

УДК 536.224

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛООБМЕНЕ МЕЖДУ ГАЗОМ И ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ

А. Шабани Шахрбабаки, Р. Абазари*

Иранский университет науки и технологий, 1684613114, Нармак, Тегеран, Иран

* Мохаджедж Ардабил университет, Ардабил, Иран

E-mails: Ab_shabani@iust.ac.ir, abazari-r@uma.ac.ir

С использованием аналитического метода возмущений решается задача о радиационном теплообмене между газом и твердыми частицами. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, полученными с использованием численного метода Рунге — Кутты.

Ключевые слова: метод возмущений, радиация, пламя с пылью, температура частиц.

Введение. Известно, что для решения большинства технических задач используются нелинейные уравнения теплопередачи, которые трудно исследовать аналитически [1, 2]. В последние десятилетия эти уравнения решались с помощью численных методов, развитие которых обусловило развитие приближенных аналитических методов [3–11].

Метод возмущений — приближенный метод, используемый для решения нелинейных уравнений, который изучался во многих работах (см., например, [12–14]). Однако в этих работах основное внимание уделялось математическим аспектам предмета. Физическая верификация дана в работах [15, 16].

1. Математическое моделирование. Рассматривается нагрев окружающей средой одиночной твердой частицы до точки воспламенения в зоне предварительного нагрева. Для описания данного процесса используется нелинейное уравнение теплопередачи, содержащее нелинейный радиационный член. Температура твердой частицы T_s является функцией размера частицы, теплоемкости и температуры пламени и полагается равной температуре окружающей среды (300 К). Принимается также, что сосредоточенная емкость и температура частицы описываются уравнением энергии для переходного процесса

$$m_s c_s \frac{dT_s}{dt} = q_{conv} + q_{rad}, \quad (1)$$

где q_{conv} , q_{rad} — конвективный и радиационный тепловые потоки от среды к частице. Согласно закону Ньютона выражение для конвективного теплового потока имеет вид

$$q_{conv} = h(T_g - T_s). \quad (2)$$

Коэффициент конвективной теплопередачи вычислен с учетом поправок числа Нуссельта для конвективного течения вокруг сферической частицы:

$$\text{Nu} = 2 + (0,4 \text{Re}^{0,5} + 0,06 \text{Re}^{0,75}) \text{Pr}^{0,4} (\mu/\mu_s)^{0,25} = hD/\lambda_g, \quad \text{Re} = V_s D/\nu.$$

Тепловые свойства газа определяются с использованием правила одной трети:

$$T_g = T_u/3 + 2T_f/3,$$

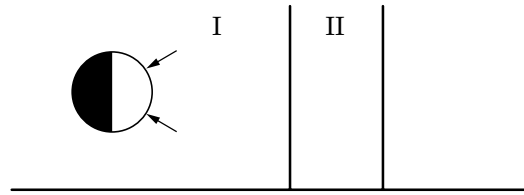


Рис. 1. Схема нагрева частицы окружающей средой:

I — зона предварительного нагрева, II — зона пламени; стрелки — направление радиационного потока

где $T_u = 300$ К; $T_f = 2600$ К. Скорость частицы полагается приблизительно равной скорости газа ($V_s = 0$, $Nu = 2$), диаметр частицы $d_s \approx 5$ мкм. В случае если предположение о полном захвате недействительно ($V_s \neq 0$), для нахождения относительной скорости V_s частицы в потоке используется соотношение для течения Стокса под действием силы гравитации.

Согласно закону Стефана — Больцмана выражение для излучающего теплового потока от горячего окружения в холодную частицу записывается в виде

$$q_{rad} = \varepsilon \sigma A_{eff} F_{sf} (T_f^4 - T_s^4), \quad (3)$$

где A_{eff} — эффективная площадь, равная половине полной площади; F_{sf} — формфактор.

