

УДК 536.46

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ ПОРОХА.  
УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

*Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Покил*

(Москва)

На основании феноменологической теории нестационарного горения получены уравнения, описывающие процессы при горении пороха в полузамкнутом объеме. Найдено решение этих уравнений при малых изменениях критического сечения сопла. Исследована устойчивость внутрикамерных процессов.

1. Получим дифференциальные уравнения, определяющие изменение давления и температуры газа при горении пороха в полузамкнутом объеме.

В предположении о существовании тонкого, химически равновесного пламени над горящей поверхностью из уравнений газодинамики для совершенного, идеального и нетеплопроводного газа в камере, пренебрегая скоростью и кинетической энергией по сравнению со скоростью звука и энтальпией, получим [1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0 \\ \frac{\partial (E\rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho v H) = 0, \quad p = \rho RT \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $E = c_v T$  и  $H = c_p T$  — соответственно внутренняя энергия и энтальпия.

После осреднения (1.1) по объему  $W$  будем иметь уравнения для давления и температуры газа в камере

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho W) &= (\rho u)_S S - \frac{\psi}{V R T_g} p \sigma & (1.2) \\ \frac{d}{dt} (\rho W E_g) &= (\rho u)_S S H_F - \frac{\psi}{V R T_g} p \sigma H_g \\ \frac{dW}{dt} &= u S \end{aligned}$$

Здесь  $S$  — площадь горящей поверхности пороха.  $\psi (\gamma)$  — известная функция от  $\gamma = c_p / c_v$  в коэффициенте истечения,  $\sigma$  — площадь критического сечения сопла. (При выводе (1.2) было сделано дополнительное предположение о малости градиентов давления и энтальпии в камере.) Следствием осреднения поля температуры по объему является наличие разрыва температуры на фронте пламени в нестационарных условиях (в стационарном режиме  $T_F = T_g$ ).

При решении исходной системы (1.1) такого разрыва не существует, температура будет функцией не только времени, но и координат. Физически это соответствует появлению тепловых волн (а при переменности химического состава продуктов — и волн химической энтальпии) в продуктах сгорания при нестационарном процессе [1]. Однако в случае сложного

движения газа в объеме диссипация возмущений температуры и химической энталпии происходит достаточно быстро, в связи с чем их осреднение по объему можно считать оправданным.

Для замыкания системы (1.2) необходимо одновременно рассматривать уравнения, описывающие нестационарное горение конденсированного вещества [2-4].

Тогда, вводя безразмерные параметры

$$t_k = \frac{W^\circ}{A^\circ \gamma R T_F^\circ}, \quad A^\circ = \frac{\Psi(\gamma)}{\sqrt{R T_F^\circ}}, \quad \Psi(\gamma) = V \bar{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\kappa} \left( \kappa - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{T_S^\circ - T_0}{T_F^\circ}, \quad \vartheta_0 = \frac{T_0}{T_F^\circ}, \quad \vartheta_S^\circ = \frac{T_S^\circ}{T_F^\circ}, \quad \Gamma = \frac{S^\circ u^\circ t_k}{W^\circ}, \quad t_S = \frac{\kappa}{u^\circ 2}, \quad \kappa = \frac{t_k}{t_S}$$

и функции

$$v = \frac{u}{u^\circ}, \quad \pi = \frac{p}{p^\circ}, \quad \Sigma = \frac{\sigma}{\sigma^\circ}, \quad \hat{v} = \frac{T}{T_F^\circ}, \quad \vartheta_S = \frac{T_S}{T_F^\circ}$$

$$\vartheta_g = \frac{T_g}{T_F^\circ}, \quad \vartheta_F = \frac{T_F}{T_F^\circ}, \quad \tau = \frac{t}{t_S}, \quad \xi = \frac{u^\circ x}{\kappa}, \quad w = \frac{W}{W^\circ}$$

$$\Phi = \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \varepsilon^{-1.0}$$

