделировании массовая сила подбирается таким образом, чтобы величина  $\rho_s g$  не зависела от концентрации проппанта. Тогда единственным параметром в первой из формул (12), зависящим от концентрации проппанта, является средняя скорость  $v_{av}$ , которая и определяет эффективную вязкость.

Эффективный показатель поведения суспензии  $n$  вычисляется с использованием формулы, полученной для течения Пуазейля степенной жидкости [18]:

$$\rho_s g = K \frac{2^{n+1}(2+1/n)^n}{L^{n+1}} v_{av}^n, \quad (13)$$

где  $K$  — коэффициент вязкости. Для вычисления показателя поведения  $n$  проводится два расчета с различными массовыми силами  $g_1$  и  $g_2$ . Тогда уравнение (13) дает:

$$n(c) = \frac{\ln(g_1/g_2)}{\ln(v_{av}(c, g_1)/v_{av}(c, g_2))}. \quad (14)$$

Таким образом, формулы (12) и (14) определяют эффективные свойства суспензии в случае течения Пуазейля.

### ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

К безразмерным параметрам модели, влияющим на относительную вязкость суспензии, относятся число Рейнольдса ( $Re$ ), число Пекле ( $Pe$ ) [23], отношение диаметра проппанта к ширине канала и отношение плотности проппанта к плотности жидкости. Калибровка параметров проводится таким образом, чтобы данные параметры, за исключением числа Пекле, соответствовали течению суспензии в трещине гидроразрыва. Влияние числа Пекле на результаты моделирования обсуждается ниже.

Для проппанта, обычно применяемого для гидроразрыва, размер частиц составляет 20/40 меш (0.4–0.8 мм). Раскрытие трещины имеет порядок 10 мм. Характерное число Рейнольдса имеет порядок единицы [18, 19]. Отметим, что это число не должно в точности воспроизводиться при моделировании. Необходимо только, чтобы поток был ламинарным. Следовательно, для ускорения расчетов можно использовать на порядок большее число Рейнольдса. В данной работе принимались следующие значения параметров:

$$R/L = 1/20, \quad \rho_p / \rho_f = 2, \quad Re \approx 30, \quad Pe \approx 10, \quad (15)$$

где  $L$  — размер расчетной области;  $R$  — радиус частиц проппанта;  $\rho_f$ ,  $\rho_p$  — плотности жидкости и проппанта соответственно. Строго говоря, число Пекле, используемое в данной работе, существенно ниже значения, типичного для гидроразрыва. Однако в [23] показано, что для  $Pe > 10$  эффективная вязкость весьма слабо зависит от числа Пекле. Кроме того, сравнение с результатами моделирования методом гидродинамики сглаженных частиц [19] показало, что влияние числа Пекле пренебрежимо мало по сравнению со стандартным отклонением результатов расчетов. Более детальное исследование влияния числа Пекле выходит за рамки данной работы.

Безразмерная масса, равновесное расстояние и параметр взаимодействия выбирались следующим образом:  $m = 0.09$ ,  $a = 0.3$ ,  $f = 0.3$  для  $c < 0.3$  и  $m = 0.04$ ,  $a = 0.2$ ,  $f = 0.2$  для  $c \geq 0.3$ . Значения оставшихся параметров:

$$\frac{T}{fa} = 0.125, \quad \frac{a_{cut}}{a} = 2.1, \quad \frac{\Delta t}{t_*} = 0.01, \quad \frac{a_0}{a} = 0.98, \quad \frac{v_0}{v_s} = 0.14, \quad \frac{mg}{f} = 2.58 \cdot 10^{-5}, \quad (16)$$

где  $T$  — температура (кинетическая энергия);  $\Delta t$  — шаг интегрирования;  $t_* = 2\pi\sqrt{ma/6f}$ ;  $a_0$  — начальное расстояние между частицами жидкости;  $v_s = \sqrt{6fa/m}$  — скорость звука. При моделировании использовалось порядка  $10^5$  частиц. Число шагов интегрирования составляло  $2 \cdot 10^6$ .