Поскольку температура окружающей среды и температура частицы различаются незначительно, радиационной теплопередачей между левой областью частицы и средой пренебрегается (рис. 1). Рассматривается только радиационная теплопередача между частицей и пламенем. Подставляя выражения для конвективного и радиационного тепловых потоков (2), (3) в (1), получаем скорость изменения температуры для сферической частицы во времени

$$m_s c_s \frac{dT_s}{dt} + h A_s (T_s - T_g) + \varepsilon \sigma A_{eff} F_{sp} (T_s^4 - T_f^4) = 0, \quad (4)$$

где $A_s = 4\pi r^2$; $A_{eff} = \pi r^2$; $F_{sp} = 1/2$. Температура газа в зоне предварительного нагрева определяется уравнением [17]

$$T_g = T_a + (T_f - T_u) e^{\varkappa x / (V_u \tau_c)}, \quad (5)$$

где \varkappa — безразмерная скорость горения. Выполнив замену переменной $dx = V_u dt$, из (4) получаем

$$V_u m_s c_s \frac{dT_s}{dx} + 4\pi r_s^2 h (T_s - T_g) + \frac{1}{2} \varepsilon \sigma \pi r_s^2 (T_s^4 - T_f^4) = 0. \quad (6)$$

Для того чтобы найти решение уравнения (6), введем следующие параметры:

$$\theta_s = \frac{T_s}{T_u}, \quad \theta_f = \frac{T_f}{T_u}, \quad \theta_g = \frac{T_g}{T_u}, \quad y = \frac{x}{V_u \tau_c}$$

($V_u \tau_c$ — толщина пламени). В результате уравнение теплопередачи принимает вид

$$\frac{d\theta_s}{dy} + A\theta_s + B\theta_s^4 = A\theta_g(y) + B\theta_f^4, \quad (7)$$

где

$$A = \pi d_s^2 \tau_c / (m_s c_s), \quad B = \varepsilon \sigma \pi d_s^2 T_u^3 \tau_c / (2m_s c_s), \quad \theta_g(y) = 1 + (\theta_f - 1) e^{\varkappa y},$$

y — нормированное расстояние от границы пламени до частицы.

2. Метод возмущений. Для решения уравнения (7) используем метод возмущений. Для описания режима слабого излучения ($B \ll 1$) вычислим первые три члена в регулярном разложении возмущения

$$\theta_s = \theta_0 + B\theta_1 + B^2\theta_2 + B^3\theta_3 + \dots \quad (8)$$

Подставляя соотношение (8) в (7) и собирая члены с B по степеням $0, 1, 2, \dots$, находим

$$\begin{aligned} B^0: \quad & \frac{d\theta_0}{dy} + A\theta_0 = A\theta_g(y), \quad -\infty < y \leq 0, \\ & y = -\infty, \quad \theta_0 = 1, \\ B^1: \quad & \frac{d\theta_1}{dy} + A\theta_1 = \theta_f^4 - \theta_0^4, \quad -\infty < y \leq 0, \\ & y = -\infty, \quad \theta_1 = 0, \\ B^2: \quad & \frac{d\theta_2}{dy} + A\theta_2 = -4\theta_0^3\theta_1, \quad -\infty < y \leq 0, \\ & y = -\infty, \quad \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

и т. д. Решения (9) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 1 + M e^{\varkappa y}, \\ \theta_1 &= \frac{\theta_f^4 - 1}{A} - 4 \frac{M e^{\varkappa y}}{A + \varkappa} - 6 \frac{M^2 e^{2\varkappa y}}{A + 2\varkappa} - 4 \frac{M^3 e^{3\varkappa y}}{A + 3\varkappa} - \frac{M^4 e^{4\varkappa y}}{A + 4\varkappa}, \\ \theta_2 &= 4 \frac{\theta_f^4}{A^2} + \frac{4}{A^2} + 4 \frac{M^4 e^{4\varkappa y}}{(4\varkappa + A)^2} + 16 \frac{M^3 e^{3\varkappa y}}{(3\varkappa + A)^2} + 24 \frac{M^2 e^{2\varkappa y}}{(2\varkappa + A)^2} + \\ &+ 16 \frac{M e^{\varkappa y}}{(\varkappa + A)^2} - 12 \frac{M\theta_f^4 e^{\varkappa y}}{A(\varkappa + A)} + 12 \frac{M e^{\varkappa y}}{A(\varkappa + A)} + 12 \frac{M^5 e^{5\varkappa y}}{(4\varkappa + A)(A + 5\varkappa)} + \\ &+ 48 \frac{M^4 e^{4\varkappa y}}{(3\varkappa + A)(4\varkappa + A)} + 72 \frac{M^3 e^{3\varkappa y}}{(2\varkappa + A)(3\varkappa + A)} + 48 \frac{M^2 e^{2\varkappa y}}{(\varkappa + A)(2\varkappa + A)} - \\ &- 12 \frac{M^2 \theta_f^4 e^{2\varkappa y}}{A(2\varkappa + A)} + 12 \frac{M^2 e^{2\varkappa y}}{A(2\varkappa + A)} + 12 \frac{M^6 e^{6\varkappa y}}{(4\varkappa + A)(A + 6\varkappa)} + \\ &+ 48 \frac{M^5 e^{5\varkappa y}}{(3\varkappa + A)(A + 5\varkappa)} + 72 \frac{M^4 e^{4\varkappa y}}{(2\varkappa + A)(4\varkappa + A)} + 48 \frac{M^3 e^{3\varkappa y}}{(\varkappa + A)(3\varkappa + A)} - \\ &- 4 \frac{M^3 \theta_f^4 e^{3\varkappa y}}{A(3\varkappa + A)} + 4 \frac{M^3 e^{3\varkappa y}}{A(3\varkappa + A)} + 4 \frac{M^7 e^{7\varkappa y}}{(4\varkappa + A)(A + 7\varkappa)} + 16 \frac{M^6 e^{6\varkappa y}}{(3\varkappa + A)(A + 6\varkappa)} + \\ &+ 24 \frac{M^5 e^{5\varkappa y}}{(2\varkappa + A)(A + 5\varkappa)} + 16 \frac{M^4 e^{4\varkappa y}}{(\varkappa + A)(4\varkappa + A)} \end{aligned} \quad (10)$$