(градус над функциями отмечает их стационарные значения), полную систему уравнений, определяющую внутреннюю баллистику двигателя при любом нестационарном процессе, можно записать в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + v(\pi, \varphi) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi \leq 0) \quad (1.3)$$

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_S(\pi, \varphi), \quad \vartheta(-\infty, \tau) = \vartheta_0$$

$$v = v(\pi, \varphi) \quad (1.4)$$

$$\vartheta_F = \vartheta_F(\pi, \varphi) \quad (1.5)$$

$$\chi \gamma w \frac{d\vartheta_g}{d\tau} = \frac{v}{\pi} (\gamma \vartheta_F \vartheta_g - \vartheta_g^2) + (1 - \gamma) \vartheta_g^{3/2} \Sigma \quad (1.6)$$

$$\chi w \frac{d\pi}{d\tau} = v \vartheta_F - \pi \vartheta_g^{1/2} \Sigma - \pi v \Gamma \quad (1.7)$$

$$\chi \frac{dw}{d\tau} = v \Gamma \quad (1.8)$$

Начальными условиями для уравнений (1.4) — (1.8) при рассмотрении переходных процессов являются их стационарные решения

$$\vartheta(\xi, 0) = \vartheta_0 + \varepsilon \exp \xi \quad (1.9)$$

$$\vartheta_g(0) = \vartheta_F(0) = \pi(0) = w(0) = v(0) = \Sigma(0) = 1.0$$

Система (1.3) — (1.9) замкнута и по заданному закону изменения площади критического сечения сопла  $\Sigma(\tau)$  позволяет определить все осредненные внутрибаллистические характеристики камеры горения. (Считается, что скорость движения газа над горящей поверхностью пороха мала и ее влияние на скорость горения, температуру поверхности и температуру пламени несущественно.)

Основным параметром, определяющим вклад нестационарности при переходном режиме, является параметр  $\chi$  ( $\chi = t_k / t_S$  — отношение характерных времен камеры и прогретого слоя пороха). Видно, что если  $\chi \gg 1.0$ , то для расчета переходных процессов можно пользоваться

формулами стационарного горения. Однако и в этом случае учет неполноты сгорания (зависимость от  $T_F^\circ$  от  $p$  и  $T_0$ ) по-прежнему необходим.

Нужно подчеркнуть, что рассматриваемая здесь в пределах обобщенной феноменологической теории постановка проблемы, в отличие от традиционного подхода к решению задачи о нестационарном горении пороха в полузамкнутом объеме [3,4], позволяет учесть два принципиальных эффекта неизэнтропического пламени:

1) неадиабатичность нестационарного фронта пламени, связанную с переменным во времени потоком тепла из пламени в  $k$ -фазу (конденсированную фазу);

2) незавершенность химических реакций, присущую горению конденсированных веществ в стационарном режиме при низких давлениях, а в нестационарном — при больших градиентах температуры  $\varphi$  на поверхности.

2. Представляет интерес исследование реакции двигателя на малые изменения критического сечения сопла  $\Sigma(\tau) = 1 + \Delta\Sigma(\tau)$ . Выполняя линеаризацию уравнений, в первом приближении по  $\Delta$  будем иметь

$$\frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \tau} = \varepsilon v^{(1)} \exp \xi \quad (2.1)$$

$$\theta^{(1)}(0, \tau) = \theta_S^{(1)} = a_2 \varphi^{(1)} + b_2 \pi^{(1)}, \quad \theta^{(1)}(-\infty, \tau) = 0, \quad v^{(1)}(0, \xi) = 0$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (2.2)$$

$$\theta_F^{(1)} = a_1 \varphi^{(1)} + b_1 \pi^{(1)} \quad (2.3)$$

$$v^{(1)} = a_3 \varphi^{(1)} + b_3 \pi^{(1)} \quad (2.4)$$

$$\chi \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d\theta_g^{(1)}}{d\tau} = v^{(1)} - \pi^{(1)} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \theta_F^{(1)} - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \theta_g^{(1)} - \Sigma^{(1)} \quad (2.5)$$

$$\chi \frac{d\pi^{(1)}}{d\tau} = v^{(1)} - \pi^{(1)} + \theta_F^{(1)} - \frac{1}{2} \theta_g^{(1)} - \Sigma^{(1)} \quad (2.6)$$

$$v^{(1)} = \pi^{(1)} = \theta_F^{(1)} = \theta_g^{(1)} = \Sigma^{(1)} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.7)$$

