

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ И УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПРИДОННЫМ ИСТОЧНИКОМ КОЛЕБАНИЙ

В. А. Бабешко, А. А. Золотарев, А. А. Иванов, Г. В. Ткачев

(Ростов-на-Дону)

В настоящее время большой интерес вызывают вопросы изучения распространения акустических и сейсмических волн в океане и подстилающей среде, что связано с задачами морской гидроакустики и проблемой исследования предвестников волн цунами, вызванных подводными извержениями вулканов. Для описания указанных волновых процессов используется простейшая модель — точечный источник колебаний, расположенный в слое жидкости на некотором удалении от дна. В работе исследованы волновые поля в жидкости и упругом основании, получены аналитические формулы и приведены результаты численного анализа.

Изучаются гармонические осесимметричные колебания, вызванные вибрацией точечного источника, находящегося в слое ($0 \leq R < \infty$, $0 \leq \Theta < 2\pi$, $0 \leq Z \leq H$) идеальной, сжимаемой, невесомой жидкости. Слой лежит на упругом полупространстве ($0 \leq R < \infty$, $0 \leq \Theta < 2\pi$, $-\infty < Z \leq 0$). Сосредоточенный источник гармонических колебаний типа δ -функции находится в точке $(0, 0, h_0)$, $0 \leq h_0 < H$.

Потенциал скоростей $\Phi(R, Z, t)$ частиц жидкости удовлетворяет волновому уравнению [1] с правой частью вида $C_0 R^{-1} \delta(R) \delta(Z - h_0) e^{-i\omega t}$.

Компоненты вектора перемещений $U_r(R, Z, t)$, $U_z(R, Z, t)$ в упругой среде при осевой симметрии удовлетворяют системе динамических уравнений Ламэ в цилиндрической системе координат [2]. Поверхность жидкости свободна от напряжений, а на поверхности раздела жидкой и упругой сред задано равенство нормальных скоростей. Кроме того, должны быть выполнены условия излучения волн на бесконечности. Используя методику интегральных преобразований, находим потенциал скоростей частиц жидкости и перемещения в упругой среде:

$$(1) \quad \Phi(r, z, t) = \frac{C_0}{H} e^{-i\omega t} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda,$$

$$U_r(r, z, t) = \frac{iC_0 m}{\omega H^2} e^{-i\omega t} \int_{\Gamma} u(\lambda, z) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad U_z(r, z, t) =$$

$$= \frac{iC_0 m}{\omega H^2} e^{-i\omega t} \int_{\Gamma} w(\lambda, z) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda,$$

$$\varphi(\lambda, z) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(\gamma(z-1)) [m\delta_1 \kappa_2^2 s \text{sh}(\gamma h) - \gamma \text{ch}(\gamma h) \Delta(\lambda)]}{\gamma D(\lambda)}, & z > h, \\ \frac{\text{sh}(\gamma(h-1)) [m\delta_1 \kappa_2^2 s \text{sh}(\gamma z) - \gamma \text{ch}(\gamma z) \Delta(\lambda)]}{\gamma D(\lambda)}, & z \leq h, \end{cases}$$

$$u(\lambda, z) = \frac{s \text{sh}(\gamma(1-h)) [-\lambda(2\lambda^2 - \kappa_2^2) e^{\delta_1 z} + 2\lambda \delta_1 \delta_2 e^{\delta_2 z}]}{D(\lambda)},$$

$$w(\lambda, z) = \frac{s \text{sh}(\gamma(1-h)) [\delta_1 (2\lambda^2 - \kappa_2^2) e^{\delta_1 z} + 2\lambda^2 \delta_1 e^{\delta_2 z}]}{D(\lambda)},$$

$$D(\lambda) = ms\kappa_2^2 \delta_1 \text{sh}(\gamma) - \gamma \text{ch}(\gamma) \Delta(\lambda), \quad \Delta(\lambda) = 4\lambda^2 \delta_1 \delta_2 - (2\lambda^2 - \kappa_2^2)^2,$$