и т. д. Здесь

$$M = A(\theta_f - 1)/(\varkappa + A).$$

Подставляя соотношения (10) в (8), получаем приближенное распределение температуры твердой частицы.

3. Вычисление коэффициентов излучения. В настоящей работе рассматриваются частицы из алюминия (плотность частицы $\rho_s = 2707 \text{ кг/м}^3$, теплоемкость $c_s =$

0,896 кДж/(кг · К), диаметр частицы $d_s = 5,4$ мкм, скорость горения $V_u = 0,5$ м/с, время сгорания частицы $\tau_c = 0,1$ мс, температура пламени $T_f = 3000$ К) при постоянных параметрах окружающей среды (температура $T_u = 300$ К, плотность $\rho_u = 1,1774$ кг/м³, теплопроводность $\lambda_u = 0,02624$ Вт/(м · К)) и газа (плотность $\rho_g = 0,1308$ кг/м³, постоянная Стефана — Больцмана $\sigma = 0,567 \cdot 10^{-7}$). Подставляя данные значения в уравнения (10), находим температуру частицы из алюминия:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 1,0 + 8,9827 e^y, \\ \theta_1 &= 19,2552 e^{519,2886y} - 0,06906 e^{520,2886y} - 0,9287 e^{521,2886y} - \\ &\quad - 5,551 e^{522,2886y} - 12,4419 e^{523,2886y}, \\ \theta_2 &= -0,1483 + 3,3396 e^{4y} - 106,5231 e^{3y} - 35,7441 e^{2y} - \\ &\quad - 3,9887 e^y + 17,9454 e^{5y} + 53,5717 e^{6y} + 68,5399 e^{7y}, \\ \theta_3 &= 1,213756527 \cdot 10^{-36} e^{8y} + 3,921203592 \cdot 10^{-37} e^{3y} + 9,784275514 \cdot 10^{-39} e^{4y} + \\ &\quad + 6,138633948 \cdot 10^{-36} e^{2y} + 2,436755641 \cdot 10^{-39} e^{6y} + 1,209170157 \cdot 10^{-36} e^{10y} + \\ &\quad + 1,945700453 \cdot 10^{-37} e^{7y} + 3,851422764 \cdot 10^{-19} + 3,075216233 \cdot 10^{-27} e^y + \\ &\quad + 1,953122702 \cdot 10^{-38} e^{5y} + 3,876668804 \cdot 10^{-35} e^{9y}, \\ \theta_4 &= 2,446068878 \cdot 10^{-73} e^{4y} + 2,432125566 \cdot 10^{-85} e^{7y} + 3,844020290 \cdot 10^{-49} e^y + \quad (11) \\ &\quad + 1,202355225 \cdot 10^{-82} e^{13y} + 2,427513053 \cdot 10^{-84} e^{8y} + 1,206889946 \cdot 10^{-82} e^{11y} + \\ &\quad + 3,069316974 \cdot 10^{-57} e^{2y} + 4,818473272 \cdot 10^{-81} e^{12y} + 1,209170157 \cdot 10^{-83} e^{10y} + \\ &\quad + 1,211459001 \cdot 10^{-85} e^{9y} + 2,450752244 \cdot 10^{-65} e^{3y} + 4,882806755 \cdot 10^{-82} e^{5y} + \\ &\quad + 7,702845527 \cdot 10^{-40} + 9,747022561 \cdot 10^{-83} e^{6y}, \\ \theta_5 &= -5033,667081 e^{13y} - 9646,796268 e^{14y} - 6430,119927 e^{16y} - 11503,48372 e^{15y} - \\ &\quad - 24986,29236 e^{8y} + 21823,67771 e^{12y} + 31236,37817 e^{11y} + 49,26486850 e^y + \\ &\quad + 8552,564771 e^{4y} + 3925,829450 e^{3y} + 660,71141370 e^{2y} - 2090,454586 e^{5y} - \\ &\quad - 9330,130259 e^{6y} - 23640,06034 e^{7y} + 7251,921209 e^{9y} - 263,44674510 + \\ &\quad + 19405,20319 e^{10y}. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя уравнения (11) в соотношение (8), получаем распределение температуры частиц из алюминия. В таблице представлены результаты решения уравнения теплопроводности методом возмущений третьего и пятого порядков, а также различия между результатами, полученными с использованием метода возмущений третьего (МВ3) и пятого (МВ5) порядков, и результатами, полученными с использованием метода Рунге — Кутты РК45 ($\Delta_3 = |\text{МВ3} - \text{РК45}|$, $\Delta_5 = |\text{МВ5} - \text{РК45}|$ соответственно). Из таблицы следует, что расчетные значения, полученные с использованием метода возмущений, хорошо согласуются с численными данными (рис. 2).