Здесь индекс 1 над функциями отмечает амплитуду их линейных возмущений, а  $a_j$ ,  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — коэффициенты в разложении функций  $\theta_F$ ,  $\theta_S$  и  $v$  в ряд Тейлора по возмущениям градиента  $\varphi^{(1)}$  и давления  $\pi^{(1)}$ . Значения этих коэффициентов в пределах рассматриваемой модели горения можно получить, воспользовавшись соотношением Михельсона и стационарными зависимостями  $T_F^\circ(p, T_0)$ ,  $T_S^\circ(p, T_0)$ ,  $u^\circ(p, T_0)$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{\partial \theta_F}{\partial \varphi} \right)_\pi = \frac{q}{k+r-1}, \quad b_1 = \left( \frac{\partial \theta_F}{\partial \pi} \right)_\varphi = \frac{s(k+r-1)-q(v+\mu)}{k+r-1} \\ a_2 &= \left( \frac{\partial \theta_S}{\partial \varphi} \right)_\pi = \varepsilon \frac{r}{k+r-1}, \quad b_2 = \left( \frac{\partial \theta_S}{\partial \pi} \right)_\varphi = \varepsilon \frac{\mu(k-1)-vr}{k+r-1} \\ a_3 &= \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)_\pi = \frac{k}{k+r-1}, \quad b_3 = \left( \frac{\partial v}{\partial \pi} \right)_\varphi = \frac{v(r-1)-\mu k}{k+r-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$v = \left( \frac{\partial \ln u^\circ}{\partial \ln p} \right)_{T_0}, \quad k = (T_S^\circ - T_0) \left( \frac{\partial \ln u^\circ}{\partial T_0} \right)_p, \quad \mu = \frac{1}{T_S^\circ - T_0} \left( \frac{\partial T_S^\circ}{\partial \ln p} \right)_{T_0}$$

$$r = \left( \frac{\partial T_S^\circ}{\partial T_0} \right)_p, \quad s = \left( \frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial \ln p} \right)_{T_0}, \quad q = (T_S^\circ - T_0) \left( \frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial T_0} \right)_p \quad (2.9)$$

### 3. Воспользовавшись преобразованием Лапласа по времени

$$\Phi_i^*(\omega) = \int_0^\infty \Phi_i(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau, \quad \operatorname{Re} \omega > 0$$

сведем уравнение теплопроводности (2.1) к виду

$$\frac{d^2\vartheta^*}{d\xi^2} - \frac{d\vartheta^*}{d\xi} - \omega\vartheta^* = \varepsilon v^* \exp \xi \quad (3.1)$$

$$\vartheta^*(-\infty, \tau) = 0, \quad \vartheta^*(0, \tau) = \vartheta_S^*(\omega) = a_2\varphi^* + b_2\pi^*$$

Решение (3.1) имеет форму

$$\vartheta^*(\xi) = \left( \vartheta_S^* + \varepsilon \frac{v^*}{\omega} \right) e^{\alpha\xi} - \varepsilon \frac{v^*}{\omega} e^{\xi} \quad (3.2)$$

где

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \omega} \quad (3.3)$$

Из (3.2) для изображения градиента найдем

$$\varphi^*(\omega) = \frac{\alpha\vartheta_S^*}{\varepsilon} + (\alpha - 1) \frac{v^*}{\omega} \quad (3.4)$$