где

$$(2) \quad r = R/H; \quad z = Z/H; \quad h = h_0/H;$$

$$\kappa_1^2 = \frac{H^2 \omega^2}{V_p^2}; \quad \kappa_2^2 = \frac{H^2 \omega^2}{V_s^2} = \frac{\rho H^2 \omega^2}{\mu}; \quad \kappa_3^2 = \frac{H^2 \omega^2}{V_0^2}; \quad s = \frac{H \omega^2}{g};$$

$$m = \rho_0 g H / \mu; \quad \delta_i = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_i^2} \quad (i = 1, 2); \quad \gamma = \sqrt[3]{\lambda^2 - k^2};$$

μ , ρ , V_s , V_p — соответственно модуль сдвига, плотность, скорости поперечных и продольных волн в упругом полупространстве; ρ_0 — плотность жидкости; $\omega = 2\pi f$; f — частота колебаний источника возмущений; V_0 — скорость звука в жидкости; C_0 — амплитудная функция давления; $\delta(x)$ — дельта-функция. Полубесконечный контур интегрирования Γ в формулах (1) совпадает со всей действительной прямой от 0 до $+\infty$, кроме особенностей подынтегральной функции (нулей и точек ветвления $D(\lambda)$), которые он обходит снизу. Такой выбор контура определен условиями излучения волн и детально описан в [3].

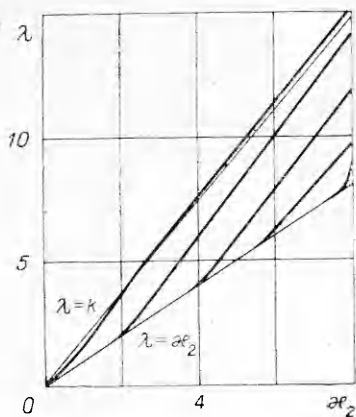
Учитывая связь потенциала и скоростей частиц жидкости, с помощью (1) можно рассчитать поле скоростей во всем объеме, занятом жидкостью, а также поле перемещений во всем упругом полупространстве. Частный случай для источника, расположенного на дне водоема, рассмотрен в [4].

Исследование нулей знаменателя $D(\lambda)$ подынтегральных выражений (1) в зависимости от приведенной частоты κ_2 (2) произведено численно на ЭЦВМ. Установлено, что все вещественные нули знаменателя $D(\lambda)$ лежат в некотором угле, образованном прямыми $\lambda = \kappa_2$ и $\lambda = k$. При этом только самый первый нуль, начиная с некоторого момента, выходит из этого угла вверх и проходит в дальнейшем немного выше прямой $\lambda = k$. Характерная зависимость нулей от частоты κ_2 приведена на фиг. 1.

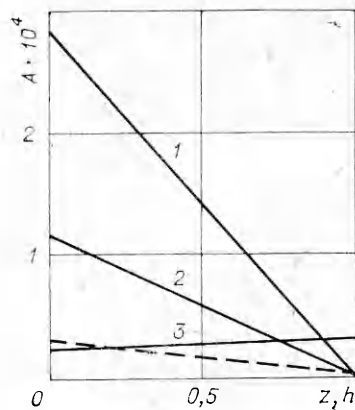
Как видно из формулы (1) в дальней зоне, т. е. при $r \gg 1$, подынтегральные выражения за счет функций Бесселя являются быстроосциллирующими функциями. Вследствие этого численные методы счета интегралов здесь малоэффективны. Счет таких интегралов производится с помощью теории вычетов. Для этого с использованием соотношения между функциями Бесселя I и III рода [5] контур Γ разворачивается на всю вещественную ось и замыкается в ту полуплоскость, где подынтегральная функция убывает. Отрицательные вещественные особенности подынтегральной функции он обходит сверху. В результате исходный интеграл представляется в виде суммы трех слагаемых. Первое — сумма вычетов в вещественных положительных полюсах, которых конечное число. Каждому члену этой суммы соответствует рэлеевская волна, убывающая на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$) как $O(r^{-1/2})$. Второе слагаемое — вычеты в комплексных полюсах, в общую сумму оно вносит экспоненциально убывающий вклад порядка $O(e^{-\epsilon r})$, где ϵ — нижняя граница мнимой составляющей комплексных полюсов. Это слагаемое определяет проникающие волны. Третье слагаемое — интегралы по берегам разрезов, проведенных из точек ветвления $\lambda = \kappa_1$ и $\lambda = \kappa_2$. Вклад этого слагаемого в общую сумму при больших r порядка $O(r^{-3/2})$. В силу приведенных оценок на достаточном удалении от источника ($r \gg 1$) в значении интегралов (1) основной вклад при $|z| \ll 1$ дает только первое слагаемое, соответствующее рэлеевским волнам.