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СУСПЕНЗИЙ

На рис. 1 приведены зависимости эффективной вязкости суспензии от концентрации проппанта, полученные при моделировании течений Куэтта и Пуазейля. Результирующие значения вязкости нормируются на вязкость жидкости без проппанта  $\mu_s(0)$ . Каждая точка на рис. 1 отвечает среднему значению, полученному в четырех расчетах с различными начальными условиями. Горизонтальные черточки отмечают границы разброса результатов (среднее значение плюс/минус стандартное отклонение), причем они показаны только в случаях, когда дисперсия превышает размер маркера, соответствующего среднему значению. Сплошная линия соответствует формуле Эйнштейна (1) в двумерном случае ( $A = 2$ ); штрихпунктирная линия с двумя точками — формуле (2), выведенной в работе [4].

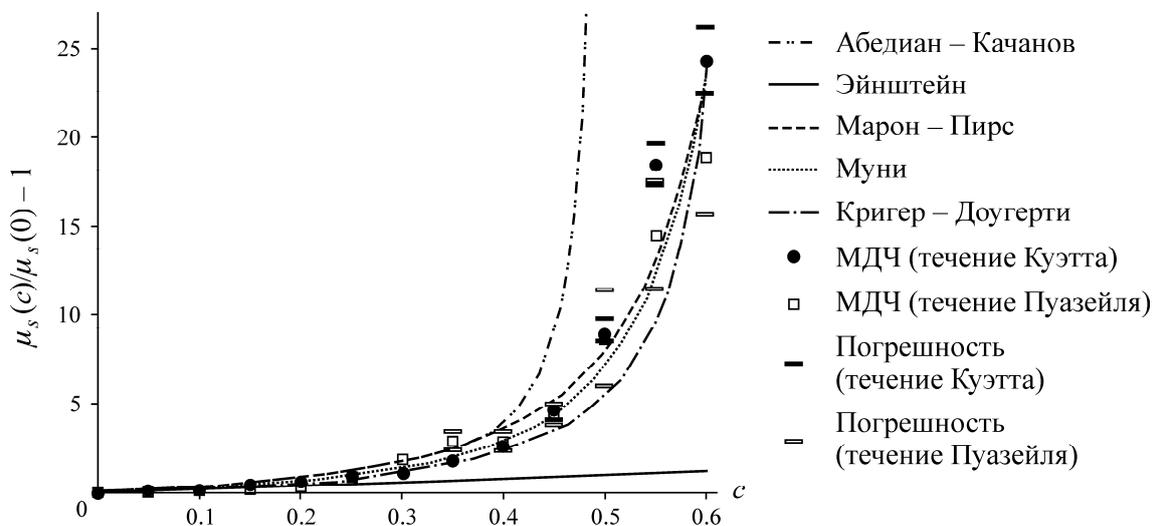


Рис. 1. Зависимости относительной вязкости от концентрации проппанта, полученные при моделировании течений Куэтта и Пуазейля методом динамики частиц, а также рассчитанные по формулам (1)–(5)

Видно, что разница между результатами, полученными при моделировании течений Пуазейля и Куэтта, имеет тот же порядок, что и дисперсия результатов. Для концентраций проппанта больших 0.2 вычисленные значения эффективной вязкости больше, чем значения, получаемые по формуле (1). Корректная асимптотическая формула (2) применима в значительно более широком диапазоне концентраций, чем формула (1). Она достаточно точно согласуется с результатами моделирования вплоть до концентрации 0.4. При более высоких концентрациях гидродинамические взаимодействия между частицами проппанта, не учитываемые при ее выводе, оказываются существенными. Тогда становится необходимым применять формулы типа (3)–(5). При этом критическая концентрация, входящая в такие формулы, используется как параметр модели. Для формул (3), (4) и (5) методом наименьших квадратов получены следующие значения:  $c_*^M = 0.96$ ,  $c_*^{MP} = 0.75$  и  $c_*^{CD} = 0.66$  соответственно. Кривые, отвечающие этим формулам, показаны на рис. 1. Видно, что формулы (3) и (4) дают лучшую аппроксимацию результатов численного моделирования, чем формула (5). Однако критическая концентрация  $c_*^M = 0.96$ , соответствующая формуле (3), не реалистична, так как превышает максимальную концентрацию в двумерном случае, которая соответствует упаковке проппанта в треугольную решетку и состав