Используя (3.4) и выполняя преобразование Лапласа над уравнениями (2.2) — (2.7), получим окончательно для изображений функций систему

$$\begin{aligned} & (\chi\omega + 1)\pi^* - v^* - \vartheta_F^* + \frac{1}{2}\vartheta_g^* = -\Sigma^* \\ & \pi^* - v^* - \frac{\gamma}{\gamma-1}\vartheta_F^* + \vartheta_g^* \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \chi\omega + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) = -\Sigma^* \\ & -\frac{a_1\alpha}{\varepsilon}\vartheta_S^* - b_1\pi^* - v^*a_1 \frac{\alpha-1}{\omega} + \vartheta_F^* = 0 \\ & \left( 1 - \frac{a_2\alpha}{\varepsilon} \right) \vartheta_S^* - b_2\pi^* - a_2 \frac{\alpha-1}{\omega} v^* = 0 \\ & -\frac{a_3\alpha}{\varepsilon}\vartheta_S^* - b_3\pi^* + \left( 1 - a_3 \frac{\alpha-1}{\omega} \right) v^* = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

решение которой представимо в виде

$$\Phi_i^*(\omega) = -\frac{\operatorname{Det}_i}{\operatorname{Det}} \Sigma^*(\omega)$$

Здесь  $\operatorname{Det}$  — общий определитель системы, а  $\operatorname{Det}_i$  получается из последнего заменой столбца с коэффициентом при  $\Phi_i^*$  столбцом из коэффициентов правой части (3.5).

После некоторых преобразований с учетом (2.8) и (2.9) для  $\operatorname{Det}$  и  $\operatorname{Det}_{v^*}$  (в дальнейшем ограничимся вычислением только скорости горения, так как остальные переменные определяются аналогично) можно написать

$$\begin{aligned} \operatorname{Det} = & \frac{\alpha(\omega)}{\varepsilon(\gamma-1)} \left\{ -(\gamma\omega^2\chi^2 + c\omega\chi + d) \left[ (1 - \alpha(\omega)) \left( \frac{k}{\omega} + r \right) + (k-1) \right] + \right. \\ & \left. + (1 + \gamma\omega\chi) [(1 - \alpha(\omega)) \delta - v] + \frac{q}{k+r-1} \left( \frac{1}{2} + \gamma\omega\chi \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[ (1 - \alpha(\omega)) \frac{v - \delta}{\omega} - (\delta + \mu)\alpha(\omega) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\operatorname{Det}_{v^*} = \frac{(\gamma\omega\chi + 1) [(1 - \alpha(\omega)) \delta - v]}{(\gamma-1)(k+r-1)} \quad (3.7)$$

где

$$c = \frac{3\gamma + 1}{2} - \gamma b_1, \quad d = 1 - \frac{b_1}{2}, \quad \delta = \nu r - \mu k$$

Рассмотрим на основании (3.6), (3.7) конкретный пример изменения внутрибаллистических параметров камеры при малом синусоидальном изменении критического сечения сопла с частотой  $\Omega$

$$\Sigma^{(1)}(\tau) = \sin \Omega \tau \doteq \Sigma^*(\omega) = \frac{\Omega}{\omega^2 + \Omega^2}$$

Имея в виду использование теоремы Эфроса для вычисления оригиналов функций, введем новую комплексную переменную

$$z = (\omega + 1/4)^{1/2}$$

Выражением для изображения скорости горения тогда будет

$$v^*(z) = \frac{\Omega \epsilon}{k + r - 1} \frac{M_2(z)}{M_1(z) [(z^2 - 1/4)^2 + \Omega^2]} \quad (3.8)$$

где  $M_1(z)$  и  $M_2(z)$  — многочлены соответственно шестой и третьей степени по  $z$ , получающиеся из (3.6) и (3.7). Далее, обозначая через  $z_i = x_i + jy_i$  шесть попарно комплексно-сопряженных корней многочлена  $M_1(z)$  и через

$$\begin{aligned} z_7 &= (1/4 + j\Omega)^{1/2}, & z_8 &= (1/4 - j\Omega)^{1/2} \\ z_9 &= -(1/4 + j\Omega)^{1/2}, & z_{10} &= -(1/4 - j\Omega)^{1/2} \end{aligned}$$