Заключение. С использованием метода возмущений третьего и пятого порядков решено уравнение радиационного теплообмена. Результаты сравнения полученных решений свидетельствуют о целесообразности использования метода возмущений для решения нелинейных задач. Установлено, что толщина зоны предварительного нагрева составляет приблизительно две толщины зоны пламени.

Результаты решений, полученные методом возмущений
 третьего (МВ3) и пятого (МВ5) порядков и методом Рунге — Кутты,
 а также различия между ними

y	МВ3	МВ5	РК45	Δ_3	Δ_5
-9	1,788 400 550	1,788 370 399	1,787 924 124	0,000 476 426	0,000 446 275
-8	1,790 303 334	1,790 273 184	1,789 825 595	0,000 477 739	0,000 447 589
-7	1,795 475 592	1,795 445 445	1,794 993 081	0,000 482 512	0,000 452 365
-6	1,809 534 915	1,809 504 777	1,809 041 614	0,000 493 301	0,000 463 163
-5	1,847 749 585	1,847 719 475	1,847 228 346	0,000 521 240	0,000 491 129
-4	1,951 607 804	1,951 577 783	1,951 003 103	0,000 604 701	0,000 574 680
-3	2,233 747 277	2,233 717 654	2,232 886 685	0,000 860 591	0,000 830 968
-2	2,998 722 224	2,998 695 642	2,996 961 632	0,001 760 592	0,001 734 010
-1	5,046 253 462	5,046 268 507	5,041 532 793	0,004 720 669	0,004 735 714
0	9,988 489 409	9,988 487 246	9,989 971 475	0,001 482 065	0,001 484 228