ляет  $\pi/(2\sqrt{3}) \approx 0.91$ . Напротив, критическая концентрация 0.75, полученная для формулы Марона–Пирса (4), достаточно близка к концентрации  $0.82 \pm 0.02$ , соответствующей случайной плотной упаковке в двумерном случае [24]. Таким образом, при высоких концентрациях проппанта формула Марона–Пирса (4) наилучшим образом согласуется с результатами моделирования, полученными для течений Куэтта и Пуазейля. Подобное согласие отмечено и при сравнении формулы (4) с экспериментальными данными в работе [1].

Для оценки неньютоновских свойств суспензии при моделировании течений Куэтта и Пуазейля с использованием формул (11), (14) рассчитывался эффективный показатель поведения  $n$ . Зависимость данного параметра от концентрации проппанта показана на рис. 2.

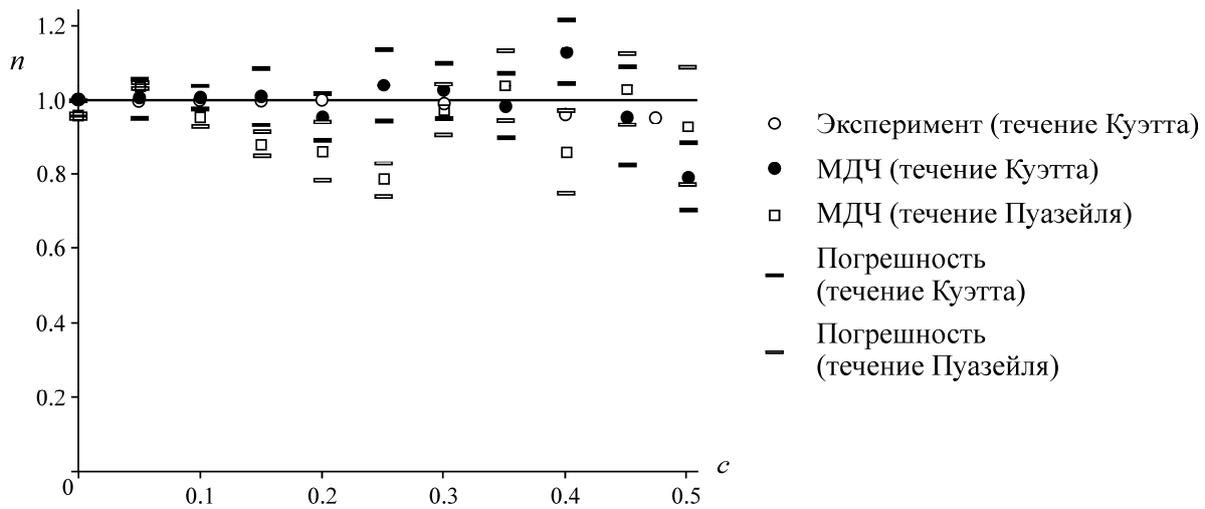


Рис. 2. Зависимость эффективного показателя поведения суспензии от концентрации проппанта, полученная экспериментально [1] и численно при моделировании методом динамики частиц течений Пуазейля и Куэтта. Прямая линия соответствует ньютоновской жидкости ( $n = 1$ )

Каждая точка на рис. 2 соответствует среднему по четырем расчетам с различными начальными условиями. Черточки отмечают границы разброса результатов. Для концентраций проппанта в диапазоне  $0 \leq c \leq 0.5$  эффективные показатели поведения, полученные при моделировании течений Пуазейля и Куэтта, совпадают в пределах стандартного отклонения. Кроме того, эти результаты согласуются с экспериментальными данными, приведенными в работе [1]. На практике отклонением от ньютоновского поведения суспензии в данном диапазоне концентрации можно пренебречь.