корни уравнения  $(z^2 - 1/4)^2 + \Omega^2 = 0$ , для функций  $v^*(z)$  можно написать

$$v^*(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{M_2(z)}{\prod_{i=1}^{10} (z - z_i)} \frac{\Omega \epsilon}{k + r - 1}$$

Применяя теперь теорему Эфроса и вторую теорему разложения, получим для оригинала скорости горения

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \frac{\exp(-\tau/4)}{\sqrt{\pi \tau}} \sum_{i=1}^{10} \operatorname{Res}_{z_i} F(z) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4\tau} + z_i u\right) du = \\ &= \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \sum_{i=1}^{10} \operatorname{Res}_{z_i} F(z) e^{z_i \tau} [1 + \Phi(z_i) \sqrt{\tau}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

( $\Phi(x)$  — интеграл ошибок). Воспользовавшись свойствами попарно сопряженных комплексных корней, запишем

$$\begin{aligned} \exp(z_{1,2} \tau - 1/4\tau) &= \exp(-\lambda_1 \tau \pm jf_1) = \exp(-\lambda_1 \tau) (\cos f_1 \tau \pm j \sin f_1 \tau) \\ \exp(z_{3,4} \tau - 1/4\tau) &= \exp(-\lambda_2 \tau \pm jf_2) = \exp(-\lambda_2 \tau) (\cos f_2 \tau \pm j \sin f_2 \tau) \\ \exp(z_{5,6} \tau - 1/4\tau) &= \exp(-\lambda_3 \tau \pm jf_3) = \exp(-\lambda_3 \tau) (\cos f_3 \tau \pm j \sin f_3 \tau) \\ \exp(z_{7,8} \tau - 1/4\tau) &= \exp j\Omega \tau, \quad \exp(z_{8,10}^2 \tau - 1/4\tau) = \exp(-j\Omega \tau) \end{aligned}$$

где

$$\lambda_1 = -[(\operatorname{Re} z_{1,2})^2 - (\operatorname{Im} z_{1,2})^2 - 1/4], \quad f_1 = 2 \operatorname{Re} z_{1,2} \operatorname{Im} z_{1,2}$$

$$\lambda_2 = -[(\operatorname{Re} z_{3,4})^2 - (\operatorname{Im} z_{3,4})^2 - 1/4], \quad f_2 = 2 \operatorname{Re} z_{3,4} \operatorname{Im} z_{3,4}$$

$$\lambda_3 = -[(\operatorname{Re} z_{5,6})^2 - (\operatorname{Im} z_{5,6})^2 - 1/4], \quad f_3 = 2 \operatorname{Re} z_{5,6} \operatorname{Im} z_{5,6}$$

Далее, обозначая

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_i} F(z) [1 + \Phi(z_i \sqrt{\tau})] &= \operatorname{Res}_{z_i} \{F(z) [1 + \Phi(z_i \sqrt{\tau})]\} = \\ &= \operatorname{Res}_{z_i} W(z_i \sqrt{\tau}, z_i) \end{aligned}$$

и выполняя необходимые преобразования, приведем (3.9) к виду

$$v^{(1)}(\tau) = 2B \sin(\Omega\tau + \Psi_\Omega) + 2 \sum_{i=1, 2, 3} e^{-\lambda_i \tau} A_i \sin(f_i \tau + \Psi_i) \quad (3.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\{\operatorname{Re} [\operatorname{Res} W(z_8 \sqrt{\tau}, z_8) + \operatorname{Res} W(z_{10} \sqrt{\tau}, z_{10})]\}^2 +} \\ &\quad + \{\operatorname{Im} [\operatorname{Res} W(z_8 \sqrt{\tau}, z_8) + \operatorname{Res} W(z_{10} \sqrt{\tau}, z_{10})]\}^2 \\ \Psi_\Omega &= -\arctg \frac{\operatorname{Re} \operatorname{Res} W(z_8 \sqrt{\tau}, z_8) + \operatorname{Re} \operatorname{Res} W(z_{10} \sqrt{\tau}, z_{10})}{\operatorname{Im} \operatorname{Res} W(z_8 \sqrt{\tau}, z_8) + \operatorname{Im} \operatorname{Res} W(z_{10} \sqrt{\tau}, z_{10})} \\ A_i &= \sqrt{\{\operatorname{Re} \operatorname{Res} W(z_i \sqrt{\tau}, z_i)\}^2 + \{\operatorname{Im} \operatorname{Res} W(z_i \sqrt{\tau}, z_i)\}^2} \\ \Psi_i &= -\arctg \frac{\operatorname{Re} \operatorname{Res} W(z_i \sqrt{\tau}, z_i)}{\operatorname{Im} \operatorname{Res} W(z_i \sqrt{\tau}, z_i)} \end{aligned}$$