Проведенный численный анализ волновых полей в упругой и жидкой средах проиллюстрирован на фиг. 2—4. На фиг. 2 линиями 1—3 соответственно проведены амплитудные функции распределения потенциала скоростей $\Phi \cdot 10^{-1}$ и самих скоростей V_r , V_z по глубине слоя жидкости. Расстояние по горизонтали от источника колебаний до исследуемой точки равно 100 толщинам слоя. Сам источник находится от дна на расстоянии $h = 0, 1$. Коэффициент C_0 в (1) взят равным 1, глубина водоема $H = 100$ м. Амплитуды посчитаны в метрах. Расчеты проведены для $\kappa_2 = 2,35$. Штриховой линией изображено значение амплитудной функции V_z в точке, отстоящей от дна на расстоянии $z = 0, 1$, а по горизонтали от источника на расстоянии $r = 100$ для различных положений в слое по глубине h ($0 \leq h \leq 1$) самого источника колебаний. Амплитудные функции для Φ и V_r в этом случае совпадают со значениями Φ и V_r в предыдущем случае.

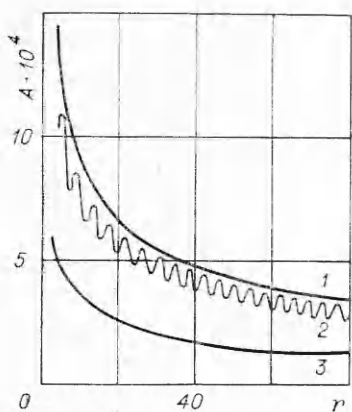
На фиг. 3 линиями 1—3 показано распределение амплитудных функций соответственно $\Phi \cdot 10^{-1}$, $V_z \cdot 10$ и V_r в зависимости от расстояния r



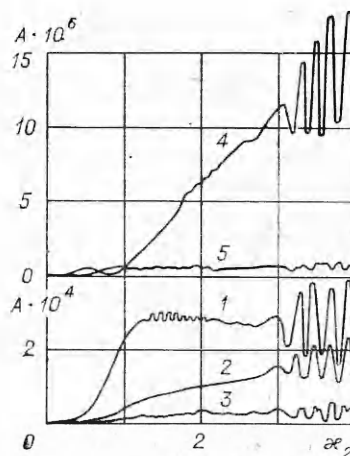
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

между источником и точкой регистрации колебаний. При этом источник, как и раньше, находится на расстоянии $h = 0, 1$ от дна водоема, а приемник — на самом дне. Расчеты проведены для $H = 100$ м, $\kappa_2 = 2,35$. Из фиг. 2, 3 ясно, как распределяется волновое поле во всей области, занятой жидкостью.

На фиг. 4 приведена зависимость от приведенной частоты κ_2 амплитудных функций $\Phi \cdot 10^{-1}$, V_r , V_z на дне водоема и амплитудных функций перемещений U_r и U_z (линии 1—5 соответственно) на поверхности упругого полупространства для тех же значений $h = 0,1$, $r = 100$. С учетом связи (2) приведенной частоты κ_2 с параметрами ω , H , μ фиг. 4 дает представление зависимости потенциала скоростей Φ , самих скоростей V_r , V_z и перемещений U_r , U_z от ω , H , μ . Аналогичные кривые получены для большого числа различных точек слоя жидкости и упругого полупространства. Они имеют вид, подобный фиг. 2—4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Наука, 1973.
2. Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970.
3. Воронич И. И., Бабешко В. А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М.: Наука, 1979.
4. Бабешко В. А., Золотарев А. А., Ткачев Г. В. *Возбуждение колебаний в слое жидкости, лежащем на упругой среде заглубленным источником*. Ростов-на-Дону: РГУ, 1982 (Рукопись деп. в ВИНТИ 3.05.82 г. № 2133-82 ДЭП).
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Наука, 1971.

Поступила 16/VI 1983 г.