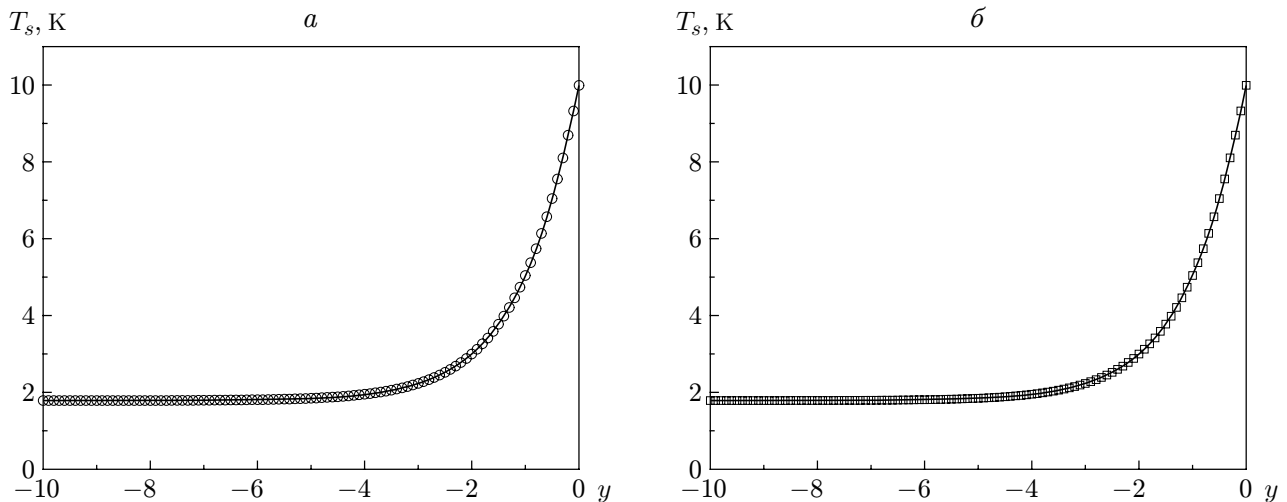


Рис. 2. Распределение температуры частицы:
a — метод возмущений третьего порядка, *б* — метод возмущений пятого порядка;
 точки — метод возмущений, линии — метод Рунге — Кутты

Авторы выражают благодарность М. Седиджи и А. Борханифару за обсуждение деталей метода возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abbasbandy S.** The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer // Phys. Lett. 2006. V. A360. P. 109–113.
2. **Liao S. J., Pop I.** Explicit analytic solution for similarity boundary layer equations // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. V. 47. P. 75–85.
3. **Ganji D. D., Rafei M.** Solitary wave solutions for generalized Hitora — Satsuma coupled kdv equation by homotopy perturbation method // Phys. Lett. 2006. V. A356. P. 131–137.
4. **Aziz A., Hamad G.** Regular perturbation expansions in heat transfer // Intern. J. Mech. Engng Educ. 1997. V. 5. P. 167.
5. **Liao S. J.** Boundary element method for general nonlinear differential operators // Engng Anal. Bound. Elem. 1997. V. 202. P. 91–99.

6. **Iyer S. V., Vafai K.** Passive heat transfer augmentation in a cylindrical annulus utilizing multiple perturbations on the inner and outer cylinders // Numer. Heat Transfer. 1999. V. A6. P. 567–586.
7. **Aldoss T. K., Ali Y. D., Al-Nimr M. A.** MHD mixed convection from a horizontal circular cylinder // Numer. Heat Transfer. 1996. V. A4. P. 379–396.
8. **He J. H.** Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems. Berlin: Dissertation de-Verlag im Internet GmbH, 2006.
9. **Ganji D. D., Rajabi A.** Assessment of homotopy perturbation and perturbation methods in heat transfer radiation equations // Intern. Commun. Heat Mass Transfer. 2006. V. 33. P. 391–400.
10. **Siddique M. R., Khayat R. E.** Transient linear and nonlinear heat conduction in weakly modulated domains // Numer. Heat Transfer. 2003. V. A5. P. 481–500.
11. **Branco J. F., Pinho C. T., Figueiredo R. A.** A dimensionless analysis of radial heat conduction with variable external convection boundary conditions // Intern. Commun. Heat Mass Transfer. 2001. V. 28, iss. 4. P. 489–497.
12. **Cole J. D.** Perturbation methods in applied mathematics. Waltham: Blaisdell Publ. Co., 1968.
13. **Nayfeh A. H.** Perturbation methods. N. Y.: John Wiley and Sons, 2000.
14. **Bellman R.** Perturbation techniques in mathematics, physics and engineering. N. Y.: Holt, Rinehart and Winston, 1964.
15. **Nayfeh A. H.** Perturbation methods. N. Y.: Wiley, 1973.
16. **Van Dyke M.** Perturbation methods in fluid mechanics: Annot. ed. Stanford: Parabolic Press, 1975.
17. **Goroshin S., Bidabadi M., Lee J. H. S.** Quenching distance of laminar flame in aluminium dust clouds // Combust Flame. 1996. V. 105. P. 147–160.

Поступила в редакцию 2/XII 2008 г.