Из решения (3.10) следует, что колебания скорости горения пороха при периодическом изменении площади критического сечения сопла в первом приближении представляют собой совокупность двух типов колебаний: с частотой вынуждающей силы  $\Omega$  и с собственными частотами  $f_i$  системы конденсированная фаза — пламя — камера. Отметим, что если среди корней многочлена  $M_1(z)$  имеются  $n$  вещественных, то формула (3.9) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} v^{(1)}(\tau) &= 2B \sin(\Omega\tau + \Psi_\Omega) + \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \sum_{i=1}^n e^{z_i \tau} \times \quad (3.11) \\ &\quad \times \operatorname{Res}_{z_i} W(z_i \sqrt{\tau}, z_i) + 2 \sum_{i=h+1}^3 A_i e^{-\lambda_i \tau} \sin(f_i \tau + \Psi_i) \end{aligned}$$

где первая сумма распространяется по всем действительным, а вторая — по всем комплексным корням. При записи (3.11) учтено свойство комплексного сопряжения корней уравнения  $M_1(z) = 0$ .

Приведенный выше способ вычисления оригинала скорости горения пороха пригоден также для получения любой внутрибаллистической функции двигателя ( $\vartheta_F^{(1)}$ ,  $\vartheta_\omega^{(1)}$ ,  $\pi^{(1)}$  и т. д.). При этом собственные частоты  $f_i$  и декременты затухания  $\lambda_i$  системы не будут зависеть от формы малого возмущения сопла, поскольку эти величины определяются лишь значениями корней характеристического уравнения.

4. Полученное в предыдущем пункте решение для отклика системы на вынужденные колебания критического сечения сопла позволяет в пределе перейти к исследованию внутрикамерной устойчивости при горении пороха. В самом деле, из (3.9) и (3.10) видно, что амплитуда возмущения остается ограниченной во времени, если выполнено условие  $\operatorname{Re} z_i^2 \leq 0$ , или

$$\operatorname{Re} \omega_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

где  $\omega_i$  — корни характеристического уравнения, записанного в форме (3.6).

Исследуем аналитически предельные случаи поведения корней (3.6) в зависимости от соотношения между временами  $(t_s, t_k)$  релаксации  $k$ -фазы пороха и объема камеры сгорания. Так как параметр  $\chi = t_k / t_s$  входит в характеристическое уравнение только в виде произведения  $\chi\omega$ , то формальный предельный переход по  $\chi$  ( $\chi \gg 1.0$  или  $\chi \ll 1.0$ ) невозможен без одновременного рассмотрения ограничений на величину собственных частот системы.

Рассмотрим случай  $\chi \gg 1.0$ . При этом существуют две возможности:

а)  $\chi\omega \gg 1.0$ ,  $\omega \sim 1.0$ , что соответствует камерам сгорания с большим временем релаксации процесса истечения газа,

б)  $\chi\omega \sim 1.0$ ,  $\omega \ll 1.0$ , что соответствует квазистационарному горению пороха (напомним, что безразмерная частота  $\omega$  связана с ее размерной величиной  $\omega^0$  соотношением  $\omega = \omega^0 t_s$ ).