При течении Куэтта и концентрациях  $c = 0.55$  и  $c = 0.6$  частицы проппанта начинают образовывать пробки. Типичная эволюция профиля скорости при  $c = 0.55$  представлена на рис. 3. Видно, что с течением времени профиль скорости становится существенно нелинейным. Детальный анализ показывает, что большинство частиц в расчетной области, за исключением небольшого слоя вблизи верхней границы, движется в одном направлении. Этот эффект важно учитывать при интерпретации результатов лабораторных экспериментов. Он означает, что при высоких концентрациях не выполняется обычно используемое предположение о том, что в вискозиметре реализуется однородное сдвиговое течение. Такое поведение свидетельствует также о возможности возникновения заторов в местах высокой концентрации проппанта при проведении гидроразрыва. Более подробный анализ подобных эффектов требует учета сил трения между частицами проппанта.

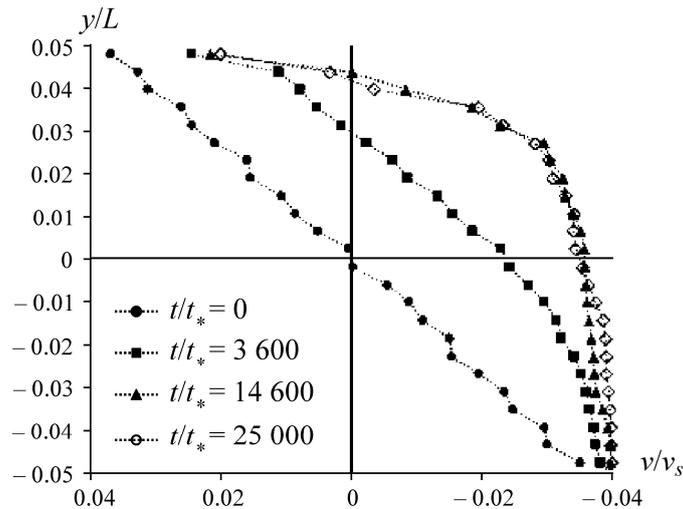


Рис. 3. Эволюция профиля скорости в случае течения куэттовского типа при высокой концентрации частиц проппанта ( $c = 0.55$ )

## ВЫВОДЫ

Численное моделирование течения смеси проппант–жидкость позволяет ответить на вопросы, трудно поддающиеся экспериментальному исследованию. В частности, становится возможным сравнивать реологические свойства смеси в широком диапазоне концентраций проппанта при различных видах течения. Показано, что при значениях параметров, отвечающих течению смеси проппант–жидкость в трещинах гидроразрыва, зависимости эффективной вязкости смеси от концентрации проппанта  $c$ , соответствующие течениям Куэтта и Пуазейля, совпадают в пределах стандартного отклонения. Асимптотическая формула (1) точна лишь при  $c \leq 0.2$ . При  $c \leq 0.4$  результаты хорошо описываются асимптотической формулой  $\mu_s = \mu_s(0)/(1 - Ac)$ , выведенной в работе [4]. При более высоких концентрациях результаты моделирования наилучшим образом описываются эмпирической формулой Марона–Пирса  $\mu_s^{MP} = \mu_s(0)/(1 - c/c_*)^2$ .

Моделирование течений Пуазейля и Куэтта позволило также определить зависимость эффективного показателя поведения суспензии от концентрации проппанта. При этом результаты, полученные для данных видов течения, согласуются в пределах стандартного отклонения. Анализ результатов показывает, что в инженерных приложениях неньютоновскими эффектами можно пренебречь до концентрации  $c = 0.5$  (в двумерной постановке). При более высоких концентрациях профиль скорости при сдвиговом течении становится существенно нелинейным. Большинство частиц в расчетной области движется в одном направлении со скоростью, приблизительно равной скорости стенки. Тем самым нарушается предположение об однородности сдвигового течения, используемое для интерпретации результатов натуральных экспериментов. Подробное исследование этого важного для практики эффекта требует усложнения используемой математической модели. В частности, необходим учет сил трения между частицами проппанта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mueller S., Llewellyn E. W., et al. The rheology of suspensions of solid particles, Proc. R. Soc. A, 2010, Vol. 466.