Выполняя в (3.6) предельный переход для а) сведем характеристическое уравнение к

$$\frac{1-\alpha}{\omega} k + (1-\alpha)r + k - 1 = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \omega} \quad (4.2)$$

решение которого имеет вид

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{(k-1)^2}{r^2} - \frac{k+1}{r} \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{k+1}{r} - \frac{(k-1)^2}{r^2} \right]^2 - 4 \frac{k}{r^2}} \right\} \quad (4.3)$$

Исследование показывает, что  $\operatorname{Re} \omega_{1,2} \leq 0$  и процесс горения устойчив, если

$$\begin{aligned} k &< 1.0 \text{ при любом } r \\ r &\geq (k-1)^2 / (k+1) \text{ при } k > 1.0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

При этом безразмерная частота колебаний на границе устойчивости равна  $\omega = j\sqrt{k} / r$ .

Отмеченный случай неустойчивости может наблюдаться при горении пороха с постоянным давлением и впервые проанализирован в [5]. Полагая в (4.2)  $r = 0$ , получим критерий устойчивости  $k \leq 1.0$  горения пороха с постоянной температурой поверхности, исследованный Я. Б. Зельдовичем [6].

Переходя к анализу возможности б) выполняя в (3.6) соответствующий предельный переход, имеем после преобразований

$$\chi^2 \omega^2 + \left( \frac{3\gamma+1}{2\gamma} - s - v \right) \chi \omega + \frac{1}{\gamma} \left( 1 - \frac{s}{2} - v \right) = 0 \quad (4.5)$$

Решение (4.5) дается выражением

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\chi} \left\{ - \left( \frac{3\gamma+1}{2\gamma} - s - v \right) \pm \sqrt{\left( \frac{3\gamma+1}{2\gamma} - s - v \right)^2 - \frac{4}{\gamma} \left( 1 - \frac{1}{2}s - v \right)} \right\} \quad (4.6)$$

Условие устойчивости  $\operatorname{Re} \omega_{1,2} \leq 0$  данного режима согласно (4.6) будет определяться неравенствами

$$\begin{aligned} v &\leq \frac{3\gamma+1}{2\gamma} - s \quad \text{при } s \geq \frac{\gamma+1}{\gamma} \\ v &\leq 1 - \frac{s}{2} \quad \text{при } s \leq \frac{\gamma+1}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.7)$$

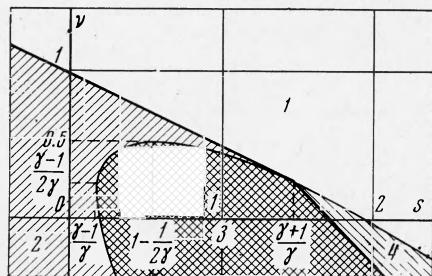
В области значений параметров  $s$ ,  $v$ , удовлетворяющих

$$\left(\frac{3\gamma+1}{2\gamma}-s-v\right)^2-\frac{4}{\gamma}\left(1-\frac{1}{2}s-v\right)\leqslant 0$$

возможны колебательные режимы горения. Это имеет место, когда  $v_2 < v < v_1$ , где

$$v_{1,2}=-\left(s-\frac{3\gamma-1}{2\gamma}\right)\pm\sqrt{\frac{2}{\gamma}\left(s-\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \quad (4.8)$$

Результаты полного исследования (4.5) графически представлены на фиг. 1. Видно, что рассматриваемый режим работы двигателя в зависимости от значений показателя степени  $v$  в законе горения пороха  $u=u_1 p^v$  и от неполноты выделения химической энергии в пламени ( $s=\partial \ln T_F / \partial \ln p$ )



Фиг. 1

процессов в полузамкнутом объеме высказывались О. И. Лейпунским в 1945 году<sup>1</sup>.

В работах [5, 6] при формулировании проблемы нестационарных процессов уравнение энергии для газа в камере не рассматривалось. Это равносильно предположению постоянства температуры пламени ( $\gamma=1.0$ ,  $s=q=0$ ) и автоматически приводит к невозможности выявления изложенного выше типа неустойчивости. В самом деле, из (4.7) и (4.8) при таких допущениях условие устойчивости принимает известный вид  $v \leqslant 1.0$  [3], а колебательные режимы вообще не существуют.