2. **Einstein A.** Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen, *Ann. Phys.*, 1906, Vol. 19.
3. **Brady J. F.** The Einstein viscosity correction in  $n$  dimensions, *Int. J. Mult. Flow*, 1983, Vol. 10.
4. **Abedian B., Kachanov M. L.** On the effective viscosity of suspensions, *Int. J. Eng. Sci.*, 2010, Vol. 48.
5. **Hashin Z., Shtrikman S.** A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Sol.*, 1963, Vol. 11.
6. **Mooney M.** The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles, *J. Colloid Sci.*, 1951, Vol. 6.
7. **Maron S. H., Pierce P. E.** Application of Ree-Eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles, *J. Colloid Sci.*, 1956, Vol. 11.
8. **Krieger I. M., Dougherty T. J.** A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres, *T. Soc. Rheol.*, 1959, 3.
9. **Herschel W. H., Bulkley R.** Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen, *Kolloid Zeitschrift*, 1926, Vol. 39.
10. **Economides M. J., Nolte K. G.** Reservoir stimulation. Prentice hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
11. **Adachi J., Siebrits E., et al.** Computer simulation of hydraulic fractures, *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2007, Vol. 44.
12. **Hoover W. G.** Molecular dynamics, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 258, Springer, Berlin, 1986.
13. **Кривцов А. М.** Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. — М.: Физматлит, 2007.
14. **Foss D. R., Brady J. F.** Structure, diffusion and rheology of Brownian suspensions by Stokesian dynamics simulations, *J. Fluid. Mech.*, 2000, Vol. 407.
15. **Martys N. S.** Study of a dissipative particle dynamics based approach for modeling suspensions, *J. Rheol.*, 2005, Vol. 49.
16. **Martys N. S., George W. L., et al.** A smoothed particle hydrodynamics-based fluid model with a spatially dependent viscosity: application to flow of a suspension with a non-Newtonian fluid matrix, *Rheol. Acta*, 2010, Vol. 49.
17. **Ladd A. J. C., Colvin M. E., et al.** Application of lattice–gas cellular automata to the brownian motion of solids in suspension, *Phys. Rev. Let.*, 1988, Vol. 60.
18. **Kuzkin V. A., Krivtsov A. M., Linkov A. M.** Proppant transport in hydraulic fractures: computer simulation of effective properties and movement of the suspension, *Proc. 41 Summer-School Conference “Advanced Problems in Mechanics”*, 2013.
19. **Кузькин В. А., Кривцов А. М., Линьков А. М.** Компьютерное моделирование эффективной вязкости смеси проппант–жидкость, используемой при гидроразрыве // ФТПРПИ. — 2014. — № 1.
20. **Verlet L.** Computer “Experiments” on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules, *Phys. Rev.*, 1967, 159.
21. **Le-Zakharov A. A., Krivtsov A. M.** Molecular dynamics investigation of heat conduction in crystals with defects, *Doklady Physics*, 2008, Vol. 53.
22. **Berendsen H. J. C., Postma J. P. M., van Gunsteren W. F., Di Nola A., and Haak J. R.** Molecular-dynamics with coupling to an external bath, *J. Chem. Phys.*, 1984, Vol. 81.
23. **Boek E. S., Coveney P. V., Lekkerkerker H. N. W.** Computer simulation of rheological phenomena in dense colloidal suspensions with dissipative particle dynamics, *J. Phys. Cond. Mat.*, 1996, Vol. 8.
24. **Berryman J. G.** Random close packing of hard spheres and disks, *Phys. Rev. A*, 1983, Vol. 27.

*Поступила в редакцию 9/VI 2014*