Обратимся теперь к предельному случаю малых значений параметра. Для этого в характеристическом уравнении (3.6) положим  $\omega\chi \ll 1.0$  и  $\omega \sim 1.0$ , что соответствует камерам с малым временем релаксации. После преобразований будем иметь

$$\omega^2 + \omega \left[ 2 \frac{C}{D} - \frac{E^2}{D^2} - \frac{E}{D} \right] + \frac{C}{D} \left[ \frac{C}{D} + \frac{E}{D} + 1 \right] = 0 \quad (4.9)$$

где

$$C = da_3 + a_1 b_3 / 2, D = (dr - \delta) / (k + r - 1) + a_1, E = b_3 - d$$

а остальные параметры определены ранее.

В общем виде условие устойчивости, вытекающее из (4.9), имеет весьма громоздкую форму и здесь не приводится.

Однако в частном случае модели нестационарного горения с постоянной температурой пламени результаты вполне обозримы, так как  $C = a_3$ ,

<sup>1</sup> Лейпунский О. И. К вопросу о физических основах внутренней баллистики реактивных снарядов. Докт. дисс. М., Ин-т хим. физики, 1945 г.

$D = (r - \delta) / (k + r - 1)$  при  $s = q = 0$  и  $\gamma = 1.0$  и решение (4.9) принимает вид

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \frac{1+k-v}{r-\delta} - \left( \frac{1-k-v}{r-\delta} \right)^2 \right] \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[ \frac{1+k-v}{r-\delta} - \left( \frac{1-k-v}{r-\delta} \right)^2 \right]^2 - 4 \frac{k(1-v)}{(r-\delta)^2}} \right\}$$

Отсюда получаем условие устойчивости

$$v < 1.0, \quad r > \delta + (1 - k - v)^2 / (1 + k - v) \quad (4.10)$$

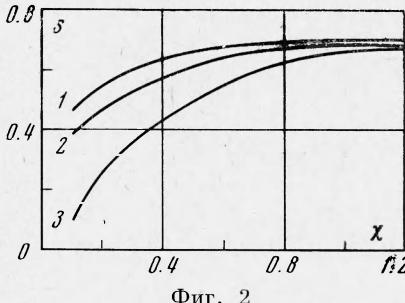
Безразмерная частота колебаний на границе устойчивости равна

$$\omega = j \frac{\sqrt{k(1-v)}}{r-\delta} \quad (4.11)$$

В случае  $s = q = \mu = r = 0$  и  $\gamma = 1$  критерий устойчивости, следующий из (4.10), имеет вид

$$v \leq 1 - k$$

Помимо приведенного выше аналитического исследования предельных случаев устойчивости на основании численного анализа и применения правила отбора корней Декарта к общему уравнению (3.6) были построены области неустойчивости  $s(\chi)$  для разных  $k$  и  $q$ . На фиг. 2 кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $k = 0.5, q = 0.1$ ,  $k = 0.5, q = 0.5$ ,  $k = 1.0, q = 0.1$ , при одинаковых значениях параметров  $v = 0.66, \mu = 0.1, r = 0.3$ . Видно, что в плоскости  $(s, \chi)$  с ростом  $k$  и  $q$  область неустойчивости над кривыми расширяется.



Фиг. 2

Поступила 18 XII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гостицев Ю. А., Суханов Л. А., Покил П. Ф. К теории нестационарного горения пороха. Горение при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1971, № 5.
- Гостицев Ю. А., Покил П. Ф., Суханов Л. А. Полная система уравнений для нестационарных процессов при горении пороха в полузамкнутом объеме. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 1.
- Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.
- Новожилов Б. В. Устойчивость стационарного режима горения пороха в полузамкнутом объеме. Физика горения и взрыва, 1967, т. 3, № 1.
- Новожилов Б. В. Нестационарное горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1.
- Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.